IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN ABIERTAS EN EL AULA DE SECUNDARIA, ANÁLISIS PREVIO[1]

Implementation of open modeling tasks in secondary school, exploratory analysis

César Gallart[a], Irene Ferrando[b], Lluís M. García-Raffi[c]

[a]Universidad Cardenal Herrera-CEU, Valencia, [b]Universidad de Valencia, [c]Universidad Politécnica de Valencia

Resumen

En este trabajo se describe una experiencia de implementación de tareas de modelización abiertas en Educación Secundaria Obligatoria. El objetivo de la experiencia es reconstruir, a través del análisis cualitativo de los datos recogidos en la experiencia, el proceso de resolución de una tarea de modelización en base a un ciclo de modelización. Un análisis cuantitativo nos permitirá determinar si la implementación de tareas abiertas de modelización modifica la alfabetización matemática en el sentido planteado por PISA.

Palabras clave: *tareas de modelización, secundaria, ciclo de modelización.*

Abstract

In this paper an experimental implementation of open modeling tasks in Secondary Education is described. The aim is to reconstruct, through the qualitative analysis of the collected data, the solving process of a task based on a modeling cycle. A quantitative analysis will allow us to determine whether the implementation of an open task improves mathematical literacy in the sense suggested in the PISA tests.

Keywords: *modelling tasks, secondary, modelling cycle.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

El informe PISA publicado por la OCDE (2006) incide en la importancia que debe tener, en los sistemas educativos actuales, el aprender a "matematizar" situaciones reales, ya que "*la evaluación de las matemáticas que hace PISA exige a los alumnos que se enfrenten con problemas matemáticos que están basados en algún contexto del mundo real*" (Puig, 2006, p. 7). Este informe evalúa la alfabetización matemática (*mathematical literacy*, en el original en inglés y que ha venido traduciéndose por competencia matemática en nuestro país) de los alumnos de 15 años y, entre otros aspectos, tiene en cuenta la capacidad de "*entender las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos*" (OCDE, 2006, p. 74). Tal y como afirma Puig (2006, p.7), los alumnos que se enfrentan a estas pruebas "*activan las competencias matemáticas pertinentes para resolver el problema*", y se embarcan *"en un proceso de matematización*".

Maaß (2006, p. 115) define los problemas de modelización como "*auténticos, complejos y abiertos, relacionados con la realidad*". El proceso de resolución de este tipo de problemas, desde un punto de vista normativo e idealizado (Borromeo Ferri, 2006), abarca una serie de fases (que pueden variar entre unos autores y otros) que transitan, en un doble proceso de matematización -vertical y horizontal (Treffers, 1987)-, entre el mundo real y el mundo matemático. En la Figura 1 reproducimos un ciclo de modelización basado en el propuesto por Maaß (2006, p. 115). Este ciclo se ilustra a través de una serie de acciones que permiten describir los procesos involucrados en la

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

transición entre las fases que, para este trabajo, hemos concretado y resumido en cinco. Se parte de una situación real, que se *simplifica y estructura* (1) para obtener un modelo real de la situación original planteada. Mediante suposiciones, generalizaciones y formalizaciones se realiza la *matematización (horizontal)* (2) de forma que, al identificar las matemáticas que subyacen en el modelo real, éste se transforma en un modelo matemático. Una vez establecido el modelo matemático, se *resuelve matemáticamente* (3) –esta transición es también denominada matematización vertical-, obteniendo una solución matemática, que tendrá que *interpretarse* (4) en los términos de la situación inicial, obteniendo así una solución real. Por último se *comprueba y valida* (5) que dicha solución real efectivamente resuelve el problema y que el modelo es el adecuado. Además puede intentarse realizar una posible generalización a otras situaciones similares. Las cinco fases descritas conforman un ciclo por el que se puede transitar varias veces si es necesario redefiniendo o refinando el modelo.

