El número en la escuela

Marta Torrado P.
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia

Carmen Andrade
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia

Wilson Gordillo T.
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia

Mario E. Thiriat
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia

Resumen

El artículo "El Número en la Escuela" presenta avances de investigación realizados por estudiantes de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como parte de sus respectivos trabajos de grado. El primero, referido a la formación de docentes de preescolar y primeros grados de educación primaria sobre Estructura Aditiva, expone la forma en que abordar dicha estructura contribuye al proceso de construcción del Número Natural en los primeros grados de escolaridad. El segundo, basado en el modelo del profesor Carlo Federici, estudia la construcción de los números racionales como operadores sobre magnitudes, específicamente, sobre longitudes cuya representación son los segmentos. Y el tercero, permite reflexionar sobre el acercamiento al concepto de número real con estudiantes de Secundaria y Media.

Introducción

Sin pretender un desarrollo exhaustivo del tema central de esta ponencia, "El Número en la Escuela", la presentación de avances de investigación realizados por estudiantes de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional como parte de sus respectivos trabajos de grado, que componen este artículo, permite hacer un recorrido, desde el Preescolar y los primeros grados de Educación Primaria hasta la Educación

Secundaria y Media así como un acercamiento al tratamiento del Número desde el Natural hasta el Real.

Las diferencias de enfoque, procedimiento y estilo -entre otras- que el lector encontrará en los tres apartados de este artículo, obedecen con claridad a que presentan avances de tres investigaciones diferentes, las cuales únicamente comparten que centran sus objetivos en la aproximación a la construcción de números y que lo hacen en el contexto escolar. Estos puntos de convergencia nos alientan a presentarlos uno después del otro, sin pretender una unidad, que no poseen.

Talvés sean más numerosos e intensos los puntos de divergencia entre los avances pero, sin intentar desconocerlos, los valoramos porque quizás reflejan la complejidad del entorno en el cual se construye el número en la escuela.

1. Aportes a la Construcción del Número Natural, a Través de la Estructura Aditiva, en el Preescolar y los Primeros Grados de la Escuela Primaria

Marta Cecilia Torrado Pacheco

La construcción del Número Natural inicia muy temprano, con actividades informales de conteo realizadas en el entorno cultural de los niños. A través de preguntas como ¿cuántos años tienes? o con típicas manifestaciones como “a la una, a las dos y a las tres”, los niños retienen la serie numérica oral, algunas representaciones (con los dedos por ejemplo) y el valor de uso del número en su contexto. En el preescolar y en los primeros grados de la escuela primaria estos recursos informales se van complejizando y haciendo cada vez más formales.

El proceso de construcción de la noción de número natural, en su inicio, está estrechamente ligado con la medida de colecciones de objetos, en contextos en los cuales el número expresa cardinales, es decir, la cantidad de objetos que posee una colección. Basada en el conteo de los objetos o de sus representaciones.

En un principio, estas representaciones pueden ser también concretas (así como, en el origen histórico del conteo, se usó una piedra por cada oveja para contarlas) y se van combinando con representaciones gráficas, que incluyen desde lo icónico hasta lo simbólico. El uso de una u otra representación debería expresar la apropiación del significado que le da a la cantidad quien las usa. De esta manera los numerales o representaciones simbólicas del número, que el niño toma de su entorno socio-cultural deberían ser utilizadas sólo cuando estén dotadas de significado para él.

La cotidianidad ofrece al niño múltiples situaciones que incluyen números en sus contextos cardinal y ordinal, las cuales contribuyen a la construcción de la noción de número natural; en este artículo nos vamos a referir, únicamente, a **situaciones aditivas**, ligadas a la construcción de la **estructura aditiva**.

El Número Natural en Situaciones Aditivas.

Dado que los conceptos no constituyen unidades aisladas de información sino que se relacionan entre sí, conforman verdaderas redes conceptuales. Estas relaciones dan lugar a nuevas estructuras, que son a su vez, la base para la construcción de otras estructuras claves para la formación matemática de los alumnos. De hecho, "las estructuras conceptuales constituyen la esencia del conocimiento matemático organizado, los hechos y destrezas toman sentido y significado dentro de ellas"(Rico, et al, 1997 pg. 34). Una de esas estructuras básicas es la estructura aditiva y "la entendemos como las estructuras o las relaciones en juego que están formadas únicamente de adiciones y sustracciones"(Vergnaud,G. 1991 pg. 161).

