

MODOS DE ACTUACIÓN E INTERACCIÓN Y GENERACIÓN DE OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Ways of acting and interacting, and generation of mathematical learning opportunities

Miquel Ferrer, Josep M. Fortuny, Núria Planas, Kaouthar Boukafri

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Se estudian modos de actuación docente y de interacción en una clase de secundaria que generan oportunidades de aprendizaje matemático en los estudiantes. Obtenemos datos de la discusión en gran grupo de un problema de semejanza gestionada por una profesora con alumnos de 14 y 15 años. Se caracterizan episodios de la discusión y se presentan efectos de las acciones respecto al aprendizaje promovible. Los resultados revelan un modo de actuación con equilibrio instrumental y completitud discursiva, simultáneo a un modo de interacción participativo-bilateral. Del análisis de estos modos se infiere una oportunidad de aprendizaje conceptual.

Palabras clave: *modos de actuación, modos de interacción, oportunidades de aprendizaje matemático, discusión en gran grupo, problema de semejanza.*

Abstract

We examine ways of acting and interacting in a secondary classroom, which generate mathematical learning opportunities on the part of the students. Our data come from whole group discussion of a similarity problem managed by a teacher with 14 and 15-year-old students. We determine episodes for the discussion, as well as the effect of actions according to the knowledge that can be promoted. Our results reveal an instrumentally-balanced and discursively-complete way of acting, along with a participative-bilateral way of interacting on the part of the teacher. From the analysis of these ways, a conceptual learning opportunity is inferred.

Keywords: *ways of acting, ways of interacting, mathematical learning opportunities, whole group discussion, similarity problem.*

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones en educación matemática se centran en el estudio de la interacción como un facilitador en la generación de conocimiento durante el trabajo en parejas (Sfard y Kieran, 2001). Sin embargo, poco se conoce aún sobre la construcción de conocimiento matemático durante las discusiones en gran grupo. En Ferrer, Fortuny y Morera (2013) se evidenció la importancia de preparar de forma eficiente las discusiones en gran grupo para que fuesen matemáticamente productivas para los alumnos; se determinaron tres estilos locales de enseñanza, en función de la gestión realizada por diversos profesores de secundaria y los modos de interacción detectados en la discusión de un problema de semejanza. Además se reflexionó sobre la necesidad de estudiar con más detalle las situaciones de interacción que se habían producido en el trabajo en gran grupo al ser estas susceptibles de favorecer el progreso matemático de los estudiantes.

Los objetivos del presente estudio experimental, centrado en un caso de profesor y con contenidos curriculares de semejanza, son los siguientes: (a) identificar el modo de actuación docente en la gestión de una discusión matemática en gran grupo, (b) identificar el modo de interacción en la gestión de la sesión y (c) determinar oportunidades de aprendizaje derivadas de la actividad matemática. Mientras que los dos primeros objetivos están orientados primordialmente a la Ferrer, M., Fortuny, J. M., Plana, N., Boukafri, K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 297-305). Salamanca: SEIEM.

construcción de conocimiento sobre la actividad docente del profesor, el tercer objetivo busca la construcción de conocimiento sobre cómo dicha actividad se relaciona con unas determinadas circunstancias para el desarrollo del aprendizaje de los alumnos.

MARCO TEÓRICO

Analizamos los episodios de una discusión en gran grupo a través de dos dimensiones: la instrumental, centrada en los artefactos y su uso en clase, y la discursiva, fundamentada en los modos de interacción que ayudan a entender el desarrollo genérico de los episodios y las características particulares que se producen en ellos.

Dimensiones instrumental y discursiva

En la dimensión instrumental consideramos seis tipos de orquestación: *explorar el artefacto*, *explicar a través del artefacto*, *enlazar artefactos*, *discutir el artefacto*, *descubrir a través del artefacto* y *experimentar el instrumento*. Los tres primeros tipos se centran en las acciones del profesor y los tres últimos en las de los alumnos. Todos ellos están inspirados en los tipos iniciales diseñados por Drijvers y otros (2010), aunque los hemos generalizado para situaciones de enseñanza en las que el diseño e implementación de las discusiones en gran grupo no contiene, necesariamente, un uso intensivo de artefactos tecnológicos. Para una descripción detallada de los seis tipos de orquestación, consultar Morera, Planas y Fortuny (2013).