En este trabajo vamos a describir una experiencia llevada a cabo con alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. En primer lugar detallaremos, a partir del análisis cualitativo del trabajo realizado por los estudiantes, la *ruta de modelización* (Borromeo Ferri 2007) seguida por éstos. La reconstrucción de la ruta de modelización nos permite entender un poco mejor los procedimientos cognitivos de los estudiantes al resolver tareas de modelización abiertas. A continuación examinaremos los resultados cuantitativos de un test previo a la realización de la actividad y uno posterior a la misma para tratar de determinar si la implementación de tareas de modelización modifica la alfabetización matemática entendida en el sentido del proyecto PISA

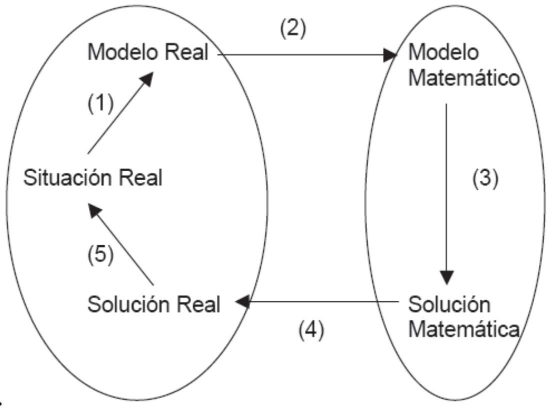


Figura 1. Ciclo de modelización utilizado en este trabajo

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El trabajo que aquí presentamos se engloba dentro de otro mayor cuyo objetivo es analizar de manera global, las consecuencias de introducir la enseñanza de la modelización a través de la resolución de tareas abiertas en el aula de secundaria y su efecto en el desarrollo de las competencias necesarias para resolver problemas reales. En este artículo nos centraremos en un análisis preliminar de la experiencia realizada durante el curso 2012-13 en un colegio de la localidad de Moncada para responder a la siguiente pregunta: ¿el trabajo en tareas de modelización contribuye a la mejora de la alfabetización matemática en el sentido del proyecto PISA? Se contó con la participación de un grupo experimental formado por 52 alumnos de tercero de educación secundaria (14-15 años) compuesto por tres grupos naturales de clase y un grupo de control de 18 alumnos del mismo nivel y del mismo centro. En ninguno de los dos grupos se había trabajado anteriormente la modelización y los contenidos tratados hasta el momento de la experiencia en ambos grupos (finales de febrero) son los correspondientes al currículo oficial. La actividad, dirigida por uno de los investigadores, que es asimismo el profesor, se desarrolló durante ocho sesiones de una hora. La primera y la última sesión se dedicaron a pasar los pre y post test ya mencionados.

Durante la seis sesiones intermedias, la metodología que siguió el grupo de control corresponde a la de una clase tradicional, en la que se impone una "*enseñanza imitativa*" (Burkhardt, 2006), basada en los problemas descontextualizados y convenientemente simplificados de los libros de texto (Maaß, 2006, Alsina, 2007). Los contenidos trabajados por el grupo de control a lo largo de la experiencia fueron los marcados por la programación del centro.

La segunda sesión de la experiencia consistió en la entrega y presentación a los alumnos de los grupos experimentales, de un dossier con las diez tareas de modelización propuestas, así como los objetivos y criterios de evaluación de la actividad. Durante esta sesión los alumnos forman, libremente, grupos de trabajo de dos o tres miembros, y escogen, una de las tareas del dossier. En lo relativo al diseño de las tareas planteadas, encontramos en la literatura una serie de criterios a tener en cuenta, como los principios de construcción de las "Modeling-Eliciting Activities" (en Lesh y otros, 2000, p. 591-645), los criterios que permiten identificar las tareas de modelización en el proyecto europeo LEMA y otros similares en Blomhøj y Kjeldsen, (2006) y en Maaß (2010). Buscamos que las tareas planteadas reúnan las siguientes características:

- Que sean auténticas, con datos reales, relevantes en alguna situación real, y que hagan posible el uso de la experiencia de los alumnos. Por ello, el contexto se corresponderá con su entorno escolar.
- Que sean abiertas, sin una solución estipulada de antemano.
- Que promuevan la reflexión crítica y el debate entre los alumnos.
- Que abarquen el proceso completo de modelización (todas las fases del ciclo).
- Donde se haga necesario trabajar tanto con información matemática como no matemática, interpretando y validando los resultados en el contexto en que se sitúa el problema.
- Que se trabajen en pequeños grupos de dos o tres alumnos.

