EUCLIDES Y EL CÍRCULO

Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Profesora Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
lmendieta@uni.pedagogica.edu.co

Johana Andrea Torres Díaz
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Profesora Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
jotorres@uni.pedagogica.edu.co

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Profesor Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

Se presenta la manera cómo Euclides aborda el asunto del área del círculo en los Elementos, correspondiente a la proposición 2 del libro XII. El estudio de esta proposición, buscando las proposiciones que justifican su demostración, se constituye en una subteoría al interior de los Elementos.

Introducción

Uno de los grades retos para un profesor de matemáticas elementales en un aula es lograr construir -o reconstruir- con sus estudiantes, una teoría matemática; esto implica una variedad de actividades que incluye: acordar un lenguaje, un conjunto de símbolos a los que se les asigna un significado, observar los objetos construidos, conjeturar algunas de sus propiedades y luego explicar, argumentar y *demostrar* con base en unas pocas proposiciones que se toman como axiomas, las demás proposiciones que se enuncian como teoremas.

Una de las mayores dificultades está en que las teorías matemáticas son en general muy extensas y muy pronto dejan de ser elementales.

Nuestra propuesta para resolver, al menos parcialmente, este problema, es construir subteorías, al interior de las teorías. Mostraremos con un ejemplo, donde se ha tomado como meta el establecimiento de la relación entre el área del círculo y su diámetro, un camino para iniciar con los postulados y las nociones comunes de los Elementos de Euclides y terminar en la meta trazada, eludiendo, en lo posible, los teoremas que no tienen relación con ella.

Hacia finales del siglo IV a.C., Alejandría se constituyó en el centro cultural y científico del mundo griego, de manos de Alejandro Magno y Ptolomeo I. Este último gobernante estableció un museo y una biblioteca en Alejandría, semejante a una universidad, llamó a célebres sabios para que fueran maestros en ella; entre éstos, Euclides, el autor de *Los Elementos*. Es muy poco lo que se sabe acerca de la vida de Euclides, pero si se le reconoce por su habilidad expositiva y capacidad pedagógica; precisamente, los Elementos se constituyeron en un libro de texto que cubría todas las matemáticas elementales de su tiempo (aritmética, geometría y álgebra), descritas y organizadas lógicamente[1] .

Los Elementos de Euclides muestran el estado de gran parte de las matemáticas de la época, sus ramas de estudio y los resultados que se habían obtenido, constan de trece libros: los seis primeros sobre geometría plana, los libros VII, VIII y IX de aritmética (teoría de números), el libro X sobre los inconmensurables y los últimos tres sobre geometría del espacio, precedidos todos por 5 postulados y 5 nociones comunes que hacen parte del libro I.

En particular, nos interesa mostrar la manera como Euclides aborda el asunto del área del círculo. La proposición 2 del libro XII de los Elementos enuncia:

Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros

Con notación moderna, esta afirmación equivale a que, dados dos círculos cualesquiera de áreas C_1 y C_2 y con diámetros d_1 y d_2 respectivamente, se

[1] Aunque Euclides haya tomado la obra de sus antecesores, sin asumirla como suya, se cree que el orden lineal de los Elementos, si es original de él.

tiene:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2}$$

Esto significa que la razón entre el área de un círculo y su diámetro es constante:

$$\frac{C_1}{(d_1)^2} = \frac{C_2}{(d_2)^2}$$

hoy sabemos que esa razón constante es $\frac{\pi}{4}$, porque:

$$\frac{C}{d^2} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

En los elementos no aparecen expresiones como estas, con esto sólo pretendemos aclarar el sentido moderno de sus proposiciones.

