# UNIDADES ELEMENTALES EN PROBLEMAS DE LUGAR GEOMÉTRICO EN LOS CUADROS GEOMÉTRICO Y ALGEBRAICO

## Basic unit of meaning in locus problems in geometric and algebraic frameset

Cecilia Gaita, Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

**Resumen**

*Este artículo forma parte de una investigación más amplia que pretende brindar medios para justificar la enseñanza de la geometría analítica a partir de las limitaciones que presentan las técnicas de construcción con regla y compás al abordar diversas situaciones en contextos geométricos. Con el objetivo de establecer si existe equivalencia entre procedimientos básicos empleados en tareas sobre lugar geométrico en los marcos geométrico y algebraico, se definen unidades elementales de información. Con los elementos teóricos descritos se identifican aquellos contextos en los que las actividades resultarán más complejas para los estudiantes. Finalmente, se darán recomendaciones para la enseñanza de la geometría analítica.*

**Palabras clave**: *geometría analítica, geometría sintética, lugar geométrico, juego de marcos, unidad elemental*.

**Abstract**

*This article is part of a broader research aims to provide means to justify the teaching of analytic geometry from the limitations of the techniques of construction with ruler and compass to address various situations in geometric contexts. In order to establish whether there is equivalence between basic procedures used in locus tasks on geometric and algebraic in frames, elementary information units are defined. With the theoretical elements described contexts in which activities become more complex for students are identified. We will give suggestions for teaching analytic geometry.*

**Keywords**: *analytic geometry, synthetic geometry, locus problems, frameset, elementary unit.*

## INTRODUCCIÓN

La organización actual de la geometría analítica en los textos didácticos empleados en el primer año de universidad de estudiantes de carreras de ingeniería y arquitectura responde básicamente a dos orientaciones. Una asociada al álgebra lineal, cuyo origen se encuentra en la concepción moderna de geometría en función del conjunto de invariantes de grupos que operan sobre diversos conjuntos, idea desarrollada por Klein (Bouvier, 1984, p. 373), presente todavía en los textos (Alsina y Trillas, 1992), y otra caracterizada por abordar la geometría analítica como un requisito para el tema de funciones, concepto fundamental del cálculo diferencial e integral, y que es característica de diversos libros de cálculo (Larson, Hostetler y Edwards, 1995; Purcell y Varberg, 2007; Stewart, Redlin y Watson, 2007) en donde se enfatiza en el estudio de propiedades de curvas a partir de sus expresiones algebraicas .

Por otro lado, en relación a la razón de ser de la geometría analítica, luego de una revisión de textos didácticos sobre este tópico se ha encontrado que su introducción se realiza sin una problematización previa; en particular, se observa que no se establecen conexiones explícitas entre la geometría analítica y la geometría de las construcciones con regla y compás, denominada geometría sintética. Sin embargo, es posible relacionar la geometría sintética y la analítica, tal como se muestra en el trabajo de Descartes cuya motivación original estuvo en resolver problemas de contextos sintéticos, siendo su aporte fundamental el empleo del álgebra como herramienta

Gaita, C., Ortega, T. (2014). Unidades elementales en problemas de lugar geométrico en los cuadros geométrico y algebraico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 317-326). Salamanca: SEIEM.

alternativa a la que brindan las construcciones exactas con regla y compás, (Descartes 1954). Por ello, como señala Sessa (2005), queda pendiente entender cómo se puede poner en juego en la enseñanza de la geometría, la relación entre una perspectiva sintética y otra cartesiana.

Teniendo en cuenta esos antecedentes, se propone un trabajo de investigación más amplio en el que se muestre que es posible encontrar situaciones que justifiquen el paso de la geometría sintética a la geometría analítica, adaptando algunos problemas sobre construcciones exactas de modo que puedan ser abordados inicialmente desde el marco geométrico y luego, con una transformación adecuada del enunciado, puedan serlo sólo desde el marco algebraico. En particular, en este documento se busca establecer una relación entre procedimientos analíticos y sintéticos a través de unidades elementales de información. Se considera positiva la búsqueda de dichas relaciones ya que el uso de distintos elementos y procedimientos favorecerán los aprendizajes matemáticos.