Como ya hemos indicado, en el dossier presentado a los alumnos hay diez tareas distintas, algunas están fuertemente relacionadas con la realidad, y es necesario obtener los datos para su resolución (las más abiertas y complejas), mientras que en otras se presentan datos realistas, pero no auténticos (las más concretas y estructuradas). La variedad de estas tareas responde a la necesidad de tratar la diversidad en el aula.

Durante las cuatro sesiones de trabajo en el aula el alumno adopta un papel principal, toma el control del proceso y propone sus propias estrategias de resolución. El profesor asume un papel de observador favoreciendo la autonomía y la interacción del grupo. Para ello fomenta que los alumnos expliquen, justifiquen, discrepen, reflexionen y cuestionen alternativas distintas en un proceso de aprendizaje constructivo y social (Barbosa, 2006, Burkhardt, 2006, Blomhøj y Jensen, 2006).

Una vez finalizadas las sesiones dedicadas a la realización de las tareas, cada uno de los grupos de trabajo de los tres grupos experimentales preparó una presentación de su trabajo para exponerlo al resto de compañeros (generalmente con la ayuda de diapositivas digitales). Finalmente, los alumnos, tanto del grupo experimental como de control, realizaron el post test.

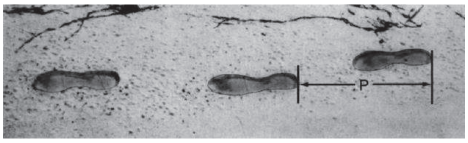
Herramientas de investigación

Las tareas de modelización requieren que los alumnos generen modelos, que deberán ir refinando y mejorando en sucesivos ciclos. Además deben externalizar sus formas de pensamiento y esto se realiza de formas distintas: a través del diálogo dentro del grupo, a través del debate con el resto de compañeros de aula y con el profesor, pero también a través de una serie de documentación que debe ser elaborada durante la realización de la tarea. De esta manera se va generando un "*rastro continuo de documentación*" (Lesh y Doerr, 2003), a partir de cuyo análisis reconstruiremos su ruta de modelización. Con este fin elaboramos una serie de herramientas de investigación:

- El diario del alumno, realizado por cada grupo, describe el proceso de resolución seguido, que se completa con entrevistas conjuntas con el grupo (grabadas en audio).
- El diario del profesor-investigador, en el que se recogen las impresiones obtenidas tras la observación exhaustiva del trabajo realizado por los grupos de alumnos en el aula.
- La producción final de los distintos grupos, recogida en su presentación pública (mediante diapositivas digitales) y grabada en vídeo.
- Los resultados obtenidos en el pre-test y en el pos-test.

En lo que respecta a los test, ambos están formados por ocho tareas: 4 basadas en las pruebas liberadas del informe PISA (OCDE, 2005), 2 pertenecientes al proyecto LEMA[2] y las otras dos basadas en problemas propuestos por Verschaffel, De Corte y Greer (2000). Un test similar, diseñado a partir de las tareas propuestas por PISA, es utilizado por Mousoulides, Christou y Sriraman (2008) para comprobar la eficacia de su programa de intervención en la mejora de las habilidades de los alumnos en la resolución de problemas de modelización. A continuación mostramos un ejemplo de cada uno de los tres tipos de tareas.

CAMINAR (basada en una actividad propuesta en las pruebas PISA de 2005)



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas. Para los hombres, la fórmula $n/p = 140$, da una relación aproximada entre n y P, donde: n = número de pasos por minuto, y P = longitud del paso en metros.
Pregunta 1: Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.
Pregunta 2: Bernardo sabe que sus pasos son de 0,80 metros. El caminar de Bernardo se ajusta a la fórmula. Calcula la velocidad a la que anda Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Muestra tus cálculos.

VECINOS (basada en una prueba del proyecto LEMA)
Pregunta 8:
¿Cuánta gente crees que vive en el bloque de pisos de la fotografía?
Explica las suposiciones que tomes en consideración y detalla todos los pasos y cálculos que realices para dar tu respuesta**.**

DOS AMIGOS (basada en una tarea descrita en Verschaffel, De Corte y Greer 2000)
Pregunta 10:
Carlos vive a tres kilómetros de su Instituto y Pablo a ocho. ¿A qué distancia viven uno del otro?
Explica las suposiciones que tomes en consideración y detalla todos los pasos y cálculos que realices para dar tu respuesta.