1. El Área del Círculo en los Elementos.

Euclides en su demostración de la proposición XII-2, considera dos círculos $ABGD$ (C_1) y $EZHT$ (C_2) con diámetros BD (d_1) y ZT (d_2), como se muestra en la Figura 1, y afirma: *Digo que el círculo ABGD es al EZHT como el cuadrado de BD al de ZT, porque si no fuera así, será menor o mayor.*

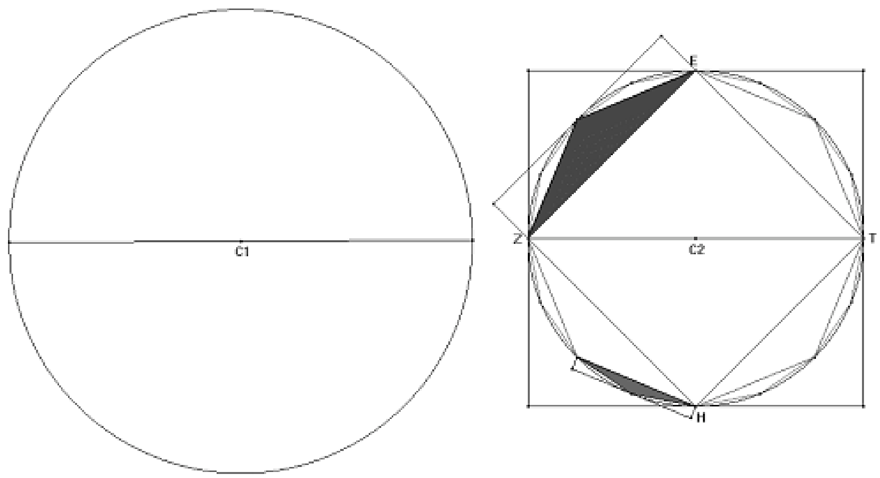

Figura: 1

Pero si es así, debe existir un área S, menor o mayor que el círculo $EZHT$, tal que

$$\frac{C_1}{S} = \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2}$$

Inicialmente considera el caso en que $S < C_2$. En este círculo inscribe polígonos regulares, empezando por un cuadrado y duplicando la cantidad de lados, bisecando los arcos determinados por los lados de cada polígono; muestra que cada polígono inscrito es mayor que la mitad de los segmentos circulares determinados por sus lados, en términos de áreas; por ejemplo, el cuadrado $EZHT$ (el área de este cuadrado) es mayor que la mitad del círculo (su área), pues trazando las tangentes a la circunferencia por los vértices del cuadrado, se obtiene un cuadrado circunscrito igual al doble del cuadrado inscrito y como el círculo es menor que el cuadrado circunscrito, su mitad será menor que la mitad del cuadrado circunscrito, es decir, menor que el cuadrado inscrito.

Haciendo este proceso indefinidamente, en virtud del método de exhaución, con algún polígono inscrito con un número suficiente de lados (P_2) se obtendrán segmentos circulares menores que la diferencia entre C_2 y S, debido a que de la mayor de dos magnitudes, en este caso C_2, estamos restando una magnitud mayor que su mitad y en general, magnitudes mayores que las mitades que van quedando al quitar los polígonos inscritos, entonces, al hacer este proceso continuamente[2] , quedará una magnitud menor que S, con lo cual, la diferencia entre el círculo y el polígono inscrito será menor que la diferencia entre el círculo y el área S:

$$C_2 - P_2 < C_2 - S,$$

de donde se concluye que $P_2 > S$.

Ahora bien, si inscribimos en C_1 un polígono P_1 semejante al polígono P_2, estos serán entre sí como la razón de los cuadrados de los diámetros de los círculos respectivos donde están inscritos, es decir:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2}$$

En conclusión tenemos:

$$\frac{C_1}{S} = \frac{(d_1)^2}{(d_2)^2} = \frac{P_1}{P_2}$$

por lo que:

$$\frac{C_1}{S} = \frac{P_1}{P_2}$$

Pero esto no es posible, pues $P_2 > S$ y $P_1 < C_1$; entonces, el área S no puede ser menor que el círculo C_2. De manera análoga, demuestra que no es posible que haya un área mayor que C_2 que cumpla la proposición, debe ser C_2 y, en consecuencia, la proposición queda demostrada.

En la demostración de esta proposición, Euclides emplea tres resultados demostrados previamente, el hecho que el área de un paralelogramo sea el doble del área del triángulo con iguales base y altura, el método de exhaución y el hecho que la razón entre los polígonos semejantes inscritos a una circunferencia sea igual a la razón de los cuadrados de los diámetros de las circunferencias; estos resultados corresponden a las proposiciones I-41, X-1 y XII-1 respectivamente, obviamente en términos y palabras de Euclides.