## MARCO TEÓRICO

Para analizar la interacción de los estudiantes con las situaciones propuestas en este trabajo se considerará la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), Duval (2006a). Dicha teoría se basa en que para comprender lo que ocurre en el aprendizaje de las matemáticas se requiere de investigaciones sobre los procesos cognitivos propios del pensamiento matemático. (p.144).

Según Duval (2006b), el principal problema de la comprensión en matemáticas, radica en el conflicto cognitivo que se genera en todos los niveles curriculares cuando se plantea la pregunta: ¿Cómo podrá distinguir el estudiante el objeto representado de la representación semiótica empleada si no puede acceder al objeto matemático sin la representación semiótica? Ante esta interrogante, la TRRS postula que en la actividad matemática se deben usar necesariamente representaciones semióticas, ya que los objetos de conocimiento matemático no son accesibles físicamente. Se entiende por representación semiótica a una representación constituida por el empleo de signos, ya sea una figura geométrica, un enunciado natural, una fórmula algebraica, una gráfica, etc. Así, una representación semiótica está subordinada a una representación mental.

Por otro lado, la búsqueda de relaciones entre procedimientos de solución de un mismo problema, desde distintos contextos, ha sido valorado positivamente por Douady (1984), quien señala que para que las concepciones de los estudiantes evolucionen, se hace necesario un juego de marcos. Douady, citada en Balacheff (2005, p.187), define lo que entiende por marco de la siguiente manera:

> Un marco se constituye de objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre esos objetos, de las formulaciones eventualmente diferentes y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Esas imágenes juegan un rol esencial en el funcionamiento como herramientas de los objetos del marco. Dos marcos pueden contener los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada.

Se presenta como uno de los postulados fundamentales de esta teoría el que todo concepto matemático está asociado a varios marcos y que dichos marcos se pueden relacionar a través de sistemas de representación. Así, se plantea escoger unos problemas para introducir y suscitar el funcionamiento de los conocimientos que deben intervenir en al menos dos marcos.

De otro lado, se afirma que marcos diferentes no coinciden ya que no movilizan ni las mismas propiedades ni los mismos teoremas y, además, porque existen diferencias entre el valor ostensivo de los sistemas de representación que producen, (Balacheff, 2005, p.185).

Se propone también privilegiar aquellos problemas en los cuales el error en la correspondencia genere desequilibrios que deban de ser compensados, (Douady, 1984, p.18). Esta caracterización hace del juego de marcos un método efectivo para la construcción de situaciones pertinentes que favorezcan el aprendizaje.

Así, mientras Douady propone el juego de marcos como medio para hacer evolucionar las concepciones de los estudiantes en matemáticas, Balacheff ubica a los registros como el puente que permite establecer relaciones entre marco y concepción.

## PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Considerando que la evolución histórica de la geometría analítica está muy relacionada con la noción de lugar geométrico, en el presente trabajo de investigación se propone identificar problemas que involucren este tema desde los marcos geométrico y algebraico, siendo las áreas del conocimiento matemático a los que este conocimiento está asociado la geometría sintética y la geometría analítica, respectivamente. Y, dado que la caracterización de un marco pasa necesariamente por la de al menos un sistema de representación semiótico, se debe tener en cuenta que el desarrollo de problemas de geometría sintética requiere del empleo de representaciones figurales realizadas con regla y compás, mientras que en el marco algebraico las representaciones que se emplean para resolver los problemas son fundamentalmente las representaciones algebraicas y las gráficas.

En este trabajo interesa convertir el enunciado de un problema dado en el contexto analítico a un problema equivalente en el contexto sintético, y viceversa, así como comparar los procedimientos de solución seguidos en ambos contextos, con la finalidad de identificar cual es más complejo. A partir de ese análisis, se buscará que los estudiantes establezcan relaciones entre las distintas representaciones empleadas y entre los resultados obtenidos en uno y otro contexto, actividad considerada como no trivial.