Estructuramos la dimensión discursiva según los estadios de la discusión de un problema, los cuales se presentan como una secuencia de pautas de actuación que ilustran el proceso de gestionar una discusión en gran grupo hacia la resolución de un problema matemático (Morera, 2013). Los estadios se organizan según un desarrollo sistemático del proceso de resolución y se agrupan en fases: *situación del problema*, *presentación de una solución*, *estudio de estrategias para resolver o argumentar*, *estudio de casos particulares y extremos*, *contraste entre soluciones*, *conexiones con otras situaciones*, *generalización y conceptualización*, y *reflexión sobre progreso matemático*.

De acuerdo con las dimensiones instrumental y discursiva, interpretamos los episodios como sistemas de acciones que han tenido lugar en un estadio específico de la discusión en gran grupo de un problema, con dominio de un tipo específico de orquestación. Nuestro interés recae en los efectos relativos al aprendizaje de dichas acciones, que son susceptibles de fomentar conocimiento matemático procedimental básico y/o conceptual (Niss y Højgaard, 2011). Las acciones se vinculan al participante que las realiza, ya sea un estudiante o el profesor, con atención al papel que ejercen en la organización de la participación matemática durante la discusión.

Como una parte significativa de este informe se centra en la construcción de conocimiento sobre la actividad docente del profesor, adaptamos la clasificación de Schoenfeld (2011) para agrupar las acciones del profesor en tres tipos de acción: gestión, discusión y contenido matemático, según se refieran a la organización de la clase y de sus participantes; al desarrollo y discusión de las tareas matemáticas; o a los contenidos matemáticos de las tareas y a la disposición del profesor para escuchar a los alumnos y darse cuenta de aquellos aspectos que comprenden mejor o peor.

Oportunidades de aprendizaje matemático

Tomamos las oportunidades de aprendizaje matemático como las relaciones entre contenidos de conocimiento matemático, procedimentales y conceptuales, y acciones que potencialmente contribuyen a facilitar el aprendizaje de dichos contenidos en los alumnos (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014). Estas oportunidades son identificables mediante el estudio de acciones generadas por diversas situaciones desarrolladas en los procesos de interacción de una clase de matemáticas. La interacción social producida en las discusiones en grupo, en términos de secuencias de acciones agrupadas, constituye un elemento decisivo en el logro del aprendizaje de las matemáticas (Yackel, Cobb y Wood, 1991).

Diversos tipos de acción y diversos tipos de orquestación pueden estar en el origen de la aparición y del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático. Por ello es razonable plantear el estudio de las oportunidades con base en el análisis de situaciones de enseñanza centradas en la gestión de discusiones en gran grupo; y que este análisis a su vez esté centrado en el análisis de las acciones con mayor peso en la delimitación del proceso de resolución de la tarea matemática.

METODOLOGÍA

Bajo el enfoque de los diseños experimentales, hemos elaborado una secuencia instructiva con problemas de semejanza dirigida a estudiantes de 14 y 15 años. La secuencia pretende que los alumnos establezcan relaciones entre ángulos, longitudes, perímetros y áreas de figuras semejantes de dos dimensiones y creen argumentos orientados a la resolución de problemas de congruencia y semejanza. Para este informe hemos seleccionado una de las tareas matemáticas y el caso de una profesora, Sara, con ocho años de experiencia docente en entornos socioculturales medio-altos.

Descripción de la tarea matemática

La tarea elegida (Fig. 1) inicia una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) sobre el tema de semejanza que pretende contribuir a desarrollar en los estudiantes el concepto de proporcionalidad geométrica, relacionado con las nociones de forma y semejanza (Gairín y Oller, 2012). El planteamiento de la tarea induce a construir una transformación geométrica que convierta un triángulo original en otro con el doble de perímetro y lo traslade en el plano. Así se inicia a los estudiantes en el concepto de homotecia de razón positiva, como una transformación geométrica que combina una ampliación y una traslación.

¿Cómo transformarías el polígono 1 de la izquierda para conseguir el 2 de la derecha? ¿Y el polígono 2 para conseguir el 1? Explica ambas respuestas con detalle.

