COMPONENTES CRÍTICAS EN TAREAS DE COMPARACIÓN DE RAZONES DESIGUALES[1]

Critical components in comparison of unequal ratios tasks

Bernardo Gómez, Amparo García

Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo se estudian tareas de comparación de razones desiguales en el contexto de las ofertas comerciales. Se identifican las componentes críticas de las tareas y se analizan las respuestas de los estudiantes de distintos niveles al resolverlas. Finalmente se extraen conclusiones acerca de su desempeño.

Palabras clave: *Razón y desproporción, resolución de problemas, normalizar y relativamente.*

Abstract

In this work, comparison of unequal ratios tasks in commercial offers contexts is studied. The critical components are identifying and student responses to each task are analyzed. Finally, concluding remarks are extracted.

Keywords: *Ratio and not proportion, problem solving, norming and relatively.*

INTRODUCCIÓN

"Una pulga puede saltar -relativamente- más alto que un hombre", con este ejemplo Freudenthal (2001) da cuenta de un tipo particular de problemas que involucran una comparación de razones sin que haya proporción, y el objeto mental "relativamente". Este tipo de problemas son frecuentes en la vida diaria, por ejemplo, cuando hay que decidir entre dos ofertas comerciales. Según Freudenthal son problemas que deberían ser considerados en una fenomenología didáctica de la razón, sin embargo, la enseñanza tradicional no parece prestarles atención. En esta investigación se aborda el estudio de este tipo de problemas, por su interés para el diseño de una enseñanza sobre el concepto de razón.

MARCO TEÓRICO

Los estudios sobre razón y proporción han estado influidos por el papel central asignado al razonamiento proporcional desde los trabajos embrionarios de Inhelder y Piaget. Se distinguen dos tipos principales de estudios: los que se centran en el desarrollo cognitivo y los que se orientan a la estructura y caracterización del contenido matemático. Los unos se fijan en lo que el alumno puede o no puede hacer; y los otros han puesto de manifiesto que la enseñanza tradicional escolar tiene un enfoque precario (Streefland, 1985), y que el conocimiento de los futuros profesores es insuficiente (Ilany, Keret y Ben-Chaim, 2004; Valverde y Castro, 2009). Freudenthal, en su propuesta de fenomenología didáctica propone que en vez de empezar por el concepto "y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto se debería buscar primero fenómenos que pudieran compelir al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto" (Freudenthal, 2001, p.6).

Diferentes tipos de tareas han sido usadas para evaluar el razonamiento proporcional: Valor perdido, Comparación numérica y Comparación y predicción cualitativa, Proporciones que implican conversión de razones a razones de cambio o fracciones y Problemas de traslación, (Cramer y Post,1993; Lesh, Post y Behr, 1988). Del análisis de las respuestas a estas tareas se ha

Gómez, B., García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

obtenido una descripción de estrategias correctas: "razón unitaria", "factor de cambio", "fracción" y "producto cruzado"; e incorrectas: "construcción progresiva", "operaciones aleatorias", y "diferencia constante" (Hart, 1981; Cramer y Post, 1993).

También se han identificado variables que influyen en las decisiones de los estudiantes, unas son estructurales y otras de contexto. Las primeras están asociadas a la naturaleza de las cantidades y las relaciones entre cantidades, y estas pueden ser "internas" o "externas".

Por lo que se refiere a la razón, es un concepto complejo que requiere un proceso de aprendizaje a largo plazo, y emparejado a tantos fenómenos como se pueda. Se trata formalmente de una relación de equivalencia, definida por $a:b = c:d$ si el par (a, b) es equivalente a (c, d). Pero lo que hace valiosa a la razón es hablar sobre igualdad o desigualdad de razones, sin conocer el tamaño de la razón (Freudenthal, 2001, p.67). Otro aspecto importante es que una razón es una relación invariante y que cualquier cambio en el antecedente producirá un cambio en el consecuente. Además, cuando la relación se refiere a cantidades que son parte de un "todo" (e.g.: niños y niñas de una clase), no se necesita conocer el "todo", porque la relación no cambia de valor cuando cambia la cantidad total.