## PASOS A SEGUIR

Para comprender la complejidad cognitiva de los procedimientos involucrados en las tareas propuestas en geometría sintética y en geometría analítica, se plantea identificar el tipo de transformación que se lleva a cabo en cada paso que se sigue en la solución, según que se trate de un tratamiento o una conversión. Luego, considerando la cantidad de pasos que la solución de un determinado problema requiera, así como la naturaleza de los mismos, se podrán prever los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrenten a dichas tareas.

Para describir los procedimientos que se llevan a cabo al abordar los problemas se definen unidades elementales de información, en adelante unidades elementales (UE). Se establecen asociaciones entre unidades elementales en los marcos geométrico y algebraico, de manera similar a como hizo Puerta (2009) al relacionar unidades elementales en el marco algebraico y en el marco gráfico para problemas de interpolación y extrapolación. Las unidades elementales están asociadas a sistemas de representación semiótica distintos, siendo en este caso los principales sistemas de representación el figural y el algebraico.

En la tabla 1 se presentan las unidades elementales consideradas en el cuadro geométrico y sus respectivas unidades elementales en el cuadro algebraico.

Tabla 1. Asociación de unidades elementales del cuadro lugar geométrico correspondiente a los cuadros geométrico y algebraico

| Cuadro geométrico | Cuadro algebraico |
|---|---|
| Construir un punto sobre un objeto construido previamente | Asignar coordenadas a un punto que se encuentra sobre un objeto cuya ecuación se conoce/Resolver una ecuación lineal o cuadrática con una incógnita |
| Construir una recta conociendo dos puntos de paso/ Construir una recta conociendo un punto de paso y una dirección | Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso/ Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de un punto de paso y su pendiente. |

| | |
|---|---|
| Construir una circunferencia o un arco con centro y radio conocido. | Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio/ Determinar una expresión cuadrática en dos variables para referirse a una distancia entre puntos. |
| Construir puntos sobre un objeto dado. | Determinar una ecuación que relacione las coordenadas de un punto con los datos dados/Determinar las coordenadas de un punto en términos del menor número de variables |
| Construir puntos en la intersección de dos objetos construidos previamente. | Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales, o dos ecuaciones cuadráticas o una ecuación lineal y otra cuadrática, con dos incógnitas. |

Además, a algunas unidades elementales se les podrá asociar transformaciones en un mismo registro, como por ejemplo en la actividad *Resolver el siguiente sistema formado por las ecuaciones* $x^2+y^2=16$, y $(x\text{-}4)^2+(y\text{-}4)^2=0$, donde se deberán realizar transformaciones en el registro algebraico, obteniendo expresiones equivalentes, hasta obtener las soluciones $x=4$, $y=0$; $x=0$, $y=4$. Algunas transformaciones algebraicas resultarán triviales, como por ejemplo la que consisten en transponer términos en la ecuación $3x+4y=8x\text{-}2$ para obtener una ecuación de la forma $\text{-}5x+4y+2=0$. Sin embargo, habrá otras que no lo serán tanto, como por ejemplo aquella en las que se deba transformar la expresión $(x-5)^2+(y-6-\sqrt{3})^2+(x-3)^2+(y-6+\sqrt{3})^2=16$ en esta otra $(x-4)^2+(y-6)^2=4$ a partir de la cual se obtiene nueva información sobre la curva. Para llevar a cabo estas transformaciones se requieren nociones como ecuación equivalente, productos notables, propiedades de los números reales, entre otras.

A otros procedimientos se les asociará conversiones; tal es el caso de problemas cuyos enunciados haya sido dados en lengua natural y deban transformarse en construcciones con regla y compás o en un sistema de ecuaciones. En esos casos se habrá producido una conversión del registro lengua natural al registro figural o simbólico, respectivamente.

Para simplificar la descripción de las unidades elementales en problemas cuya solución involucra varios pasos, se hará referencia a las unidades elementales que fueron descritas en los procedimientos básicos de modo que éstos ya no se tendrán que describir nuevamente.

## EJEMPLOS

A continuación se presentan dos ejemplos correspondientes a problemas que pueden ser enunciados tanto en el marco geométrico como en el algebraico.