Las tareas de los test adaptadas de PISA pertenecen a diferentes contenidos matemáticos, tienen diferentes niveles de complejidad y se sitúan en contextos diferentes. Las respuestas pueden ser cortas, abiertas o de elección múltiple. También se incluye en cada test una "*prueba de solución de problemas*" (según la terminología PISA), del tipo "*toma de decisiones*", donde el alumno debe dar una respuesta que cumpla con una serie de condiciones a partir de las distintas alternativas que se le presentan. El resto de las tareas de los test son de respuesta abierta y, para resolverlas, es necesario realizar un proceso de matematización de la realidad, argumentar y justificar los supuestos considerados en su resolución, adecuar la solución -que no tiene que ser un único número- a la realidad en la que se sitúan, así como trabajar con información no estrictamente matemática.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Reconstrucción del proceso de modelización

En el presente artículo, como ejemplo del trabajo en modelización desarrollado por los alumnos del grupo experimental, centramos nuestra atención en la reconstrucción del proceso de resolución seguido en la tarea "La sombra en el patio de recreo". El enunciado de la tarea se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Enunciado de la tarea de modelización tal y como aparece en el dossier de los alumnos

Hemos escogido esta tarea porque es una de las más abiertas y complejas. A partir de la documentación recogida mediante los distintos instrumentos de investigación expuestos en el apartado anterior y según el ciclo propuesto en la Figura 1 vamos a reconstruir la ruta de modelización seguida por uno de los grupos que resolvió esta tarea. Se incluyen (entrecomillados y en cursiva) fragmentos de los comentarios facilitados por los alumnos en su diario, durante las entrevistas o en la presentación de su trabajo.

Esta tarea presenta una situación bien conocida por los alumnos: una plaga ha obligado a talar numerosas palmeras, por lo que el patio de recreo se ha quedado prácticamente sin zona de sombra (situación real). Un primer acercamiento les lleva a su simplificación (1): *"estudiar la sombra producida por un único árbol"*. A esta primera imagen sobre la situación los alumnos llegan tras un proceso de reflexión, en el que se establecen dos sub-problemas: clasificar los árboles según la forma de su copa y establecer la relación existente entre la superficie de la copa del árbol y la superficie de sombra que proyecta. La observación del área proyectada en el plano por un árbol lleva a los alumnos a la determinación de la sección plana de la copa como variable significativa, utilizando el triángulo, el círculo y el rectángulo como modelos geométricos con los que idealizarla.

A continuación los alumnos realizan con cartulina maquetas en 2D de tres modelos de árboles con copa triangular, circular o rectangular, con las que simulan, experimentalmente en el laboratorio del colegio, la realidad del patio a la hora del recreo. A partir de este modelo geométrico a escala deducirán su modelo matemático (2), e intentarán resolver el problema de establecer la relación existente entre la superficie de la sección de la copa del árbol y la superficie de su sombra. Para llegar a este punto, han tenido que abstraer la realidad mediante su conocimiento matemático y el uso de representaciones idealizadas de la realidad.

Para resolver el problema consistente en establecer la relación entre el área de la sección de la copa y el área de la sombra proyectada los alumnos midieron primero, en el patio, el ángulo de inclinación de los rayos del Sol durante el recreo: "*Uno de nosotros se puso el extremo de una cuerda en la cabeza, otro sujetó el otro extremo justo donde acababa la sombra del primero y el* *tercero midió, con un transportador, el ángulo que formaban la cuerda y la sombra*". A continuación, en el laboratorio de Tecnología del colegio, utilizaron un flexo para emular el Sol como fuente de emisión puntual no extensa: "*Con una cuerda fuimos cuadrando la posición del flexo hasta conseguir que la sombra de nuestros "árboles" y la cuerda formasen un ángulo de 42 grados. Calcamos las 3 sombras, pero no exactamente, sino aproximándolas a una figura regular, por ello los resultados fueron parecidos pero no iguales*". A partir de estas mediciones se obtienen las razones para cada forma geométrica (3). La disparidad de los resultados obtenidos les hizo dudar sobre su validez y recurrir al profesor que les recomendó repetir el experimento en el patio de recreo, fijándose en las sombras proyectadas por sus maquetas, con el fin de obtener nuevos resultados (2): "*Así pues repetimos el proceso pero con luz solar […]. Y efectivamente nos dio resultados diferentes a la primera vez […]. Escogimos la forma del círculo puesto que su relación nos aportaba una mayor cantidad de expansión de la sombra"* (3).