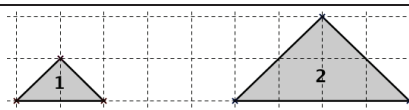


Figura 1: Enunciado de la tarea

Ciclo de trabajo en clase, datos y métodos

La dinámica de trabajo es colaborativa y comprende dos sesiones de clase. En la primera sesión los estudiantes trabajan por parejas, con lápiz y papel, y resuelven, entre otras, la tarea descrita. En la segunda sesión la profesora dirige una discusión en gran grupo, que gestiona según su criterio profesional. Luego se pide a los alumnos que reflexionen individualmente sobre la tarea y que incluyan en su protocolo escrito los elementos tratados en la discusión que no se hayan considerado en la resolución por parejas. Aunque sin dejar de lado las demás fases del ciclo de trabajo, en este informe nos centramos en la discusión en gran grupo.

El primer autor estuvo presente en las sesiones de clase, aunque no intervino directamente en su desarrollo. Por otra parte, la implementación de la discusión se pensó a modo de posibilitar el uso de artefactos, tanto tecnológicos (p.ej., GeoGebra) como tradicionales (p.ej., pizarra ordinaria), y la profesora utilizó ambos tipos de artefacto para gestionar la discusión en gran grupo.

Las intervenciones de todos los participantes en la discusión se registraron con tres videocámaras y se transcribieron para el análisis. Videos y transcripciones se analizaron con el fin de: (a) dividir las discusiones en grupo en episodios que mostraran orquestaciones y acciones significativas; (b) determinar modos de interacción entre participantes susceptibles de generar oportunidades de aprendizaje en los alumnos. Así se identificaron aspectos básicos de los modos de actuación docente y de interacción y se lograron detectar oportunidades de aprendizaje matemático.

EJEMPLIFICACIÓN DEL ANÁLISIS Y RESULTADOS

Entendemos la noción de episodio como el producto de una estrategia para fragmentar interacciones largas en unidades más manejables y con contenido suficiente desde la perspectiva de los objetivos

marcados en la investigación. Para ejemplificar el modo de actuación de la profesora y su modo de interacción, en este informe mostramos un fragmento del segundo y tercer episodios de la discusión en grupo, los cuales caracterizamos según un tipo de orquestación (dimensión instrumental) y un estadio de la discusión del problema (dimensión discursiva).

Modo de actuación: equilibrio instrumental y completitud discursiva

En el siguiente fragmento del segundo episodio, la discusión se produce en base al protocolo escrito de resolución del Alumno 1 y a la información que proporcionan dos artefactos: pizarra ordinaria y GeoGebra. Por este motivo, el tipo de orquestación que asignamos es *conectar artefactos*. Como Sara invita a un estudiante a que exponga su solución de la tarea, obtenida colaborativamente con el Alumno 2, el estadio de la discusión es *presentación de una solución*.

Sara: ¿Tú [a Alumno 1] cómo lo has hecho?

Alumno 1: Nosotros lo que hicimos fue que, como la base [del triángulo pequeño] era 2 [cuadrados], la ampliamos el doble y mantuvimos los ángulos. Entonces, si prolongamos el doble todos los lados, en el punto de cruce se forma el nuevo triángulo.

Sara: De acuerdo. Por tanto, tú tenías un triángulo así [representa en la pizarra un triángulo parecido al original] y, luego, lo duplicaste.

Alumno 1: Sí, exacto.

Sara: Claro, pero entonces ¿dónde lo construisteis?

Alumno 2: Lo representamos al lado [del triángulo original].

Sara: Sí, de acuerdo, pero ¿qué órdenes debemos darle al GeoGebra, por ejemplo, para que nos lo transforme en este que está pintado aquí al lado [señala sobre la pantalla del proyector el triángulo grande de la derecha del enunciado]?

Alumno 3: Podemos decirle que duplique los lados.

Sara: De acuerdo, que duplique los lados y mantenga los ángulos. Por tanto, hacemos una ampliación de razón 2.

Alumno 3: Y nos lo situará encima a partir de un vértice, ¿verdad?