Construir la "estructura aditiva"es un acto de doble vía que consiste, por una parte, en "integrar dentro de una misma estructura conceptual acciones de la vida cotidiana expresables en forma diversa: reunir, agregar, añadir, etc. o bien quitar, retirar, desagregar, etc. ....(y por otra parte) aplicar las características de esas estructuras conceptuales a situaciones problemáticas tanto a través de sumas y restas como del uso de algoritmos"(Maza, 1989, pp. 17).

En la matemática de la Educación Primaria, la suma y la resta, como manifestaciones más sencillas de la "estructura aditiva", se consideran operaciones binarias entre números naturales estrechamente relacionadas con acciones realizadas sobre objetos. Entre las operaciones con números y las acciones con objetos, existe un homomorfismo el cual "otorga"a los números la función de cardinal de los conjuntos de los objetos puestos en juego o de medida. Las sumas y restas que los niños abordan en la escuela primaria se realizan sobre medidas de conjuntos de objetos, sobre representaciones gráficas o verbales de los mismos o directamente sobre los objetos. Las medidas de conjuntos, generalmente, se componen para formar nuevas medidas de conjuntos, así:

La suma es una aplicación binaria de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada par de naturales (a, b) asocia un natural c, donde $a = \#(A)$, $b = \#(B)$ y $c = \#(A \cup B)$, siendo A y B conjuntos disyuntos, o $c = \#(A \cup B) - \#(A \cap B)$, en caso de no serlo.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a, b) &\to c \end{aligned}$$

En el nivel escolar al cual nos estamos refiriendo, estas nociones se expresan mediante representaciones y modelos concretos.

Por representación entendemos "las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes". . . . y por modelo, "esquemas o materiales estructurados, conectados mediante leyes o reglas, que ofrecen una imagen isomorfa de un determinado concepto respecto a determinadas relaciones y propiedades"(Castro, 2000, pg 96)

Son múltiples los modelos y representaciones que pueden considerarse para las operaciones aditivas: contextos numéricos que pueden incluir, o no, estados dinámicos que involucran operadores; modelos gráficos o físicos y, en cada caso, se pueden utilizar diferentes materiales y procedimientos.

***Modelos Cardinales**, entre los cuales se cuenta con diagramas utilizados en la teoría de conjuntos. Estos diagramas expresan generalmente situaciones aditivas estáticas, que representan la relación parte - todo ya sea entre los elementos de un par de conjuntos disyuntos o por un conjunto y un subconjunto del primero, en el cual, por complementariedad se considera otro subconjunto. Estos modelos evidencian el uso de la medida o cardinal de los conjuntos explícitamente.

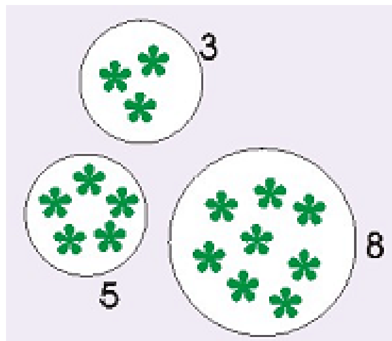


Figura: 1

***Modelos lineales**, entre los cuales juega un papel fundamental la recta numérica. "Según Resnick (1983) la recta numérica es un esquema mental que integra la sucesión de términos que sirven para contar, y que a su vez expresan el cardinal, al menos de pequeñas cantidades que se perciben de un solo golpe de vista."(citado por Castro. op cit pag 26). Sobre la recta numérica pueden expresarse medidas y situaciones que incluyen acción, a modo de saltos de diferente magnitud y sentido.

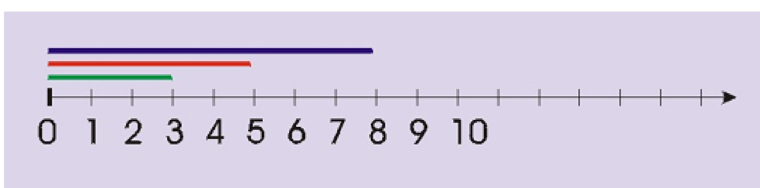


Figura: 2

***Modelo con Medidas**, principalmente de longitudes, que se pueden trabajar con material concreto como las regletas de Cuisenaire, o sobre pesos a través del uso de balanzas. Con regletas, se pueden construir trenes de dos o más regletas y medir su longitud con regletas mayores, representando reunión o buscando el complemento de una regleta menor respecto a una mayor, representando complemento. De hacerse con la relación inversa, se puede manifestar la existencia de números negativos al mostrarse "el faltante"de la longitud menor respecto a la mayor. El uso de balanzas resulta especialmente importante para representar equilibrio con la igualdad entre dos o más sumandos colocados a un lado con un único peso, el resultado, colocado al otro lado.