[2]Esta es la expresión usada por Euclides para referirse a la esencia del método de exhaución, la realización de un proceso indefinidamente.

Reiterando este proceso con las demostraciones de cada una de estas proposiciones, buscando las proposiciones, postulados, definiciones o nociones comunes previas que se requieren para construirlas, encontramos un árbol con las secuencias parciales que se inicia (o termina, según la dirección en que lo miremos) en las nociones comunes y los postulados de los Elementos.

Con esto, seleccionamos solamente las nociones y las proposiciones necesarias para conseguir el área del círculo, en este caso, o cualquier otro concepto o procedimiento que esté inmerso en los elementos de la Geometría de Euclides, lo que nos permite abordar o construir subteorías, en este caso de la Geometría euclidiana, pero en general de cualquier libro de matemáticas, y su posterior reconstrucción en sentido contrario con los estudiantes, en un ambiente donde vamos elaborando los prerrequisitos de un tema, proponiendo y construyendo los elementos necesarios para explicar un concepto o un procedimiento.

En la figura 2, mostramos el diagrama de árbol, para el caso del área del círculo en los elementos de Euclides, cuyo teorema final es la proposición XII-2.

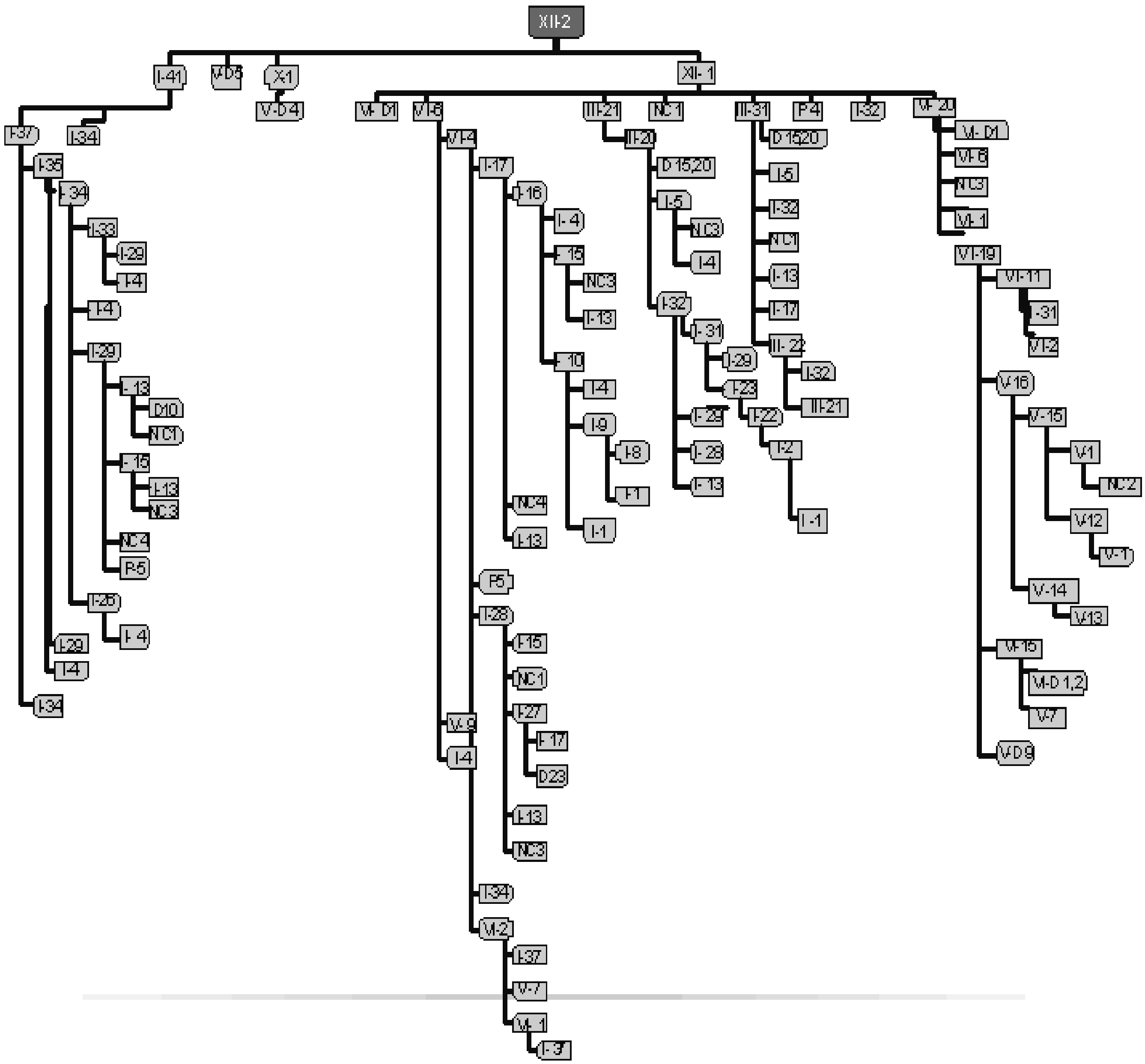

Figura: 2

Veamos, a manera de ejemplo, en el sector izquierdo del árbol donde se describe la demostración de la proposición I-41, que establece:

Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