La extensa variedad de fenómenos de que es susceptible la razón se pueden agrupar en *Exposiciones*, *Composiciones* y *Constructos* (Freudenthal, 2001), los últimos para situaciones preferentemente geométricas. Un ejemplo de exposición puede ser el formado por un conjunto de países y sus superficies, y uno de composición puede ser una mezcla o una aleación fundiendo metales y el peso o porcentaje que les corresponde en la aleación.

Parejas de exposiciones y composiciones

A menudo se requiere comparar parejas de exposiciones o composiciones. Cuando se comparan dos exposiciones definidas sobre el mismo conjunto, como por ejemplo, en Ω es un conjunto de países y a cada país se le asigna una población y una medida de su superficie mediante las funciones ω_1 y ω_2. La razón entre ω_1 y ω_2, es la densidad de población. La comparación de pares de densidades permite afirmar si un país tiene "en comparación" a su superficie el mismo número de habitantes o un número menor o mayor que otro.

Cuando se comparan dos composiciones, el conjunto Ω de ambas está formado por componentes, partes o clases, de un mismo universo. Si se trata de mezclas o aleaciones, ambas tienen los mismos componentes y si se trata de dos particiones (grupos de edad de una población), ambas están formadas por las mismas partes o clases. Si por ejemplo fueran dos aleaciones con los mismos componentes, y a cada componente se le asigna una masa diferente en cada aleación, mediante las funciones ω_1 y ω_2. La comparación de los pares de razones internas, una de cada aleación, permite saber qué aleación tiene "en comparación" más, menos o igual cantidad de una de sus componentes.

El objeto mental "relativamente" y las técnicas de "normalizar"

Ligados a estos fenómenos, se señala la importancia de ideas tales como "relativamente" o "comparativamente". Estas ideas permiten comparar cantidades con referentes diferentes transformando el referente. A menudo hay razones que en principio son de difíciles de imaginar o visualizar, en esos casos, se acude a un complejo de técnicas que Freudenthal (2001) denomina "normalizar".

9. Razones normalizadas por reducción o ampliación de los objetos usando una escala familiar, sin que importe cuál sea la escala, como por ejemplo: "si imaginamos la Tierra como la cabeza de un alfiler (1 mm de diámetro), el Sol aparece como una esfera con un diámetro de 10 cm a una distancia de 10 m".

10. Razones normalizadas por reducción a la unidad (simple o múltiple) del antecedente o del consecuente. Se puede distinguir entre las que se pueden representar o visualizar mediante

esquemas parte-todo o parte-parte sin hacer referencia al todo, pues es muy grande o se desconoce, como en: "uno de cada cinco niños que nace es chino", o "por cada dos vasos de agua pones tres de naranja"; y las que no se pueden representar o visualizar mediante esquemas parte-todo o parte-parte, porque se plantean entre elementos de conjuntos distintos, pero en su normalización admiten expresiones verbales como las anteriores, es el caso de "en cada litro de agua hay tal cantidad de sal".

11. Razones normalizadas por el sistema de numeración decimal. Las más usuales son las que utilizan el porcentaje.

Delimitando el objeto de estudio y las preguntas de investigación

Asumiendo la precariedad de la enseñanza tradicional de la razón, que se construye con objetos matemáticos desconectados de la realidad y no dan cuenta de la riqueza fenomenológica de este concepto, en particular, de las *parejas de exposiciones* o *composiciones* que involucran la idea de "relativamente", y sus técnicas de normalizar, resaltamos la importancia de hablar sobre desigualdad de razones. En este trabajo se pretende aportar tareas relevantes para la enseñanza de la razón que pongan en juego estas ideas, y que hayan sido sometidas a la prueba de la investigación. A tal fin, se formulan las siguientes preguntas de investigación: ¿cuáles son las componentes críticas de las tareas diseñadas?, ¿qué estrategias utilizan los estudiantes? y ¿qué dificultades manifiestan?

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo cualitativo y se basa en el "análisis de las tareas" a partir de un cuestionario diseñado ex-profeso en base al marco teórico anteriormente descrito.

Las actividades del cuestionario se distribuyeron en hojas de trabajo individuales. Su implementación se llevó a cabo en grupos de alumnos de tres niveles educativos diferentes: 1º de bachillerato de un IES (grupo A, 18 alumnos de CCSS, y grupo B, 25 alumnos de CC), 2º de grado de magisterio (48 alumnos), y Máster de profesor de secundaria de la UV (38 alumnos).