### Ejemplo 1: Determinación de la recta tangente

Según la solución propuesta en la tabla 2, es posible establecer relaciones entre las unidades elementales en los marcos geométrico y algebraico; como podrá observarse, las técnicas de solución en los contextos sintético y analítico resultarán igualmente eficientes.

Tabla 2. Unidades elementales presentes en la determinación de la recta tangente

| **Unidades elementales en el marco geométrico** | **Unidades elementales en el marco algebraico** |
|---|---|
| Enunciado: Construya la recta que pasa por el punto A y que es tangente a la circunferencia C dada inicialmente, considerando que A$\notin$C. | Enunciado: Determine la ecuación de la recta que contiene al punto $A$ y es tangente a la circunferencia $C$ cuya ecuación es dato, considerando que $A\notin C$. |

| **Solución propuesta:** | **Solución propuesta:** |
| --- | --- |
| Construir el segmento que une el centro *C* y el punto exterior *A*.<br>**[UE: Construir un segmento conociendo sus extremos].**<br>Construir el punto medio de dicho segmento, construyendo primero la mediatriz del segmento y luego la intersección de ésta y el segmento.<br>**[UE: Las que corresponden a la construcción de la mediatriz].**<br>Construir el punto de intersección de la mediatriz y el segmento *AC*.<br>**[UE: Construir puntos en la intersección de dos objetos]**<br>Construir la circunferencia con centro en el punto medio y diámetro la longitud del segmento construido en el paso anterior.<br>**[UE: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio].**<br>Identificar los puntos de tangencia en la intersección de la circunferencia construida y la circunferencia dada inicialmente.<br>**[UE: Construir puntos en la intersección de dos objetos dados].**<br>Para construir las dos rectas tangentes que pasan por *A* bastará con construir rectas que pasen por *A* y por cada punto de tangencia.<br>**[UE: Construir una recta que pasa por dos puntos que son dato].(2 veces)** | Determinar las coordenadas del punto medio del segmento *CA* que une el centro *C* de la circunferencia dada con el punto exterior *A*.<br>**[UE: Las que corresponden a la determinación del punto medio]**<br>Calcular la distancia entre los puntos *C* y *A*.<br>Determinar la ecuación de la circunferencia ***C*'** cuyo centro es el punto medio de *CA* y cuyo radio es 1/2 d(*C*, *A*).<br>**[UE: Determinar la ecuación de una circunferencia a partir de las coordenadas de su centro y el valor de su radio.]**<br>Resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la circunferencia dada inicialmente y la ecuación de ***C*'**.<br>**[UE: Resolver un sistema de dos ecuaciones cuadráticas, con dos incógnitas.]**<br>Cada solución obtenida es uno de los puntos de tangencia de las rectas tangentes trazadas desde *A* a la circunferencia ***C***. Esto implica interpretar las dos soluciones en términos gráficos. Para cada uno de los puntos de tangencia se determina la ecuación de la recta que pasa por ellos y por *A*.<br>**[UE: Determinar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de dos puntos de paso]. (2 veces)** |

Como se ha mostrado en la tabla 2, es posible asociar unidades elementales a cada paso del procedimiento sintético en el procedimiento analítico; cuando se presenten estos casos, se dirá que los procedimientos empleados en los cuadros geométrico y algebraico son equivalentes.

Sin embargo, en los textos de geometría analítica suelen presentarse procedimientos distintos al descrito para determinar rectas tangentes a una circunferencia cuando éstas son trazadas desde un punto exterior, ocurriendo que muchas veces esos procedimientos se centran en cálculos algebraicos que carecen de sentido para los estudiantes. Como ejemplo de una solución que no tiene un equivalente sintético y que suele aparecer en contextos de geometría analítica es la siguiente:

Si $m$ denota la pendiente de la recta tangente buscada, considerando que su ecuación tiene la forma $y-y_0=m(x-x_0)$, donde $(x_0,y_0)$ son las coordenadas del punto $A$ dado inicialmente, se tendrá que el punto de tangencia será la solución del siguiente sistema de ecuaciones, formado por la ecuación de la recta tangente y de la circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ y $y-y_0=m(x-x_0)$.