Sara: ¿Estás seguro? ¿Cómo puedes saberlo? ¡Pensad un momento! El problema está en que debemos escribir en el GeoGebra toda la información y aún no sabemos cómo decírselo.

En el tercer episodio Sara se apoya en el programa de geometría dinámica para que los alumnos descubran la necesidad de combinar una ampliación y una traslación, tal como se lee en la transcripción que sigue. Así, el tipo de orquestación que asignamos es *descubrir a través del artefacto*. Al examinar la estrategia a seguir con el programa para construir esta transformación, el estadio de la discusión es *estudio de estrategias para resolver o argumentar*.

Sara: El otro día, cuando resolvíais problemas de isometrías, ¿descubristeis alguna herramienta en el GeoGebra que penséis que podría construir un triángulo el doble de grande?

Alumno 3: Homotecia desde un punto por un factor de escala.

Sara: Sí, de acuerdo, la herramienta para representar homotecias. Ahora bien, ¿cuál es el factor de escala si queremos pasar de aquí [triángulo 1] a aquí [triángulo 2]?

Alumno 4: Dos.

Sara: ¿Pero respecto de qué punto le digo [al programa] que haga la construcción?

Alumno 4: Respecto de algún vértice. Por ejemplo, el del extremo de la izquierda.

Sara: ¿Quieres decir este vértice de aquí [señala sobre la pantalla del proyector el vértice situado más a la izquierda del triángulo 1]?

Alumno 4: Sí, exacto, este punto. [Sara realiza la construcción con el programa]

Sara: Ahora fijaos dónde lo ha situado. ¿Qué tendríamos que hacer para que [el nuevo triángulo] quedase sobre del azul [triángulo 2]?

Alumno 1: Un vector desde un vértice [del nuevo triángulo construido] hasta su homólogo.

Sara: De acuerdo. Pues hago un vector, por ejemplo, desde este vértice [el situado más arriba] hasta su homólogo [el correspondiente vértice del triángulo 2]. Ahora bien, fijaros que habéis necesitado dos transformaciones: primero habéis aplicado una ampliación y, después, una traslación.

De forma análoga caracterizamos los demás episodios de la discusión (de e_1 a e_{11} con el subíndice i para señalar distribución cronológica) y los representamos en una matriz de dos dimensiones (instrumental y discursiva) que sugiere un sistema coordenado (Fig. 2). La interpretación de la matriz indica un modo de actuación con equilibrio instrumental, ya que cinco de once episodios corresponden a los tres primeros tipos de orquestación (*explorar el artefacto*, *explicar a través del artefacto* y *conectar artefactos*) y los seis restantes a los tres últimos (*discutir el artefacto*, *descubrir a través del artefacto* y *experimentar el instrumento*). Hay, además, completitud discursiva porque la discusión en gran grupo transcurre por la mayoría de estadios y, además, se avanza con bastante orden de los momentos iniciales de la discusión (*situación del problema* y *presentación de una solución*) a los más avanzados (*conexiones con otras situaciones*).

	<i>Estadio de la discusión</i>							
<i>Tipo de orquestación</i>	Situación del problema	Presentación de una solución	Estudio de estrategias para resolver o argumentar	Estudio de casos particulares o extremos	Contraste entre soluciones	Conexiones con otras situaciones	Generalización y conceptualización	Reflexión sobre progreso matemático
Explorar el artefacto								
Explicar a través del artefacto	e_1		e_8			e_6, e_{11}		
Enlazar artefactos		e_2						
Discutir el artefacto								
Descubrir a través del artefacto			e_3, e_4, e_9		e_{10}			
Experimentar el instrumento	e_7	e_5						