En primer lugar, el cuestionario se pasó a los estudiantes de bachillerato, a modo de pilotaje, con el objetivo de validar las tareas y el tiempo necesario para resolverlas. Posteriormente, se facilitó el cuestionario a los dos niveles siguientes.

Diseño del cuestionario

Las tareas elegidas son realistas (tomadas de la vida diaria), concretamente de los folletos de ofertas comerciales corrientes en los supermercados. Son tareas que se pueden caracterizar por su "fenomenología" como parejas de *exposiciones o composiciones,* involucran el objeto mental *relativamente* y las técnicas de *normalizar*, por su tipología son tareas de *comparación cuantitativa*, en situaciones de *desproporción*, porque hay que juzgar cuál de dos razones es mayor o menor: A/B (<, >) C/D, o tal vez iguales, lo que se puede hacer de modo grosero o preciso.

Además, en estos problemas suele ser corriente que se requiera efectuar una *conversión de normalizaciones* para homogeneizar las razones cuando vienen normalizadas de modo diferente.

ANÁLISIS DE TAREAS

Con el fin de ilustrar el proceso seguido para dar cuenta de las preguntas de investigación, se ofrecen a continuación un par de ejemplos: "pizzas y cervezas" donde se hace el análisis de sus componentes críticas usando los elementos del marco conceptual descrito en el apartado anterior, y después se muestra cómo estas componentes sustentan los procesos de resolución de las tareas. Para la observación de las resoluciones de los estudiantes, sus estrategias y dificultades; se sigue el modelo de interpretación que viene usando nuestro grupo de investigación y que ya ha sido documentado en trabajos precedentes (Monje, Pérez-Tyteca y Gómez, 2013; Gómez et al. 2013).

Componentes críticas de la tarea "pizzas"

Se presenta a los estudiantes una imagen que corresponde a una oferta de pizzas. El texto dice: ¿Qué es mejor, dos pizzas medianas de 30cm de diámetro y 14.95€ cada una, o una pizza familiar de 50cm diámetro y 27.95€?

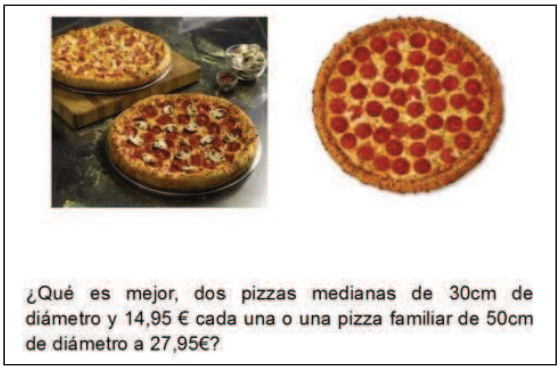

Figura 1. Tarea Pizzas

El objetivo de esta tarea no es contestar qué pizza es más barata en términos absolutos, sino qué pizza es más barata en relación con la cantidad ofrecida. Esto sitúa la componente crítica de la tarea en los procesos de "relativizar". Para ello se necesita:

1. Calcular: el área de las pizzas y el coste de las dos pizzas medianas.
2. Comparar: áreas (¿dónde hay más cantidad?), precios (¿cuál es más barata?), y luego comparar ambas comparaciones, para ver si "a más área, menos o igual área hay más, menos o igual precio" (relativizar). También precios con áreas o áreas con precios; o lo que es lo mismo, poner el precio en relación con el área o viceversa (relativizar), obteniendo así los costes unitarios (o su relación inversa) de cada oferta. En la comparación de precios con áreas se pone de manifiesto la relación invariante que es característica de las razones. En este caso el coste unitario de una pizza mediana es el mismo que el de dos, el cociente entre el precio de una pizza mediana y su área es el mismo que el cociente del precio de dos pizzas medianas y el área de las dos pizzas. Un distractor para percibir esta invariancia es que la oferta solo es aplicable si se compran dos pizzas medianas.

Dificultades previsibles en esta tarea pueden ser que los alumnos no recuerden la fórmula del área del círculo. También es de esperar que el uso de la palabra "mejor" en la pregunta genere algún tipo de valoración subjetiva, ya que es un término no definido.