De este sistema se puede obtener una ecuación cuadrática, por ejemplo, en la variable $x$; como la recta debe ser tangente a la circunferencia, este sistema debe tener sólo una solución. Notar que este paso requiere establecer una relación entre la condición geométrica *se cortan sólo en un punto* y *la* *solución del sistema es única*. En términos de transformaciones, esta actividad corresponderá a una conversión del registro figural al registro simbólico. Además, esa condición debe convertirse *en el discriminante es cero* por la naturaleza cuadrática de la ecuación. Luego de realizar transformaciones en el contexto simbólico, se deben obtener dos valores para $m$, los que deben interpretarse en términos de las dos rectas tangentes que pueden trazarse desde el punto $A$.

Como puede observarse, para obtener en esta solución ha sido necesario realizar varias transformaciones en el registro simbólico, así como conversiones al registro gráfico. También se ha hecho necesario el manejo de propiedades relacionadas con el valor del discriminante.

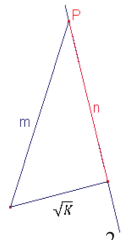
Así, mientras que esta solución se ha centrado en transformaciones simbólicas, que hacen que se pierdan de vista las propiedades geométricas que deben cumplirse en la condición de tangencia, la solución analítica descrita en la tabla 2 ha permitido que cada paso pueda interpretarse en términos de representaciones figurales que permiten comprender el porqué de los procedimientos algebraicos, así como establecer continuamente conexiones entre las transformaciones simbólicas y gráficas. Por esa razón, y aprovechando la equivalencia entre las unidades elementales en los dos cuadros, consideramos que la determinación de la ecuación de la recta tangente en un contexto analítico que reproduce el razonamiento sintético, como el descrito en la tabla 2, puede ser beneficioso para el aprendizaje, y de hecho lo es.

**Ejemplo 2: Determinación de un lugar geométrico**

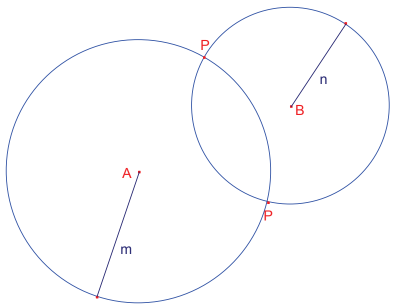
Como se verá en la tabla 3, en las soluciones propuestas para el problema sobre lugar geométrico planteado será posible establecer sólo algunas relaciones entre las unidades elementales en los marcos geométrico y algebraico.

Tabla 3. Unidades elementales presentes en la determinación de un lugar geométrico

| Unidades elementales en el marco geométrico | Unidades elementales en el marco algebraico |
|---|---|
| **Enunciado:** Dados los puntos $A$ y $B$ y el valor constante $\sqrt{K} \neq d(A,B)$, construya el lugar geométrico de los puntos $P$ tales que la diferencia de los cuadrados de las distancias de $P$ a $A$ y de $P$ a $B$ es $K$.<br>**Solución propuesta:**<br>Se construye un triángulo con cateto $\sqrt{K}$. Para ello, se traza una perpendicular al segmento de longitud $\sqrt{K}$ por uno de sus extremos.<br>**[UE: Las consideradas al construir una recta perpendicular].**<br>Se selecciona un punto cualquiera Q sobre dicha recta.<br>**[UE: Construir puntos sobre un objeto dado]**<br>Construir un triángulo rectángulo de hipotenusa m y catetos $\sqrt{K}$ y n.<br>**[UE: Construir una recta conociendo dos puntos de paso].** | **Enunciado:** Considere los puntos $A(3,5)$ y $B(0,0)$. Determine la ecuación del lugar geométrico que satisfacen los puntos $P$ del plano de modo que la diferencia de los cuadrados de las distancias de $P$ a $A$ y de $P$ a $B$ sea 100. Luego, reconozca la forma que adopta la gráfica de dicha ecuación.<br>**Solución propuesta:**<br>Se denota por $P(x, y)$ a los puntos del plano que cumplen la relación pedida y se plantea una ecuación que represente la condición dada.<br>Las distancias de $P$ a $A$ y de $P$ a $B$ se representan con una expresión algebraica.<br>**[UE: Determinar una expresión cuadrática en dos variables para referirse a una distancia entre puntos.] (2 veces)**<br>Luego se debe determinar una ecuación que relacione las coordenadas del punto $P$ con los datos dados. Esto requiere de un proceso de conversión que no se ha descrito en términos de UE.<br>$d^2(P,A) - d^2(P,B) = 9$ |