Consideremos el paralelogramo $ABGD$ y el triángulo EBG, con la misma base BG y entre las mismas paralelas AE y BG (Figura 3)

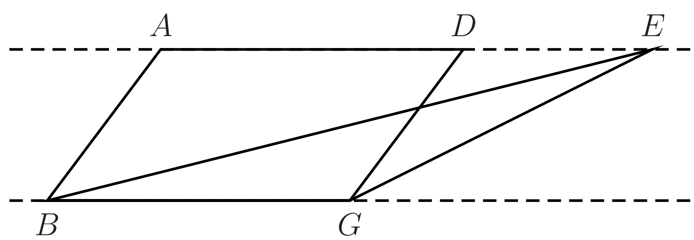

Figura 3

Trazamos la recta AG (Postulado 1), entonces los triángulos ABG y EBG serán equivalentes (Proposición I-37).

Pero además, el paralelogramo $ABGD$ es el doble del triángulo ABG (Proposición I-34); luego, el paralelogramo $ABGD$ es el doble del triángulo EBG, como se quería demostrar.

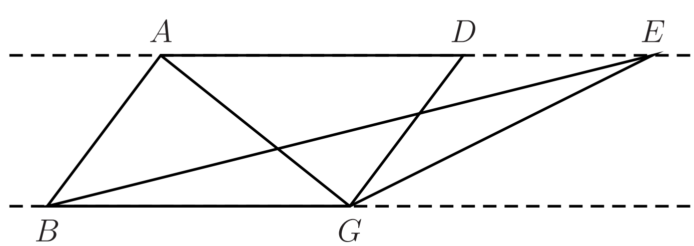

Figura 4

Como vemos, en la demostración, los argumentos centrales son, las proposiciones I-34 y I-37, debemos proceder a demostrarlas, siguiendo el procedimiento de Euclides, pero adecuando eventualmente el lenguaje.

Nuevamente nos restringimos, para ejemplificar, a la Proposición I-34, pero el procedimiento se aplica a todas y cada una de las proposiciones que intervienen en cada demostración.

Proposición I-34

Los lados y los ángulos opuestos de regiones paralelográmicas son iguales entre sí y la diagonal divide en dos dichas regiones.

Sea $AGBD$ una región paralelográmica y BG su diagonal (Figura 5). Por ser un paralelogramo, los lados opuestos AB y GD y, AG y BD son iguales y paralelos (Proposición I-33)

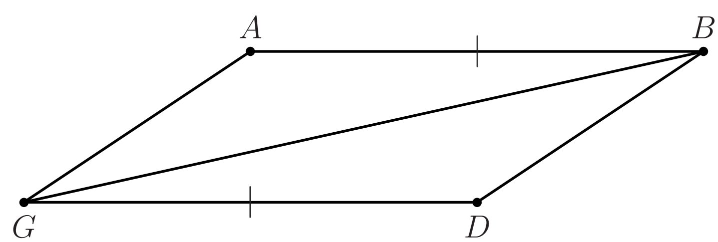

Figura 5

Por ser paralelas las rectas AB y GD, los ángulos alternos ABG y BGD son iguales (Proposición I-29); de igual manera, los ángulos DBG y AGB. Entonces, los triángulos BAG y GBD son iguales, por tener dos ángulos iguales y un lado común (Proposición I-26)