Análisis preliminar de las relaciones entre cantidades de la tarea "pizzas"

Fenomenológicamente, la tarea se puede resolver como en las parejas de exposiciones.

Par de Exposiciones. Ω = {Pizza familiar, Pizza mediana}

Ω_i: asigna una cantidad a cada uno de los elementos de Ω

La tabla de doble entrada (tabla 1) ayuda a visualizar las relaciones entre cantidades y el proceso de resolución.

La comparación de las razones externas muestra que la pizza familiar cuesta en relación a su superficie menos que la mediana (comparación cuantitativa grosera), o la mediana cuesta $\frac{0.021}{0.014} = \frac{3}{2} = 1.5$, un tercio más que la familiar (comparación cuantitativa precisa).

Por otro lado, aunque la comparación de razones internas no es lo habitual en las parejas exposiciones, no deja de ser posible en este caso, y lo que muestra es que por casi el mismo precio en la familiar dan más pizza (cuantitativa grosera), o de modo más preciso: $\frac{1.39}{0.94} \approx \frac{3}{2}$ que por el mismo precio con la familiar dan un tercio más de pizza.

Tabla 1

	Pizza familiar	Pizza mediana	Comp. internas →
ω1: Ω1 → Coste	Cf= 27.95	Cm = 2·14,95	$\frac{C_f}{C_m} = \frac{27.95}{2 \times 14.95} = 0.94$
ω2: Ω2 → Área	Sf = π·252	Sm = 2·π·152	$\frac{S_f}{2S_m} = \frac{\pi\left(\frac{50}{2}\right)^2}{2\pi\left(\frac{30}{2}\right)^2} = 1.39$
Comp. Externas ↓	$\frac{C_f}{S_f} = \frac{27,95}{\pi 25^2} = 0,014 \frac{€}{cm^2}$	$\frac{C_m}{S_m} = \frac{2 \cdot 14,95}{2 \cdot \pi 15^2} = 0,021 \frac{€}{cm^2}$	

Una lectura diferente, que en esta tarea funciona por las diferencias en el tamaño de los datos, ya que los datos lo favorecen, es la comparación por diferencias, más grosera que las anteriores, ésta muestra que en la familiar dan más área por menos precio: C_m-C_f=29.90-27.95; S_m-S_f=625π-450π.

Criterios para el análisis de las respuestas de los estudiantes a esta tarea

De acuerdo con lo anterior, los criterios para el análisis de las respuestas son: perspectiva absoluta versus relativa, razones internas o externas (comparadas de forma grosera o precisa), pareja de exposiciones (fenomenología) y estrategias alternativas.

Ejemplos de resoluciones de los estudiantes a la tarea "pizzas"

A parte de las estrategias de las resoluciones de los estudiantes que se corresponden con el análisis de la tabla 1, se muestran a continuación 3 ejemplos representativos de otras resoluciones especialmente significativas.

Ejemplo 1: Comparación de diferencias

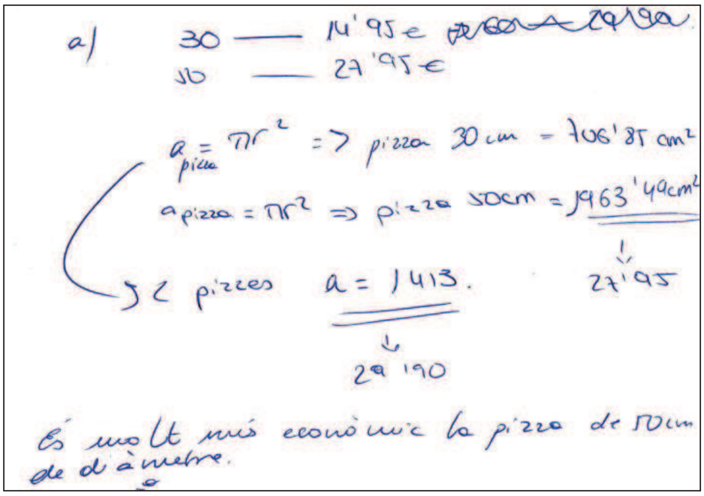

Figura 2. Alumno A1 Bachillerato

Este alumno calcula, por un lado, el área de las pizzas en cada una de las opciones (Familiar: 1963.48cm^2 y Medianas: 1413cm^2) y, por otro lado, los costes (Familiar: 27.95€ y Medianas: 29.90€). Compara los costes entre sí y las área entre sí, en términos absolutos (mayor, menor, más, menos). Concluye que la pizza de 50cm de diámetro es más económica.