Se verifica entonces que: $m^2=K+n^2$.
Con los segmentos de longitudes m y n se construyen circunferencias con centros en A y B y radios m y n, respectivamente.
**[UE: Construir una circunferencia conociendo su centro y su radio] (2 veces)**
En la intersección de las dos circunferencias construidas se encuentran puntos del lugar geométrico.
**[UE: Construir puntos de intersección de objetos dados].**




Esto es cierto pues *P* se ubica en la circunferencia de centro *A* y radio *m*, luego, $d(A,P)=m$. Además, *P* también se encuentra en la circunferencia de centro *B* y radio *n*, luego, $d(B,P)=n$. Y como se verifica que $m^2-n^2=K$, entonces *P* forma parte del lugar geométrico buscado.
Notar que con este método sólo se ha conseguido construir algunos puntos del lugar geométrico. No es trivial justificar que la forma que adopta es la de una recta.

$$(x-3)^2+(y-5)^2-(x-0)^2-(y-0)^2 = 100$$

Desarrollando las expresiones y simplificando, es decir, a través de transformaciones en un mismo registro, se obtiene una ecuación equivalente:

$$-3-5y=66$$

Se debe reconocer que dicha ecuación corresponde a la del lugar geométrico solicitado y que es una recta perpendicular a AB. La justificación de la forma del lugar geométrico se basa en que la expresión algebraica es lineal en *x* e *y*.

El primer paso en cada solución de la tabla 3 consiste en interpretar el enunciado; en el primer caso será en términos de una representación figural y en el segundo caso en términos de una ecuación. Esto corresponde a transformaciones de conversión. Sin embargo, en relación a las unidades elementales descritas en las soluciones en los marcos geométrico y algebraico, se muestra que no se trata de procedimientos equivalentes.

Sobre la eficiencia de la solución, se puede notar que mientras que con la técnica geométrica sólo se determinan algunos puntos del lugar geométrico, con la técnica analítica se puede determinar la forma global del lugar geométrico. Por ello se considerará que la solución en el contexto algebraico será más eficiente.

Notar que para justificar la forma que adopta el lugar geométrico en el cuadro geométrico se hace necesario seguir un razonamiento deductivo basado en considerar la recta que pasa por los dos puntos *P* mostrados en la intersección de las circunferencias y verificar que cualquier punto ubicado sobre dicha recta satisface la condición geométrica del enunciado. Esto hará que la solución sintética sea más compleja.

Esta actividad fue implementada con un grupo de estudiantes de primer año de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Pontificia Universidad Católica del Perú; los resultados obtenidos confirman el supuesto en relación a cuál de ellos resultó de mayor complejidad cognitiva.

De las 14 parejas que participaron, sólo 6 dieron como respuesta que el lugar geométrico era una recta en el contexto sintético, y únicamente 2 de ellas indicaron que la recta era perpendicular al segmento *AB*, tal como se muestra en la figura 1. La justificación de la forma adoptada no siguió un razonamiento formal, se basó en que los distintos puntos *P* construidos parecían estar alineados.

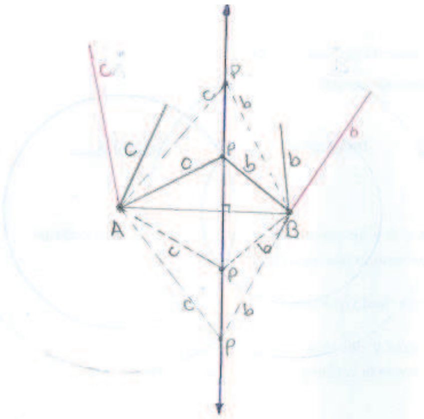



Figura 1. Solución sintética de la pareja 7

De otro lado, algunos de los estudiantes asumieron que el lugar geométrico debía heredar la forma de las construcciones auxiliares y, por tanto, como se empleaban circunferencias, el lugar geométrico descrito por *P* también debía serlo.