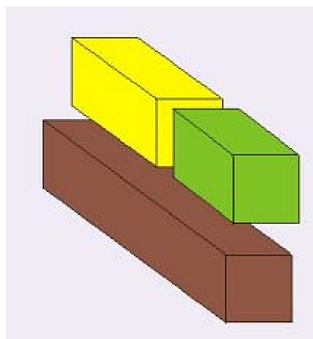


Figura: 3

***Modelos Funcionales, en los cuales se hace evidente el carácter dinámico u operatorio de las situaciones aditivas. En estos, se tiene un estado inicial, o de partida, que expresa, generalmente, la medida de un conjunto de objetos, un evento transformador (de aumento o disminución) y un estado final resultante, también una medida de la misma naturaleza que la inicial, pero transformada. Este modelo supone una iniciación al concepto de función; trabajarlo adecuadamente en los niveles iniciales de escolaridad, será de mucha utilidad en operaciones posteriores.**

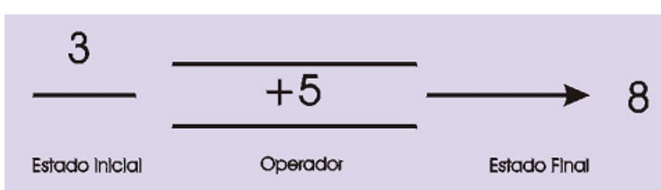


Figura: 4

El número, como cardinal a través de situaciones aditivas, se hace presente a través de **problemas verbales de estructura aditiva**; trabajar con ellos en el nivel educativo en referencia, permite entender la relación que tiene el número natural en situaciones aditivas con los fenómenos descritos por los problemas y la forma como actúan los escolares sobre los problemas evidencia el poder que adquiere el niño para actuar sobre el número.

Problemas de Enunciado Verbal con Estructura Aditiva.

Se entiende por problema, una situación o fenómeno real que puede ser modelada o organizada con un concepto o estructura matemática, en la cual, como no todo es conocido es posible la formulación de una o más preguntas. El problema plantea un reto intelectual, cuando el alumno se dispone a buscar la(s) solución(es). Si la modelación de un problema involucra operaciones aritméticas, se conoce como problema aritmético. Además, es posible distinguir problemas de enunciado verbal, numérico o gráfico según el tipo de representación que utilicen. Por tanto, en este artículo entenderemos por problema de enunciado verbal con estructura aditiva, aquellos, expresados en lenguaje verbal que involucran únicamente sumas y/o restas.

Se suele hacer también la aclaración de que un problema aritmético de enunciado verbal es simple si incluye en su modelación una sola operación y compuesto si usa dos o más de ellas. Los problemas simples de enunciado verbal con estructura aditiva, desde su composición lingüística, se clasifican según las palabras involucradas (palabras claves); desde su composición semántica (combinación, cambio, comparación o igualación); y desde su sintaxis (según el lugar que ocupa el valor desconocido) (Castro, 1992). Estas clasificaciones bien pueden combinarse con otras, de orden cognitivo, que "se reflejan en el modo en que los niños piensan sobre los problemas y los resuelven"Estas puede entenderse como "el tipo de acción o de relaciones descritos en los problemas"(Carpenter, 2001, pp. 7).

Tomaremos una clasificación de Carpenter (2001), según la cual, los problemas pueden ser:

Cambio creciente, en los que la medida inicial aumenta, para dar origen a la medida final, por una acción transformadora.	**Cambio decreciente**, en los que la medida inicial disminuye, por una acción transformadora.
Combinación, en los cuales se establecen relaciones estáticas entre la medida de un conjunto particular y las medidas de dos subconjuntos de este.	**Comparación**, que describen relaciones entre cantidades aisladas, generalmente la comparación entre las medidas de dos conjuntos disyuntos.

Tabla: 1

Nótese que esta clasificación, de carácter semántico, hace referencia primordialmente al significado de la situación que describe el problema, veamos ahora a un **sujeto que actúa** sobre ellos para buscar su solución.