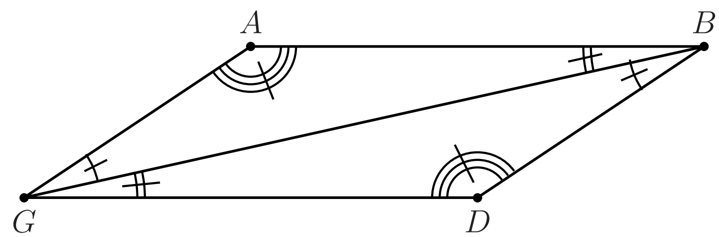

Figura 6

En consecuencia, los ángulos BAG y BDG son iguales y, los ángulos ABD y AGD, obtenidos de sumar los ángulos iguales $ABG + GBDyDGB + BGA$ respectivamente, también lo son (Noción Común 2).

Por último, la diagonal divide el paralelogramo en dos regiones iguales, pues los triángulos BAG y GBD, por tener iguales los lados AB y BG con GD y BG y el ángulo ABG con el ángulo BGD, son iguales (Proposición I-4).

En esta demostración intervienen las proposiciones I-33, I-29, I-26, I-4 y la noción común 2.

Veamos la prueba de la proposición I-33, que establece:

Los segmentos que unen por el mismo lado segmentos iguales y paralelos, son también iguales y paralelos.

Sean AB y GD dos segmentos iguales y paralelos y AG y BD los segmentos que los unen (Figura 7).

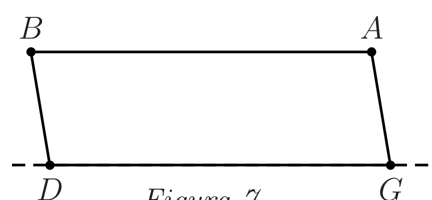

Figura 7

Trazamos la recta BG que incide sobre las paralelas AB y GD, entonces los ángulos ABG y BGD son iguales (Proposición I-29); en consecuencia, la base AG será igual a la base BD y los triángulos ABG y DGB serán iguales (Proposición I-4).

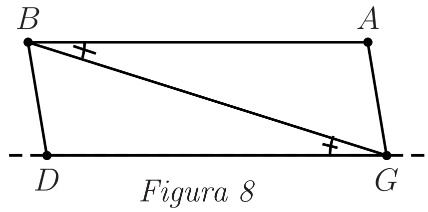

Figura 8

Por lo tanto, los segmentos BD y AG serán iguales y, por ser iguales los ángulos AGB y DBG, paralelos (Proposición I-28).

En esta demostración intervienen de nuevo las proposiciones I-29, y I-4, con lo que nos ahorramos un poco de trabajo, y aparece la proposición I-28.

Demostremos la proposición I-29, que reza:

Una recta que incide sobre dos paralelas forma ángulos alternos iguales entre sí y el externo igual al interno y opuesto y los internos del mismo lado iguales a dos rectos.

(Sólo consideraremos la demostración de la primera parte de la proposición, pues es la única que empleamos y las otras dos partes se coligen fácilmente de ésta). Sean AB y GD dos rectas paralelas y EZ una recta que incide sobre éstas (Figura 9). Supongamos que los ángulos AHT y HTD no son iguales, entonces uno de los dos, por ejemplo AHT, es mayor que el otro. Si le sumamos a cada uno de estos ángulos, el ángulo BHT, $AHT + BHT$ será mayor que $HTD + BHT$ (Noción Común 4); pero, como $AHT + BHT$ es igual a dos ángulos rectos (Proposición I-13), $HTD + BHT$ será menor que dos rectos y, en consecuencia las rectas no son paralelas (Postulado 5). Por lo tanto, los dos ángulos AHT y HTD deben ser iguales.