En las otras soluciones se identificaron dificultades para reconocer la forma global del lugar geométrico en el contexto sintético. La figura 2 muestra que, a pesar de que esta pareja hizo la construcción auxiliar adecuada y trasladó las distancias *m* y *n* correctamente, insistió en que *APB* formaba un triángulo rectángulo, como se observa en la siguiente figura.

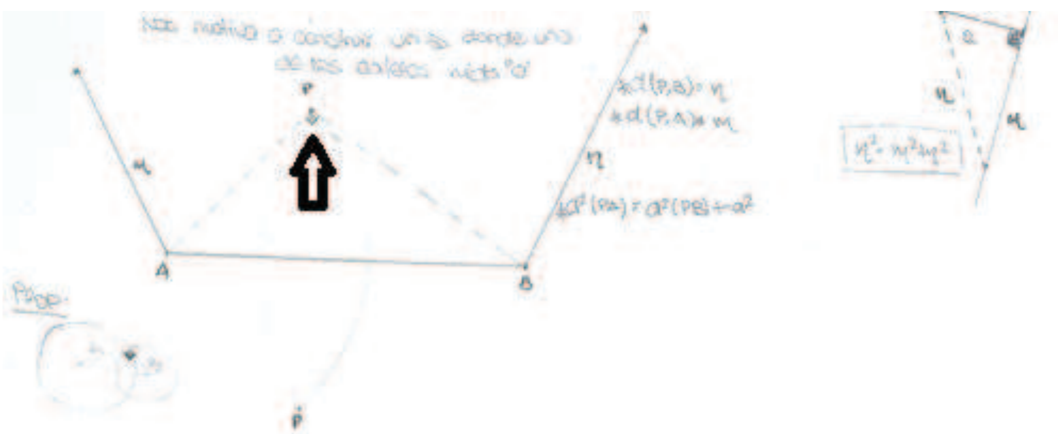



Figura 2. Solución sintética de la pareja 12

En particular, les resultó muy difícil comprender que, sin que se construyera un triángulo rectángulo con vértices en *A*, *B* y *P*, se verificaba una relación pitagórica. Entendemos que esto ocurrió porque la solución sintética requería coordinar figuras, relacionarlas con propiedades y realizar un nuevo dibujo donde se verificaran nuevas relaciones, actividad muy compleja a nivel cognitivo.

En relación a la solución del enunciado en el contexto analítico, el nivel de éxito fue mayor, ya que 10 de las 14 parejas dieron como respuesta la expresión algebraica adecuada y señalaron que se trataba de una recta, tal como se muestra en la figura 2. En algunos pocos casos los estudiantes cometieron errores en las operaciones algebraicas.