El enfoque adoptado es absoluto (no usa razones) y, aunque obtiene una solución correcta, se debe a que los datos lo favorecen en este caso. Se trata de una comparación grosera.

Ejemplo 2: Valor unitario y linealidad

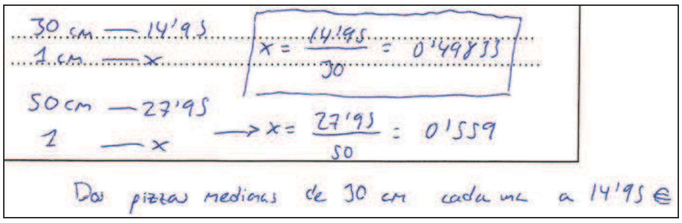

Figura 3. Alumno 7 Máster

Este alumno calcula el coste de 1cm de pizza en cada una de las dos opciones: familiar y mediana, mediante una regla de 3. Compara los resultados y concluye que es mejor la oferta de dos pizzas medianas ya que el coste unitario que obtiene es menor que el de la pizza familiar.

Teniendo en cuenta los criterios de análisis definidos, se observa que el estudiante adopta una perspectiva relativa. Las razones son externas, propias de una pareja de exposiciones. Y las comparaciones realizadas son externas. La estrategia es la del valor unitario lo que sería adecuado si hubiera considerado las áreas en lugar de los diámetros. La dificultad de este estudiante es lo que se conoce como "linealidad" (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006).

Ejemplo 3: Proporción en las diferencias y linealidad

Es una estrategia imprevista (figura 4) observada en las respuestas de los estudiantes:

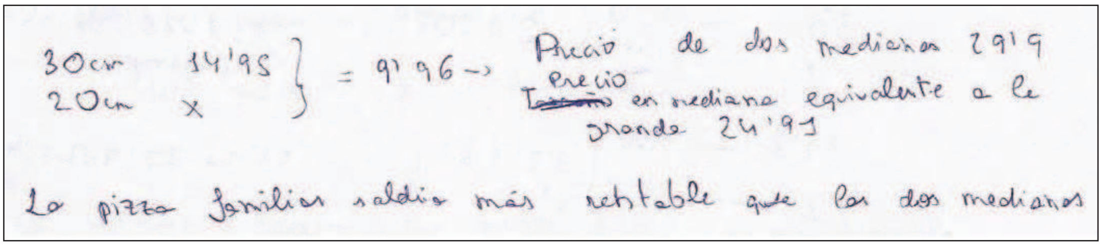

Figura 4. Alumno 4 Magisterio

El estudiante, tras calcular la diferencia de diámetros (50 - 30 = 20), plantea una regla de 3 (30/20 = 14.95/x ó 30/14.95 = 20/x → x = 9.96) para hallar lo que costarían los 20cm de más que tiene la pizza familiar en proporción al coste de una mediana, y de aquí obtiene, por adición, lo que debería costar la pizza familiar. Compara este coste con el de la oferta y concluye que la pizza familiar saldría más rentable que las dos medianas.

El estudiante interpreta mal los datos obtenidos. Con sus datos, la oferta más rentable es la de las pizzas medianas. Esta estrategia sería correcta si el alumno no se hubiese centrado en la "linealidad", usa los diámetros en lugar de las áreas. A esta estrategia se le puede denominar "Proporción en las diferencias" porque consiste en averiguar si la diferencia de tamaño se corresponde con la diferencia de precios.

Componentes críticas de la tarea "cervezas"

Se presenta a los estudiantes una imagen que corresponde a dos ofertas de cerveza. El texto dice: "Normalmente los botes de cerveza son de 1/3 de litro o lo que es lo mismo, 33'3cc. En una oferta me descuentan el 15% del precio y en la otra me regalan un 14% de cerveza. ¿Cuál es más caro?".