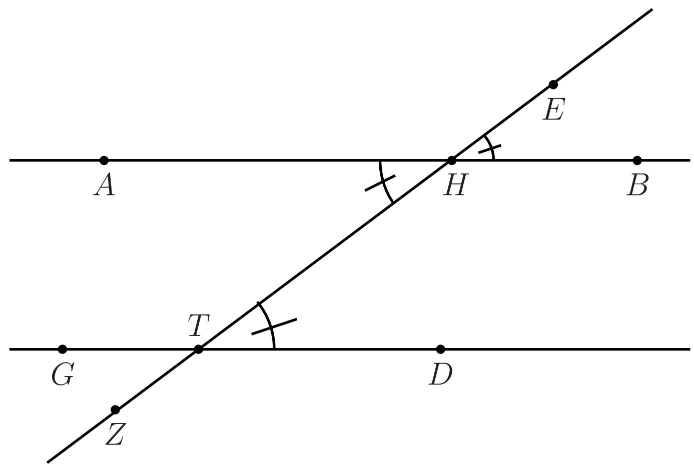

Figura 9

Aquí aparece la proposición I-13 y el postulado 5; la primera dice:

Si una recta levantada sobre otra forma ángulos, serán rectos o igual a dos rectos.

Sea AB la recta levantada sobre la recta GD (Figura 10). Si los dos ángulos que se forman son iguales, entonces son rectos (Definición 10).

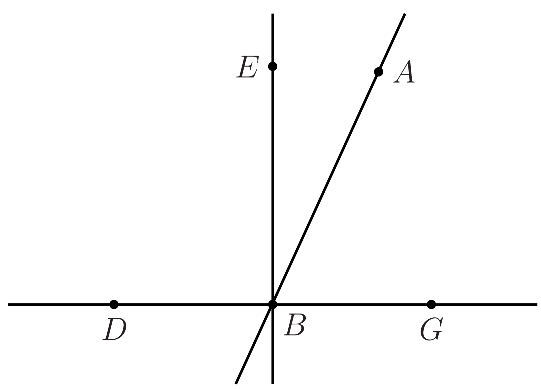

Figura 10

Si no son iguales, trazamos la recta EB perpendicular a GD, con lo cual los ángulos EBD y EBG serán iguales y rectos (Definición 10).

Como $EBG = EBA + ABG$, al sumarle el ángulo EBD, los tres ángulos serán iguales a $EBD + EBG$; de igual manera, $ABD = ABE + EBD$ y al sumarle el ángulo ABG, los tres ángulos serán iguales a $EBD + EBG$. Por lo tanto, los ángulos EBG y EBD juntos, serán iguales a los ángulos DBA y ABG (Noción Común 1), iguales a dos rectos, como se quería demostrar.

Por último, demostremos la proposición I-4,

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro e iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán iguales sus bases y los dos triángulos serán iguales.

Sean los triángulos ABC y DEZ con lados iguales CB y AC con DZ y EZ respectivamente y el ángulo BCA igual al ángulo DZE (Figura 11)

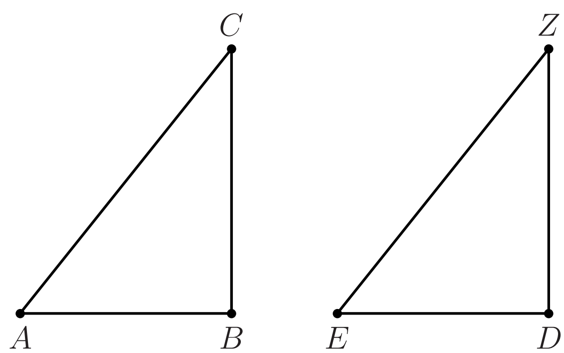

Figura 11

Si aplicamos el triángulo ABC sobre el triángulo DEZ, de tal manera que el punto A quede sobre el punto E, y el lado AC sobre el lado EZ, también se aplicará el punto C sobre el Z, pues los lados AC y EZ son iguales. De manera similar, al aplicar el lado BC sobre DZ, el punto B se aplicará sobre el punto D, además por que los ángulos BCA y DZE son iguales.