Figura 2: Caracterización de los episodios de la discusión en grupo

Modo de interacción: participativo-bilateral

Al principio del segundo episodio Sara invita a la participación y el Alumno 1 comparte su solución con el grupo. El estudiante realiza una exposición de evidencia empírica y concluye que, de forma colaborativa con el Alumno 2, duplicaron todos los lados del triángulo original, aunque no precisa en qué posición lo situaron. La profesora valida la afirmación y el estudiante asiente. Entonces, Sara realiza una petición de explicación para que el alumno detalle la posición exacta donde representó la nueva figura. El Alumno 2 expone sin argumentar que hicieron la construcción al lado del triángulo original, sin proporcionar detalles. La profesora detecta que ambos estudiantes no han respondido a la pregunta del enunciado con exactitud, ya que solo han cambiado las dimensiones del triángulo original y no han realizado una traslación que lo lleve encima del nuevo polígono. Por este motivo, Sara se apoya en GeoGebra e introduce una petición de explicación, preguntando por las órdenes que deberían dar al software para conseguir la transformación deseada. El Alumno 3

expone sin argumentar que basta con dar la orden de duplicar todos los lados del triángulo y la profesora formaliza la afirmación matizando que se trata de una ampliación de razón 2. Este mismo alumno realiza una petición de aclaración dando a entender que el uso del programa de geometría dinámica lo situaría encima del original, partiendo de un vértice arbitrario. Finalmente, la profesora formula una nueva pregunta que invita a los estudiantes a la reflexión con el propósito de que se planteen con mayor detalle esta última cuestión.

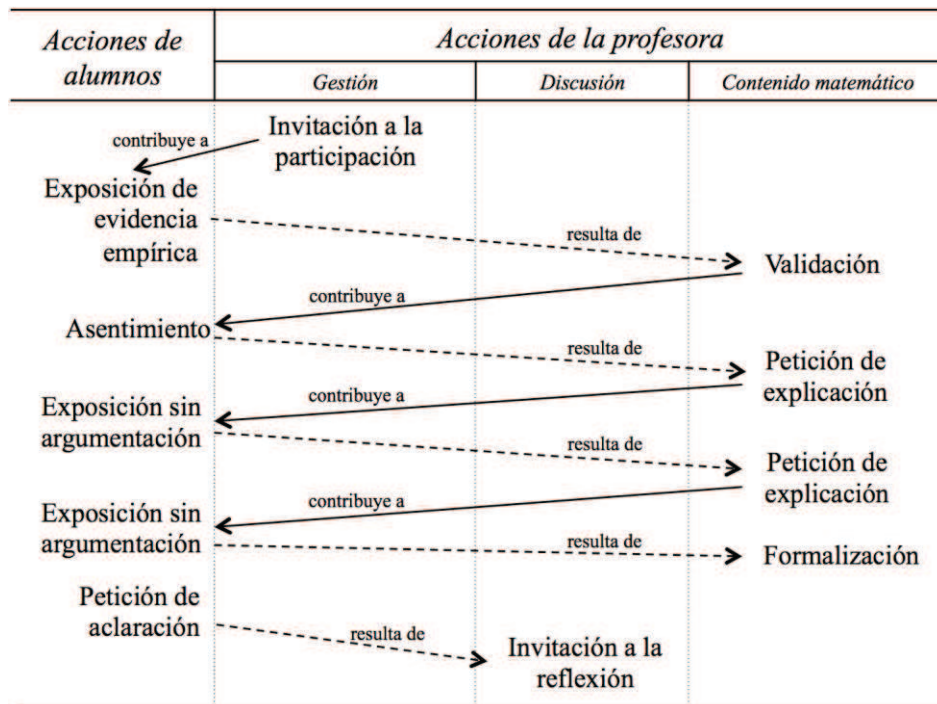


Figura 3: Representación de acciones del segundo episodio

La discusión en grupo sigue con el tercer episodio. Sara invita a la reflexión y pregunta a los alumnos por alguna herramienta del programa con la que construir un triángulo el doble de grande que el original. El Alumno 3 expone sin argumentar que podrían emplear la herramienta ‘homotecia desde un punto por un factor de escala’ y la profesora valida esta afirmación. Luego realiza una petición de comprobación en la que pregunta al grupo por el valor numérico del factor de escala. El Alumno 4 observa la evidencia empírica de que el factor debe ser 2 y Sara formula una petición de formalización para que indique el punto a partir del cual se debe aplicar la transformación. El alumno formaliza su exposición anterior e indica que es suficiente considerar un vértice cualquiera, por ejemplo el situado más a la izquierda del triángulo original. Sara, que quiere estar segura de la respuesta del alumno antes de recurrir a GeoGebra, introduce una nueva petición de comprobación para que el estudiante compruebe su afirmación. Entonces Sara aplica una homotecia de centro el vértice en cuestión y razón 2 e invita al grupo a la reflexión, preguntando por la posición del nuevo triángulo construido. El Alumno 1 establece una conjetura en la que menciona la necesidad de utilizar un vector para desplazar el nuevo triángulo hasta su posición correcta. Finalmente, la profesora valida la conjetura del estudiante y complementa la explicación.