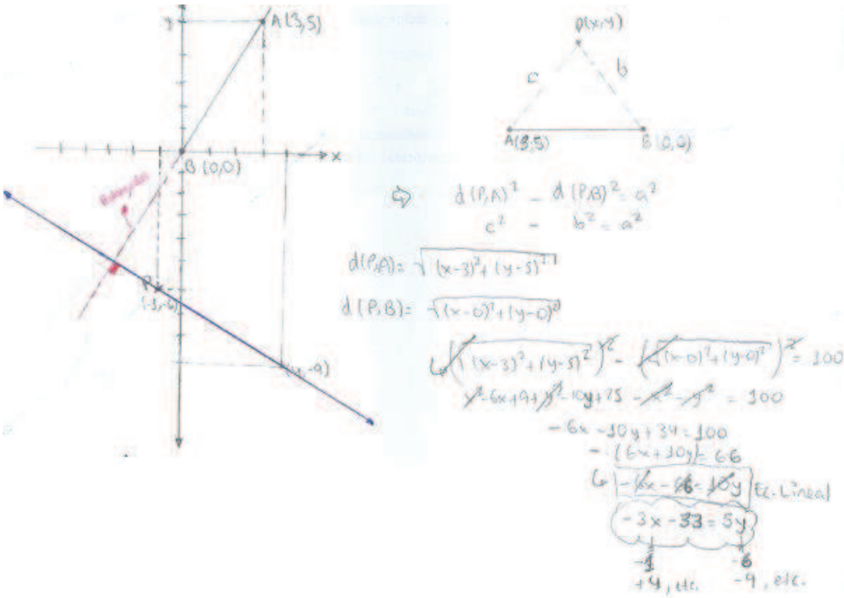



Figura 3. Solución analítica de la pareja 7

Fueron muy pocas las soluciones en las que se notó que los estudiantes establecieron relaciones entre las construcciones geométricas realizadas y las representaciones algebraicas obtenidas. Las figuras 1 y 3 corresponden a una misma pareja de estudiantes y muestran coherencia entre la solución sintética y analítica; sin embargo, fue más común encontrar soluciones sintéticas incompletas o incorrectas y soluciones analíticas completas y correctas. Esto muestra que no reconocieron que se trataba de un mismo problema aunque enunciado en marcos distintos.

## CONCLUSIONES

La descomposición de los procedimientos en unidades elementales permitió poner en evidencia que el uso de un marco u otro en la solución de un problema genera distintos procedimientos de solución, los que generalmente no serán comparables. En caso no sean comparables, lo ideal será que el estudiante tenga la capacidad de elegir aquel que le resulte más eficiente para la solución de un determinado problema. De otro lado, en aquellos casos en donde se vea que sí es posible establecer relación entre los procedimientos involucrados en los dos marcos, consideramos que hacer explícita esta relación contribuirá a la comprensión de los elementos involucrados.

En relación a los errores identificados en los procedimientos sintéticos, los estudiantes tuvieron dificultad para coordinar varios registros en simultáneo; esto explica que la mayoría de estudiantes no pudo relacionar las construcciones auxiliares con la construcción principal. De otro lado, hay relaciones entre representaciones que, aunque no son correctas, persisten como por ejemplo la idea de que una relación de igualdad que involucra tres expresiones al cuadrado se asocia necesariamente con un triángulo rectángulo.

Se comprobó también que el tratamiento sintético requiere de razonamientos deductivos que resultan más complejos, en contraste con el tratamiento algebraico en donde los procedimientos son más fáciles de sistematizar. Se hace necesario diseñar secuencias de enseñanza aprendizaje adecuadas para que los estudiantes se familiaricen con los procedimientos de la geometría sintética.

El análisis de procedimientos en términos de transformaciones y UE permite prever que aquellas actividades que involucran un mayor número de transformaciones o conexiones entre distintas representaciones de un mismo objeto matemático resultarán más complejas en términos cognitivos.

Finalmente, la descripción de los procedimientos que se siguen durante la actividad matemática de un mismo problema en los cuadros geométrico y algebraico muestra que no hay una superioridad de uno sobre otro; en todo caso, son complementarios. Se requiere diseñar actividades que puedan ser abordadas desde distintos contextos matemáticos de modo que se favorezcan los aprendizajes matemáticos.

## Referencias

Alsina, C. y Trillas, E. (1992). *Lecciones de álgebra y geometría*. Sexta edición. Editorial Gustavo Gili S.A.

Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. Notas sobre las relaciones entre tres conceptos claves en didáctica. *Revista EMA, 9*(3), 181-204.

Bouvier, A. y George, M. (1984). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Akal Editor.

Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes*; translated from french and latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement mathématique. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. (tesis doctoral). Paris: Université de Paris VII.

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, *9* (1), 143-168.

Duval, R. (2006b). A cognitive análisis of problems of comprensión in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61, 103-161. Springer.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1995). *Cálculo y Geometría Analítica*. Volumen I, Quinta edición. México: Mc Graw Hill.

Puerta, M. (2009). *Interpolación y extrapolación gráfica y algebraica. Estudio de contraste*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Purcell, E. y Varberg, D. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Novena edición. México: Pearson Educación.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemáticas previas al cálculo*. Quinta edición. México: Thomson.