En consecuencia, se aplicará la base AB sobre la base ED y serán iguales, pues si no fuera así, dos rectas comprenderían un espacio, dado que los puntos A y B ya estaban aplicados sobre los puntos E y D respectivamente, y esto es imposible. Por lo tanto todo el triángulo ABC se aplicará sobre todo el triángulo EDZ y será igual a éste, como se quería demostrar.

En este punto ya no hay nada que demostrar, sólo enunciar las nociones comunes, postulados y definiciones necesarias para nuestros propósitos:

Noción Común 1: *Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.*

Noción Común 2: *Si a cosas iguales se agregan cosas iguales, los totales son iguales.*

Noción Común 4: *Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales, los totales son desiguales.*

Postulado 1: *Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.*

Postulado 5: *Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos.*

Definición 10: *Si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos contiguos iguales, cada uno de ellos es recto, y la recta se llama perpendicular a aquella sobre la cual se trazó.*

Es posible que no necesitemos sino algunas definiciones, y algunos de los postulados o nociones comunes, lo que nos permitiría construir una subteoría de la geometría euclidiana.

Ahora debemos hacer el mismo procedimiento con cada una de las ramas del árbol, para extraer las proposiciones deben ser incluidas, esperando que haya repeticiones y que no sean todas las que aparecen en los Elementos.

La tarea ahora es hacer el camino en reversa, establecer una línea de trabajo para seguir con los estudiantes, hasta llegar la demostración de la proposición XII-2.

Una propuesta es:

1. *Definiciones libro I*
2. *Postulados*
3. *Nociones Comunes*
4. *Proposición I - 1*
5. *Proposición I - 2*
6. *Proposición I - 3*
7. *Proposición I - 4*
8. *Proposición I - 5*
9. *Proposición I - 7*
10. *Proposición I - 8*
11. *Proposición I - 9*
12. *Proposición I - 10*
13. *Proposición I - 13*
14. *Proposición I - 15*
15. *Proposición I - 16*
16. *Proposición I - 17*
17. *Proposición I - 22*
18. *Proposición I - 23*
19. *Proposición I - 26*
20. *Proposición I - 27*
21. *Proposición I - 28*
22. *Proposición I - 29*
23. *Proposición I - 31*
24. *Proposición I - 32*
25. *Proposición I - 33*
26. *Proposición I - 34*
27. *Proposición I - 35*
28. *Proposición I - 36*
29. *Proposición I - 37*
30. *Proposición I - 38*
31. *Proposición I - 41*
32. *Proposición III - 20*
33. *Proposición III - 21*
34. *Proposición III - 22*
35. *Proposición III - 31*
36. *Definición 4 - Libro V*
37. *Definición 5 - Libro V*
38. *Definición 9 - Libro V*
39. *Proposición V - 1*
40. *Proposición V - 7*
41. *Proposición V - 9*
42. *Proposición V - 12*
43. *Proposición V - 13*
44. *Proposición V - 14*
45. *Proposición V - 15*
46. *Proposición V - 16*
47. *Definición 1 - Libro VI*
48. *Definición 2 - Libro VI*

49. *Proposición VI - 1*
50. *Proposición VI - 2*
51. *Proposición VI - 4*
52. *Proposición VI - 6*
53. *Proposición VI - 11*
54. *Proposición VI - 15*
55. *Proposición VI - 19*
56. *Proposición VI - 20*
57. *Proposición X - 1*
58. *Proposición XII - 1*
59. *Proposición XII - 2*

Con lo que nos hemos "ahorrado"20 de las 48 proposiciones del libro I, todo el libro II, 33 de las 37 proposiciones del libro III, todo el libro IV, 17 de las 25 proposiciones del libro V, 25 de las 33 del libro VI, todos los libros VII, VIII, IX, todas, menos una proposición del libro X, y el libro XI completo. Pero hemos construido una secuencia que permite explicar completamente la relación entre el área del círculo y su diámetro.

Bibliografía

[1] T. Heath, (1956) *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol. 1, 2 y 3. Dover Publications. New York.

[2] F. Vera, (1970) *Científicos Griegos*, Aguilar S. A. Ediciones, Madrid.