Las Figuras 3 y 4 sugieren que el modo dominante de interacción promovido por Sara es participativo-bilateral. La secuencia de acciones presenta series encadenadas de intervenciones entre profesora y alumnos sin interacción directa entre estudiantes, tal como se observa no sólo en las transcripciones sino también en la distribución de las flechas utilizadas en ambas figuras. Este modo de interacción se reproduce en los demás episodios de la discusión en gran grupo. También observamos que la profesora procura que los alumnos descubran por sí mismos los hechos

matemáticos, evita realizar explicaciones extensas y, en la medida de lo posible, gestiona la discusión a través de preguntas, elaborando su discurso con base en respuestas de alumnos.

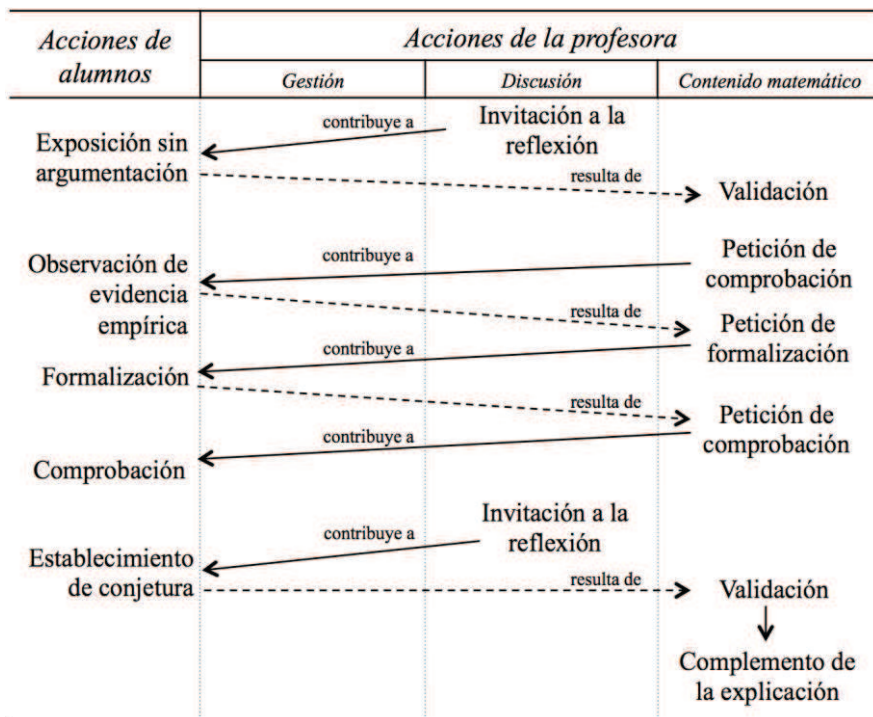


Figura 4: Representación de acciones del tercer episodio

Una oportunidad de aprendizaje conceptual

Del análisis de los episodios ejemplificados en este informe se desprenden diversas acciones de los alumnos relacionadas con la promoción de conocimiento procedimental en torno a procesos matemáticos y afirmaciones sobre hechos percibidos durante la discusión (p.ej., exposiciones sin argumentación). Hay también otras acciones orientadas a la promoción de conocimiento conceptual en torno a observaciones de evidencias empíricas y razonamientos de los alumnos sobre conceptos matemáticos (p.ej., noción de proporcionalidad).