A continuación los alumnos interpretan estos resultados en términos de la situación real (4): "*la razón mayor entre el área original y el área de sombra la produce la forma circular"*. Por tanto llegan a la conclusión, de carácter geométrico, de que deben escoger un árbol con una copa con sección circular para maximizar la superficie de sombra. Tras una búsqueda en internet eligen el ombú, ya que tiene una copa casi esférica, y recaban sus dimensiones medias: 10,15 metros altura y 4,5 metros de radio de copa.

Posteriormente los alumnos reflexionan sobre el proceso de resolución. Respecto al alcance de su solución, los alumnos ya saben que el árbol que mayor sombra proyecta es el que tiene una copa circular y que, a partir de la medida de su copa, pueden obtener la superficie de su sombra mediante la razón obtenida (1,83 para la copa circular), teniendo en cuenta que estos resultados solo sirven para la hora y el momento del año en que se tomaron las mediciones. Posteriormente, debaten sobre la necesidad de incorporar nuevos elementos a su modelo respondiendo a las siguientes cuestiones: *"¿Cuántos árboles deberíamos plantar?", "¿Qué porcentaje del patio tendríamos que sombrear?", "¿Cómo se deberían distribuir los árboles en el patio para conseguir este porcentaje de sombra?"*. Esta revisión del proceso corresponde a la fase de validación (5) y lleva a la formulación de nuevos sub-problemas (1). Es decir, en este punto los alumnos empiezan a recorrer, de nuevo, el ciclo de modelización con un nuevo modelo real: determinar el porcentaje de la superficie del patio a sombrear, teniendo en cuenta la sombra que proyecta el edificio del colegio; determinar el número de árboles necesarios para sombrear el porcentaje de la superficie acordada; y establecer la distancia a la que se proyecta la sombra de los árboles para distribuirlos adecuadamente y que sus sombras no se superpongan. "*La sombra del edificio del Colegio cubría 552,5m2 → 10,24 % del patio. Únicamente debíamos sombrear otro 10%, 510m2, para obtener un 20% de sombra, previamente acordado"*. Para determinar el número de árboles (ombúes) necesarios para sombrear esta superficie del patio, deciden que, previamente, deben hallar la sombra que proyecta uno de ellos, "*multiplicamos su área de copa por la relación de los objetos circulares"*, para, por último, dividir el área a sombrear entre la superficie de sombra obtenida para un ombú. Este razonamiento les lleva a plantearse la expresión general (2): $N=S:(r \times C)$, donde N es el número de árboles necesarios para proyectar un área S de sombra, siendo r la relación entre el área de la copa del árbol y la de la sombra proyectada y C el área de la copa del árbol. El desarrollo de esta expresión precisa de la activación del lenguaje formal y simbólico así como del razonamiento proporcional que se deriva de la identificación y relación entre las distintas variables. La manipulación de esta expresión les lleva a la solución matemática (3): $N= 510:(1{,}83 \times (\pi \times 4{,}5^2))=4{,}383$, para un ombú medio de radio 4,5 metros. Esta solución debe interpretarse en la realidad (4): son necesarios cinco ombúes para sombrear el mínimo de superficie propuesto.

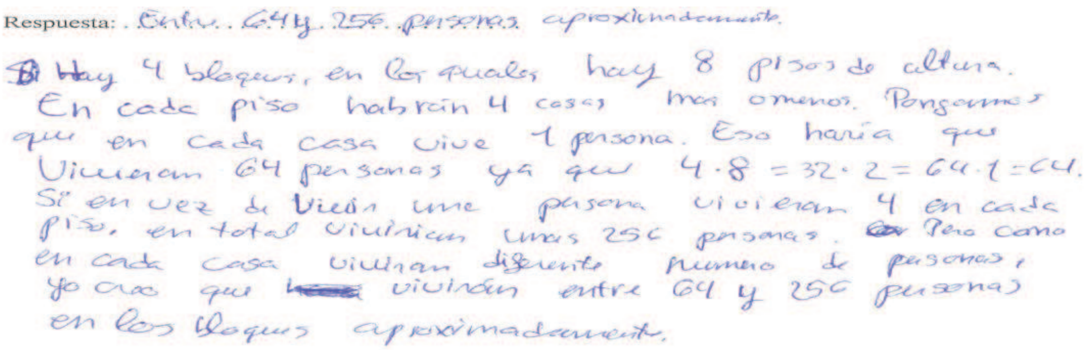
Queda por resolver como distribuirlos: "*Sabiendo ahora la altura del árbol (10,15m) necesitábamos saber a qué distancia del tronco se proyectaría la sombra de la copa […] Con estos datos podemos realizar una regla de tres para averiguar donde se proyectará la sombra del ombú*