La resolución de problemas, se entiende como un proceso conformado por los diferentes modos de emprender búsquedas de la información incompleta en una situación. Dicho proceso parte de la reformulación del problema, enunciado verbalmente, a términos "operatorios", para lo cual, el sujeto requiere del uso de representaciones y de modelos que evidencien las relaciones existentes entre la información (numérica en este caso) que arroja el fenómeno descrito por el problema.

La modelización, que relaciona objetos con nociones matemáticas permite identificar el concepto matemático con el cual se organiza la situación y da pie a la elección de la estrategia para hallar la solución. A partir de allí se procede a construir, confrontar y a responder la pregunta formulada (Castro, 2000 pp. 97).

Las **estrategias utilizadas por los niños** para solucionar problemas de suma y resta evolucionan en el tiempo. De hecho, independientemente de la intervención instruccional de parte de la escuela, los niños de los primeros grados de primaria utilizan estrategias informales de modelación de los problemas aditivos. Estas van, desde la utilización de objetos concretos (contadores o dedos) para modelar directamente las acciones o las relaciones descritas en cada problema, hasta la aplicación de regularidades numéricas a partir de las cuales hacen deducciones, pasando por estrategias basadas en el conteo (Carpenter, 1999).

En los modelos directos se representan de nuevo los conjuntos de objetos que han dado origen a las medidas involucradas en el problema y, sobre los elementos del modelo, se repiten las acciones que se describen en el, como si se retornara al inicio mismo de la situación. En estos casos se usa, generalmente, el conteo de cada una de las medidas antes y después de la acción de reunir, quitar o agregar.

Ejemplo 1 (Problema 1). *Había seis ranas sentadas en las hojas que flotaban en el agua de un lago. Ocho ranas más se reunieron a ellas. ¿Cuantas ranas se juntaron entonces?*

Resolución por modelado directo:
Niño 1. Dibuja seis bolitas a un lado y luego ocho más, separadas pero muy cerca de allí, repitiendo la serie oral a la vez que iba dibujando. Finalmente y empezando por las primeras contó todos los dibujos y concluyó: son 14.

Esta estrategia de modelado directo se hace cada vez más sofisticada, economizando trabajo al resolutor, al considerar globalmente una de las cantidades y contar a partir de ella la otra.

Ejemplo 1 (Problema 1.). *Niño 2. Dijo 6 en voz alta y siguió contando 7,8,9... a la vez que iba levantando los dedos hasta completar 8 dedos levantados y llegar a decir 14 oralmente.*

Esta estrategia sufre una nueva complejización cuando se le suma la memorización de algunos "hechos numéricos básicos"y se realizan deducciones a partir de ellos.

Ejemplo 1 (Problema 1). *Niño 3. Dijo 8 y 8 son 16, pero como son 8 y 6, pues da 14.*

Ejemplo 2. *Otro ejemplo, en el cual se expresa otra de tales deducciones, denota además la utilización (así sea parcial) de la propiedad asociativa de la relación binaria. Para sumar 6+5 se parte de la suma doble* 5+5 *(considerada como de más fácil memorización por la asociación existente entre ella y los dedos de las dos manos (Baroody, 1994)), luego se descompone* $6 = 1 + 5$. *Así:*

$$6 + 5 = (1 + 5) + 5 = 1 + (5 + 5) = 1 + 10$$

Demostrando que "los modelos tienen la función de aumentar el grado de abstracción esquematizando gráficamente las relaciones y acciones inherentes al problema... (los modelos) constituyen el eje rector del proceso de desarrollo de estrategias"(Maza, C. 1989 pp. 60).

Hemos descrito y ejemplificado tres grupos de estrategias utilizadas por el niño al enfrentarse a un problema: modelado directo, conteo a partir de un sumando y deducciones a partir de conocimientos memorizados; Carpenter (1999) las llama estrategias de modelación , de conteo y hechos deducidos y las relaciona con los tipos de problema de enunciado verbal con estructura aditiva por el mismo clasificados, algunas de las cuales se pueden resumir así:

Tipo de problema	Estrategias de modelización	Estrategias de conteo	Hechos deducidos
Cambio Creciente	Juntar todos.Se forman los dos conjuntos, se juntan y se cuentan todos. Añadir hasta. Se forma un conjunto y se le van añadiendo objetos hasta completar el total	Conteo a partir del primer sumando. Conteo a partir del sumando mayor. Contar hasta llegar al sumando mayor.	Memorización de algunas combinaciones básicas Realización de deducciones a partir de ellas.