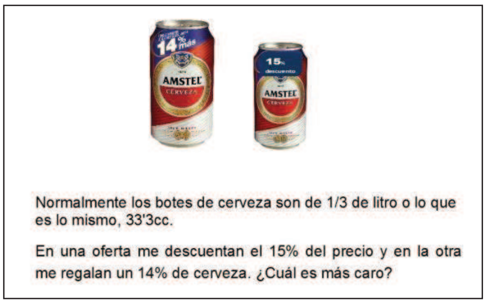

Figura 5. Tarea Cervezas

Los datos vienen dados mediante razones normalizadas a porcentajes, formuladas con referentes distintos: en el bote grande el porcentaje del 14% se refiere a un regalo sobre el volumen normal de 33,3cc; mientras que en el bote pequeño el porcentaje del 15% se refiere a un descuento en el precio de un bote normal de 33,3cc.

El objetivo de esta tarea no es comparar las dos razones: 14% y 15%, en términos absolutos, para saber qué porcentaje es mayor o menor, sino comparar esas razones en relación con sus referentes (relativizar). Ésta es una componente crítica de la tarea.

Pero dado que esos referentes son distintos, se requiere efectuar una *conversión de normalizaciones* para poder visualizar la comparación, reformulando una de las dos razones normalizadas en la forma en que está dada la otra, es decir, o el regalo en descuento o el descuento en regalo. Ésta es otra componente crítica de la tarea.

Además de las componentes que se han mencionado, se distinguen las siguientes:

1. Calcular: cómo quedan los volúmenes de las latas después del regalo y del descuento y los costes de cada lata después de aplicar el regalo y el descuento, usando un precio imaginario, aunque esto último no es necesario.
2. Comparar: costes con volúmenes o, lo que es lo mismo, poner el coste en relación con el volumen (relativizar), obteniendo así los costes unitarios (o la relación inversa). También se puede comparar el volumen que se paga en relación con el volumen que se regala o descuenta en cada caso o el volumen que se regala y el que se descuenta en relación con el volumen total de cada lata (o la relación inversa). Al realizar esta última comparación se homogeneízan los descuentos. Notar que en el caso del bote pequeño éste es un dato del problema. Aquí es crucial homogenizar las razones revirtiendo el regalo en descuento o viceversa, para ello la normalización del todo a 100 o a 1 hace los cálculos y las comparaciones más fáciles.

Análisis preliminar de las relaciones entre cantidades de la tarea "cervezas"

La homogeneización de las razones se puede hacer de varias maneras: por un lado, "14% de 33,33cc, es 4.66cc. Un regalo de 4.66 sobre 33.33, equivale a un descuento de 4.66 sobre 38 (33.33+4.66), y esto es un descuento del 12,28%". Por otro, la normalización a 100 hace más fácil los cálculos: un regalo del 14% de 100 equivale a un descuento de 14 sobre 114, y esto es un descuento de 12.28%. Igualmente, un descuento del 15% sobre 100 equivale a un regalo de 15 sobre 85, y esto es un regalo de 17,65%.

Fenomenológicamente, la tarea se puede resolver como parejas de composiciones:

Par de Composiciones. Ω = {parte de pago, parte de regalo}.

ω_1 (pago) = 100cc, ω_1 (regalo) = 14cc; ω_2 (pago) = 85cc, ω_2 (regalo) = 15cc

La tabla de doble entrada (tabla 2) ayuda a visualizar las relaciones entre cantidades y el proceso de resolución.

Tabla 2

	Pago	Regalo	Comp. internas →
ω1: Ω1 → BG	PG = 100	RG = 14	$\frac{R_G}{P_G} = \frac{14}{100} = 0{,}14$
ω 2: Ω2 → Bp	Pp = 85	Rp = 15	$\frac{R_p}{P_p} = \frac{15}{85} = 0{,}176$

La comparación de razones internas: 0.14 y 0.17, muestra que el regalo en relación con lo que se paga es mayor en el bote pequeño.

Par de Exposiciones. $\Omega_1 = \Omega_2$ = {bote grande, bote pequeño}

ω_1: $\Omega_1 \rightarrow$regalo bote grande 14, regalo bote pequeño 15

ω_2: $\Omega_2 \rightarrow$me llevo bote grande 114; me llevo bote pequeño 100

La tabla de doble entrada (tabla 3) ayuda a visualizar las relaciones entre cantidades y el proceso de resolución.