(Objeto de 12cm alto – Sombra de 13cm; Objeto de 1015cm alto – X sombra). Aproximadamente 11m de longitud sombra” (3). La solución se interpreta (4) mediante un esquema en el que se muestra cómo quedaría el patio con los cinco árboles, separados once metros unos de otros que presentan durante la exposición pública, junto con los cálculos, estimaciones y razonamientos que avalan su propuesta (5).

Análisis cuantitativo

Veamos, en primer lugar, cómo se ha realizado la puntuación de los test. Ambos test constan de ocho tareas, algunas de ellas tienen varios apartados que puntúan por separado (las respuestas no están, en ningún caso, encadenadas). Las tareas se puntúan con 0 o 1 punto o bien con 0, 1 o 2 puntos, dependiendo de la complejidad de la respuesta. Por falta de espacio nos limitaremos a describir sólo la puntuación de las tareas que hemos mostradas previamente:

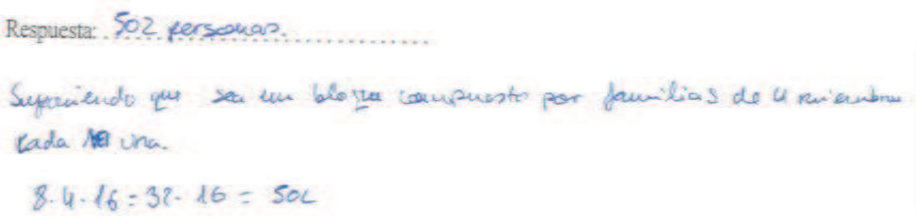
- La tarea “Caminar” consta de dos preguntas, la primera de ellas se puntúa con 1 punto si la respuesta es correcta, es decir 0,5m, 1/2 o 70/140. La segunda pregunta de esa misma tarea es un poco más compleja ya que hay que obtener una velocidad en dos unidades distintas, en este caso se puntúa con 2 puntos si ambas respuestas son correctas, con 1 punto si falla una de las dos o bien si el método de cálculo es correcto pero hay errores menores de cálculo. Se valora con 0 puntos en cualquier otro caso.
- La tarea “Vecinos” consta de una única pregunta con respuesta abierta, para resolverla es necesario realizar estimaciones. Se puntúa con 2 puntos si la respuesta se basa en una estimación realista: se observa que el edificio tiene ocho plantas y se puede suponer que en cada planta hay 4 viviendas. Una estimación realista del número de habitantes de las viviendas debe incluir: personas que vivan solas (1 habitante), parejas jóvenes sin hijos o parejas mayores cuyos hijos ya no vivan con ellos (2 habitantes), familias medias con hijos e incluso con abuelos (entre 4 y 6 habitantes). También se acepta que se estime a partir de una cantidad media de 3 personas por apartamento, lo cual daría una cantidad aproximada de 96 personas. En la Figura 3 mostramos la respuesta de un estudiante puntuado con 2 puntos.


Respuesta: Entre 64 y 256 personas aproximadamente.

Hay 4 bloques, en los cuales hay 8 pisos de altura. En cada piso habrán 4 casas mas o menos. Pongamos que en cada casa vive 1 persona. Eso haría que vivieran 64 personas ya que 4·8 = 32·2 = 64·1 = 64. Si en vez de vivir una persona vivieran 4 en cada piso, en total vivirían unas 256 personas. Pero como en cada casa vivían diferente número de personas, yo creo que vivirán entre 64 y 256 personas en los bloques aproximadamente.