Cambio decreciente	Quitar Se forma el conjunto total, se retira la cantidad a quitar y se cuenta lo que queda.Quitar hasta Se forma el conjunto total y se van contando objetos a medida que se quitan. El número de objetos quitados es la respuesta.	Conteo regresivo (o hacía atrás) a partir del mayor. Conteo regresivo hasta el menor	Memorización de algunas combinaciones básicas Realización de deducciones a partir de ellas.
Combinación	Juntar todos	Conteo a partir de.	Idem.
Comparación	Correspondencia uno a uno	No específica	Idem.

Tabla: 2

Sin embargo, hay ocasiones en las cuales "no existe ninguna estrategia dominante que se pueda hacer corresponder a las acciones o a las relaciones descritas en los enunciados de los problemas. En los problemas de comparación por ejemplo, (con la cantidad comparada desconocida) los niños suelen utilizar la estrategia de juntar todos o algunas de las de conteo progresivo"(Carpenter, 1999 pp. 30), mientras que en otros, usan estrategias de añadir, quitar u otras. En los problemas de cambio creciente con la cantidad inicial desconocida, suele recurrirse a ensayo y error.

No se pueden establecer estándares ni en la edad ni linealidad en las secuencias con las que los niños utilizan una u otra estrategia. En la revisión realizada por Linda Dickson et al (1991), sobre investigación en este campo, es posible encontrar argumentos para creer que el acercamiento a situaciones aditivas se realiza tempranamente y que, siempre y cuando se les presenten adecuadamente, "en casos sencillos, hasta los niños de tres años son capaces de resolver con exactitud problemas de suma y resta, con tal que les sean planteados en un contexto concreto"(Dickson, 1991, pp. 203) y que "los niños de preescolar son capaces de resolver sencillos problemas de adición y sustracción, incluso sin apoyo perceptual, aunque muy pocos puedan resolver problemas abstractos donde solo intervengan números"(Dickson, 1991, pp. 217).

Existen otros factores asociados como que la probabilidad de error aumente con el tamaño de los números, posiblemente por la imposibilidad de usar la imagen mental que los niños tienen de números pequeños. Se cree que en la franja de edad comprendida entre los 6 y 8 años de edad, los niños realizan las más complejas adquisiciones, perfeccionando las estrategias de solución, hasta desligarlas del conteo. El ejemplo 2 refleja la comprensión de las propiedades de la suma; en otros casos, cuando para contar "a partir de"se globaliza el sumando mayor, se evidencian destrezas en el reconocimiento del orden entre números. Se pueden oir justificaciones como ... "ya que 8 y 2 son 10, 8 y 6 son 10 y los 4 sobrantes, lo que hacen 14"(Dickson, 1991, pp. 207).

Hasta aquí, hemos visto al número natural estrechamente vinculado a los problemas de enunciado verbal con estructura aditiva, sin embargo, existen otros contextos que acercan el número a la estructura aditiva independientemente de dichos problemas.

Otros Contextos.

"La situación de suma y resta, entre números naturales, está basada en la idea de que juntando elementos a una colección dada esta aumenta su número y separando elementos disminuye"(Castro, 1999, pp. 23), pero son múltiples las situaciones en las cuales se encuentran involucradas, como la construcción de la secuencia numérica a través del conteo, inicialmente para obtener el siguiente $(n+1)$ o el anterior $(n-1)$ en la misma, para "saltar"de dos en dos $(n+2)$, realizar sumas con pares $(n+n)$ y finalmente cualquier situación de la forma $n + m$.

De hecho, la suma y la resta están presentes en las aproximaciones hechas por el niño al concepto de número, 2+3 puede evocar el proceso de adición de los números o el concepto de suma, "dado que la simbología juega un papel muy importante en la encapsulación del concepto de número; la finalidad es entonces que el niño logre ver esta identidad ($a+b = c$) como un todo"(Arana et al, 1997, pp. 67).

Así, el número 8, por ejemplo, incluye el proceso de contar 8 (ya sea contando todo o seguir contando a partir de una parte de 8) y la colección de representaciones como 5+3, 2+4, 10-2, etc. indicando la manera flexible en que 8 puede ser descompuesto y recompuesto usando diferentes procesos. Dentro de estos contextos, resulta particularmente interesante examinar los problemas de cambio por las particularidades que presentan.