Tabla 3

	Bote grande	Bote pequeño
ω1: Ω1 → regalo	RG = 14	Rp = 15
ω 2: Ω2 → llevo	LlG = 114	Llp = 100
Comp. externas ↓	$\frac{R_G}{Ll_G} = \frac{14}{114} = 0.12$	$\frac{R_p}{Ll_p} = \frac{15}{100} = 0.15$

La comparación de razones externas, 0.12 y 0.15, permite observar que en el bote pequeño el regalo en comparación con lo que se lleva es mayor que en el bote grande.

Criterios para el análisis de las respuestas de los estudiantes a esta tarea

De acuerdo con lo anterior, los criterios para el análisis de las respuestas de los estudiantes se siguen de los siguientes enfoques de resolución: perspectiva absoluta versus relativa, razones internas o externas (comparadas de forma grosera o precisa), parejas de exposiciones o de composiciones (fenomenología), normalización y conversión de normalizaciones, y estrategias alternativas.

Ejemplos de resoluciones de los estudiantes a la tarea "cervezas"

Análogamente a como se ha hecho en la tarea anterior, se muestran a continuación algunos ejemplos representativos de las distintas resoluciones de los estudiantes que se identifican al hacer el análisis con los criterios anteriores diferentes a los de la tabla 1.

Ejemplo 1: Comparación de aumentos

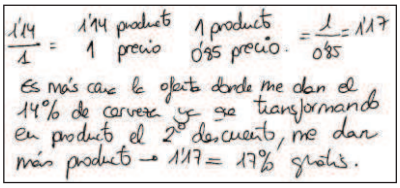

Figura 6.Alumno 35 Máster

El alumno toma como unidad el bote de un tercio de litro de cerveza. Un regalo del 14% equivale a un bote de 1.14 y un descuento del 15% equivale a un bote de 0.85. A continuación compara en cada lata lo que se lleva en relación a lo que paga, obteniendo así los tantos por ciento de aumento (Lata grande: 1.14/1 = 1.14 → 14%; Lata pequeña: 1/0.85 = 1.17 → 17%). Concluye que "es más cara la oferta donde me dan el 14% de cerveza ya que transformando en producto el 2º descuento, me dan más producto → 1.17 = 17% gratis".

Tabla 4

	Bote grande	Bote pequeño
ω1: Ω1 → llevo	LlG = 1.14	Llp = 1
ω2: Ω2 → pago	PG = 1	Pp = 0.85
Comp. externas ↓	1.14/1 = 1.14	1/85 = 1.17

Como se observa en la tabla 4, el alumno normaliza a 1 y calcula razones externas, lo que es propio de la pareja de exposiciones, comparándolas de forma grosera. En lugar de poner lo que le regalan en relación a lo que se lleva, compara lo que se lleva en relación a lo que paga. Su enfoque es relativo. Su estrategia es convertir normalizaciones, en particular, tantos por ciento de aumento.