Figura 3. Respuesta correcta a la tarea “Vecinos”

Se puntúan con 1 punto aquellas soluciones basadas en estimaciones menos realistas, como que hay, de media, 4 personas por vivienda. Las respuestas no realistas, como la de la Figura 4, no justificadas o en blanco, se valoran con 0 puntos.


Respuesta: 502 personas.

Suponiendo que sea un bloque compuesto por familias de 4 miembros cada una.

8·4·16 = 32·16 = 502

Figura 4. Resolución de la tarea “Vecinos” puntuada con 0 puntos.

- La tarea "Dos amigos" tiene una respuesta abierta ya que la distancia será un valor del intervalo 5-11. En caso de dar como solución el intervalo se otorgan 2 puntos. En la Figura 5 mostramos una respuesta valorada con 2 puntos.

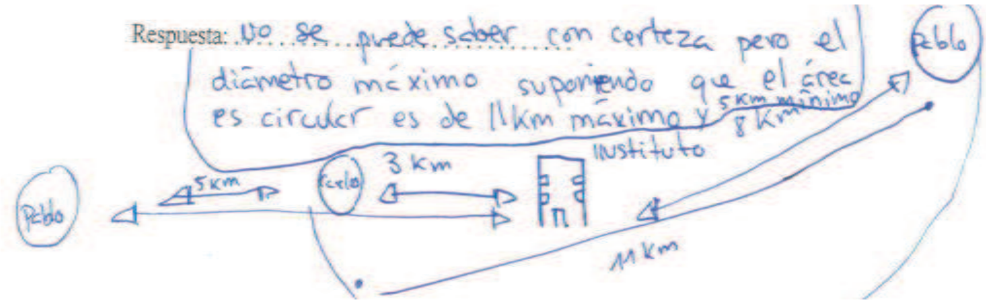


Figura 5. Respuesta correcta a la tarea "Dos amigos"

Si dan los valores máximo y mínimo como si hubiera dos soluciones, se da 1 punto, como en la Figura 6. En cualquier otro caso no se puntúa.

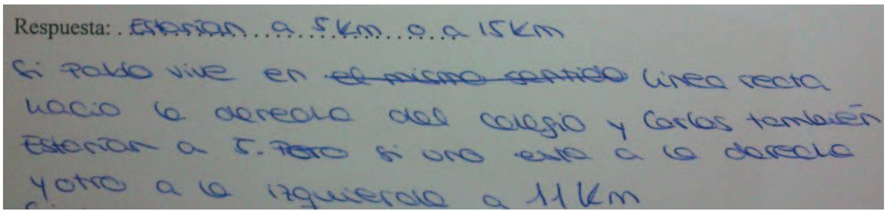


Figura 6. Resolución de la tarea "Amigos" puntuada con 1 punto.

Así, la puntuación global de los test se obtiene de la siguiente manera: la primera tarea se valora sobre 3 puntos, la segunda sobre 4 (ambas tienen varios subapartados) y el resto de tareas se valoran sobre 2 puntos. Esto hace que el total de los test se valore sobre 19 puntos.

Los datos fueron analizados con el programa SPSS. Se calcularon estadísticos descriptivos básicos. Concretamente se obtuvo la media como medida de tendencia central y la desviación estándar como medida de dispersión. Antes de realizar los análisis inferenciales se comprobaron los supuestos de normalidad (K-S test) y homocedasticidad (Levene's test). Ya que ambos supuestos se cumplieron, se aplicaron pruebas paramétricas para comprobar el efecto del grupo (experimental y control) y el momento de la medición (pre test y post test) sobre las puntuaciones mediante un ANOVA de modelo mixto. El nivel de significación se fijó en $p=0.05$.

Los resultados del ANOVA muestran la existencia de un efecto principal de la medida ($F_{1,69}=57.25$; $p<0.001$). También se encontró un efecto significativo de la interacción grupo por medida ($F_{1,69}=0.06$; $p=0.004$).

Las comparaciones por pares mostraron que tanto el grupo experimental como el grupo control obtuvieron una puntuación más elevada en el post test que en el pre-test ($p<0.05$). Sin embargo la mejora del grupo experimental fue mayor (3.87 puntos) que la del grupo control (1.67 puntos).