Si atendemos a las acciones de la profesora, vemos que algunas llevan a peticiones de explicación y verificación de métodos matemáticos, por lo que su efecto en el aprendizaje puede fomentar conocimiento procedimental (p.ej., formalizaciones y comprobaciones). Estas acciones también pueden estar relacionadas con el trabajo de contenidos matemáticos específicos (p.ej., nociones de razón, proporción y homotecia). Su efecto en el aprendizaje puede generar conocimiento conceptual mediante la invitación a reflexionar sobre nociones matemáticas, o bien la complementación de explicaciones respecto de una cuestión concreta. En el párrafo siguiente ilustramos una oportunidad de aprendizaje conceptual generada, de acuerdo con nuestro análisis, a raíz de los modos de actuación y de interacción activados por la profesora en su gestión de la tarea.

La discusión en gran grupo origina la oportunidad conceptual que llamamos ‘reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una traslación’. Las peticiones de explicación realizadas por Sara en el segundo episodio propician que los alumnos observen la necesidad de introducir una transformación adicional a la ampliación de razón 2 que traslade la nueva figura construida. La cuestión se desarrolla en el tercer episodio, cuando Sara invita a la reflexión y pregunta por el tipo de transformación que se debería aplicar al nuevo triángulo ampliado para desplazarlo. Un alumno menciona la necesidad de emplear un vector, lo cual alude al tema de isometrías. La validación de la profesora y la breve explicación posterior abren la puerta a

introducir las homotecias en clase, presentadas como las transformaciones geométricas que combinan una ampliación o reducción y una traslación, simetría o rotación.

CONCLUSIONES

Hemos presentado un análisis instrumental y discursivo de episodios de clase con el fin de identificar los modos dominantes de actuación e interacción de la profesora Sara cuando gestiona la discusión en gran grupo de una tarea de semejanza, que toma en consideración una trayectoria hipotética de aprendizaje en la actividad de enseñanza. Por otra parte, hemos ejemplificado una oportunidad de aprendizaje conceptual que se infiere del análisis de los modos de actuación e interacción. La gestión de la tarea a cargo de la profesora, cuya actuación docente conlleva equilibrio instrumental y completitud discursiva, y cuyo modo de interacción es participativo-bilateral, han permitido detectar la oportunidad de aprendizaje caracterizada en este informe.

Hay oportunidades de aprendizaje que en esta ocasión no han emergido, debido a la gestión específica de la profesora y al contenido curricular tratado. En particular, se ha relacionado la actuación docente y la interacción en clase con la detección de una oportunidad de aprendizaje, sin atender a todos los aspectos analizables derivados de la gestión de la enseñanza. Por ejemplo, el análisis de la actuación de Sara indica que puede no haber explotado todas las posibilidades de la tarea para reflexionar sobre los contenidos matemáticos, ni para profundizar en una práctica de argumentación que vaya más allá de la elaboración de conjeturas propias del tema de semejanza.

En futuros trabajos convendrá explorar si los modos de actuación e interacción ilustrados para el caso de Sara son específicos de la gestión de una tarea concreta, o bien aluden a un modo dominante que se sostiene en otras situaciones de enseñanza y aprendizaje. Además prevemos que se requerirá la elaboración de más casos de profesor para seguir investigando en la dirección de obtener evidencias sobre el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático. Esto trasciende las posibilidades de un único trabajo y precisa los esfuerzos de todo un equipo.

Agradecimientos

La investigación que se detalla en este informe está financiada por los Proyectos EDU2011-23240 y EDU2012-31464, y por las becas FPI BES-2012-053575 y BES-2013-063859, del Ministerio de Economía y Competitividad. Los autores son miembros del equipo GIPEAM - Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática, con referencia 2014 SGR 972 de la Generalitat de Catalunya.

Referencias

- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213-234.
- Ferrer, M., Fortuny, J. M. y Morera, L. (2013). Identificación de estilos de enseñanza comparando discusiones en gran grupo de un problema de semejanza. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 263-274). Bilbao: SEIEM.
- Ferrer, M., Fortuny, J. M. y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).
- Gairín, J. M. y Oller, A. M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249 - 259). Jaén: SEIEM.
- Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra: UAB.

- Morera, L., Planas, N. y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research of Mathematics Education* (pp. 1506-1515). Antalya, Turquía: ERME.
- Niss, M. A. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde Universitet, IMFUFA.
- Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Nueva York: Taylor & Francis.
- Sfard, A. y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), 42-76.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(2), 114-145.
- Yackel, E., Cobb, P. y Wood, T. (1991) Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5), 390-408.