Ejemplo 2: Uso de proporciones

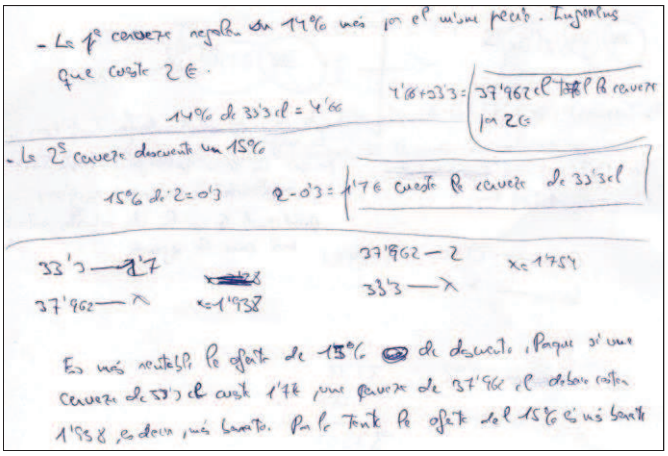

Figura 7. Alumno 27 Magisterio

Este alumno fija un precio arbitrario de 2€ a los 33,3 cc del tercio de cerveza. Halla el volumen del bote aumentado (37, 962 cc), halla el coste del bote descontado el 15% (1.7€) y plantea una regla de tres para hallar lo que costaría el bote grande si guardara proporción con el precio del bote tras el descuento: $\frac{33\acute{}3}{1\acute{}7} = \frac{37\acute{}962}{x}$, como resultado obtiene que el bote grande debería costar 1’938€. Repite el proceso para calcular cuánto costaría el bote reducido normal si su coste guardara proporción con el coste del bote grande, y obtiene que valdría 1’75€. Concluye que "es más rentable la oferta de 15% de descuento, porque si una cerveza de 33.3 cl cuesta 1.7€, una cerveza de 37.962 cl debería costar 1.938€.

Esta estrategia es similar a "proporción en las diferencias" observada en la tarea pizzas. Consiste en averiguar si la diferencia de tamaño se corresponde con la diferencia de precio. El enfoque no es "normalizador" tal y como demanda la tarea, sino que es un efecto de la fijación en la regla de 3.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En la tarea de las pizzas se observa un aumento de las respuestas en que se relativiza a medida que se avanza de nivel (Bach.: 17/43; Mag.: 38/48; Mást.: 29/36). Entre los alumnos de bachillerato, las respuestas más habituales son de tipo aditivo (17/43), sin relativizar. En los alumnos de magisterio se observa una fijación en la "linealidad" (41/48) y en los alumnos del máster en el cálculo del valor unitario (14/36). Es relevante que hay muchos estudiantes que no perciben que el número de ítems de pizzas medianas se cancela al calcular el valor unitario, es decir, que la razón es invariante. Este es un aspecto a considerar en futuras investigaciones.

En la tarea de las cervezas, al igual que ocurre en las pizzas, los alumnos de bachillerato no suelen normalizar ni relativizar (25/43). Los alumnos de magisterio suelen comparar los datos absolutos (13/43) mientras que los del máster suelen usar el valor unitario (8/36), y solo unos pocos del máster (3/38) homogenizan las normalizaciones. La renuencia a usar la conversión de normalizaciones hace pensar en un fallo en la enseñanza que habrá que tener en cuenta en futuras investigaciones. Es relevante destacar que la mayor parte de los participantes necesitaban conocer el coste de cada lata por lo que asignan un precio arbitrario al bote de cerveza.

En cuanto a las conclusiones globales del estudio, se distingue que: no se percibe la invariancia de la razón; además, de la misma manera que hay una predisposición a calcular mediante la regla de 3 en las tareas de proporción, hay una predisposición a usar la estrategia del coste unitario en estas tareas de desproporción, aunque en el caso de las cervezas no sea necesaria; también se observan más dificultades cuando se realizan comparaciones de tipo unidades por euro que a la inversa, es decir, euros por unidad; y, finalmente, se muestran dificultades para aceptar que el tanto por ciento de aumento puede interpretarse como un descuento.

Referencias

Cramer, K. and Post, T. (1993). Proportional Reasoning, *The Mathematics Teachers, vol.86*, pp. 404-407.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* (Textos seleccionados, Traducción Luis Puig). México, D. F. Dpto de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Gómez, B.; Monje, J.; Pérez-Tyteca, P. y Rigo, M. (2013). Performance on ratio in realistic discount task. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 293-302).

Hart, K. M. (1981). Ratio and Proportion. *Children´s Understandings of Mathematics, 11-16,* John Murray Ltd., London.

Ilany, B., Keret, J. and Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio & proportion in pre-service teacher education, *Proceedings of the PME 28, vol. 3*, pp. 81-88.

Lesh, R., Post, T. and Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 93-118, Reston, VA: NCTM.

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 393-401). Bilbao: SEIEM.

Streefland, L. (1985). Search for the Roots of Ratio: Some Thoughts on the Long Term Learning Process (Towards...a Theory), *Educational Studies in Mathematics, vol. 16*, 1, pp. 75-94.

Valverde, A. F. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander: SEIEM.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación*, [Monografía IX]. pp. 115-138 (Hay una versión precedente del 2003 en *Educational Studies in Mathematics*, *vol. 53*, pp. 113-118).

[1] Esta aportación se sustenta en un proyecto de investigación financiado por el MEC. Ref.: EDU2009-10599 (subprograma EDUC).