CONCLUSIONES

A través del análisis cualitativo de la producción de los distintos grupos y la reconstrucción de sus rutas de modelización, hemos constatado como, al resolver las tareas propuestas, transitan a lo largo de todas las fases que conforman el ciclo de modelización (aunque no de forma secuencial). También hemos observado a través del análisis con las herramientas de investigación diseñadas que, ciertamente, la transición entre alguna de estas fases ha resultado más complicada que otras. Se ha puesto de manifiesto la importancia de la fase de validación, ya que es este momento en que el alumno tiene la oportunidad de revisar la validez de su solución y, si procede, reiniciar un nuevo ciclo para mejorar o generalizar la solución obtenida. Comprobamos, tal y como afirma Cabassut

(2009), que la validación supone que el grupo llega a una solución que carece de contradicciones aparentes, que es razonable, según su experiencia, y que ha sido contrastada con sus pares a través de un proceso de comunicación y aceptada por el profesor en su rol de experto. En efecto, la necesidad de este proceso es propia de la actividad modelizadora, marca una diferencia muy significativa con la resolución de los problemas tradicionales y merece un estudio más detallado en el futuro.

Los resultados obtenidos en los test sugieren que el trabajo en tareas de modelización abiertas revierte en una mejora de la alfabetización matemática en el sentido de PISA, al menos en un período temporal próximo a la tarea. Por ello pensamos que la metodología basada en la resolución de tareas de modelización según los criterios de diseño expuestos puede también mejorar el desarrollo competencial a largo plazo, lo cual nos abre una vía de trabajo futuro. No es menos cierto y, con los datos de que disponemos hasta ahora, difícilmente cuantificable, que, como hemos expuesto anteriormente, la motivación puede jugar un papel importante en la mejora de los resultados del post-test. En efecto, los alumnos del grupo experimental encuentran mayor sentido a los problemas planteados pues perciben más fácilmente, y como algo natural, el uso de conocimiento no matemático y la relación entre la situación real planteada y el modelo matemático utilizado en su resolución. Esto podría explicar que, aunque en los alumnos del grupo experimental también se aprecia una mejora, esta no es significativa comparada con la que se aprecia en el grupo experimental. Es posible que la contextualización del pensamiento matemático sea una -incluso, la principal- razón de dicha mejora y por todo ello concluimos, al igual que apunta Verschaffel (2008, p. 402-404), que la introducción de la modelización en el aula debe formar parte activa de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿Cuántas tuvo enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana en investigación*, 43, 85-101.

Barbosa, J. (2006). Mathematical modelling in classroom: a social-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 293-301.

Blomhøj, M. y Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? En Blum, Galbraith, Henn and Niss (Ed.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study,* 45-56. Heidelberg: Springer.

Blomhøj, M. y Kjeldsen, T. (2006). Teaching Mathematical Modelling through project work. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 163-177.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68

Borromeo Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 41, 453-465.

Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantzi y Philippou (Ed.) *CERME 5 - Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2080-2089. Larnaca: University of Cyprus.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2). 178-195.

Cabassut, R. (2009). The double transposition in mathematisation at primary school. En V. Duran-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Ed.) *CERME 6 – Proceedings of Sitxh Conference of European Research in Mathematics Education,* 2156-2165. Lyon.

Lesh, R y Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En Kelly, A. y Lesh, R. (Ed.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* p. 197-230. New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem-solving. En Lesh, R. y Doerr, H. M. (Ed.) *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, p. 3-34. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En Kelly, A.E. y Lesh, R. (Ed.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* 591-645. New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Maa*ß*, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.

Maa*ß*, K. (2010). Classification scheme for modeling task. *Journal für Didaktik*, 31, 285-311.

Mousoulides, N.G., Christou, C., y Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), 293-304.

OCDE (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* Recuperado de http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6

OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En Bolea, P., González, Mª. J. y Moreno, M. (Ed.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* 107-126. Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Greer, B. (2000). *Making sense of Word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Vicente, S. y Van Dooren, W. (2008). Usar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación*, 20(4), 391-406

---

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo del Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto de investigación EDU2012-35638. Los autores agradecen sinceramente la ayuda de los profesores de la Universitat de València Vicente Sanjosé y Xavier García para realizar el análisis cuantitativo así como la colaboración del profesor del Colegio CEU San Pablo, Rafael Salvador, durante el desarrollo de la experiencia.

[2] Ver su página web: http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php