Problemas de Cambio

Hemos afirmado que en los problemas de enunciado verbal con estructura aditiva, el número aparece en relaciones ternarias entre medidas de colecciones de objetos, que por circunstancias reales se transforman, sin embargo existen múltiples acciones realizadas sobre objetos, susceptibles de ser representadas por situaciones aditivas, en las cuales los tres objetos involucrados en la relación ternaria en referencia no son medidas. Es el caso particular de los *problemas de cambio*, en los cuales se tiene: una medida como estado inicial, una medida como estado final y una acción transformadora que puede ser una pérdida ($-k$) o, una ganancia ($+k$), según si el cambio efectuado para dar origen a la medida final es de aumento o disminución de la medida inicial. Según esto, la transformación producida sobre el estado inicial tiene una magnitud y un sentido, pero no es una medida de la misma naturaleza que lo son los estados inicial y final en cuestión.

Estas situaciones se describen con mayor precisión desde su estructura matemática, a través de una operación unitaria en la cual la acción transformadora es un operador sobre medidas.

$$
\begin{array}{ll}
+k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \quad -k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
\qquad a \to a + k & \qquad a \to a - k \\
& \qquad \text{Siempre que a sea mayor o igual a } k.
\end{array}
$$

Produciendo, según el caso, un aumento o una disminución de la medida inicial, a. Es importante resaltar el sentido dinámico que caracteriza a estas situaciones de cambio en las cuales se produce una transformación, en contraste con las situaciones descritas a través de operaciones binarias que son estáticas: situaciones que pueden hacer referencia a la combinación o a la comparación entre medidas.

Por otra parte, en las situaciones de cambio se ve involucrado el tiempo: un momento inicial, fijo, en el cual se hace la primera medición, un tiempo posterior en el cual se sucede la transformación y un momento final en el cual se hace la última medición. Mientras que en las situaciones estáticas, el tiempo es fijo de principio a fin y no interviene en la obtención del resultado.

En las situaciones estáticas es posible intercambiar las medidas involucradas, porque todas cumplen idéntica función, comprobándose así la propiedad conmutativa de la operación binaria que la representa; mientras que en las situaciones dinámicas de cambio, la transformación cumple un papel único entre los tres elementos involucrados y por tanto no es intercambiable. Lo cual dificulta la evidencia de la propiedad conmutativa de la operación (Vergnaud, 1991).

Por último, en estrategias de conteo a partir de... los niños necesitan algún método para "llevar la cuenta". La mayoría, utilizan los dedos para ello. Pero, "Cuando se utilizan los dedos u otro objeto en las estrategias de conteo, estos juegan un papel muy diferente del que tienen en las estrategias de modelización"(Carpenter, 1999, pp. 24). El uso diferenciado de los dedos parece expresar la diferente naturaleza de los números utilizados: mientras que en estrategias de modelización, los dedos parecen representar las medidas cardinales de los conjuntos de objetos referidos por el problema, en las estrategias de conteo, puede que expresen operadores que actúan sobre las cantidades. En esos caso, generalmente, de cambio, la respuesta se obtiene a partir del número de **acciones realizadas** sobre los dedos (Carpenter, 1999)

y no sobre la cantidad de dedos utilizados.
¿Introducir este dinamismo en el uso de los dedos, como contador, no podrá contribuir a reducir la satanización de su uso en la escuela como un recurso de la matemática informal que usan los niños y que tanto molesta a padres y maestros?

2. Modelo del Profesor Federici Sobre la Construcción de los Números Racionales Positivos

Carmen Andrade

Las dificultades de los estudiantes para dar sentido y usar los números racionales en situaciones de la vida cotidiana, de la ciencia y de la matemática es un problema que se entiende cuando se estudian los obstáculos didácticos en la enseñanza de la fracción como relación parte-todo. En la educación básica se enseña la fracción como la noción básica para la construcción de los números racionales positivos y se enseñan los números racionales a partir de definiciones lógico matemáticas. El estudio de los diferentes sistemas numéricos está conectado entre ellos a través de la sintaxis más no de la semántica ¿Es posible dar sentido a los diferentes sistemas numéricos estudiando la sintaxis más no la semántica?

Proceso filogenético del número racional y su influencia en la didáctica

El modelo del profesor Federici[1] sobre la construcción de los números racionales consta de dos partes: los racionales sin signo y los racionales con signo,

[1] Carlo Federici Casa, quién llegó a Colombia en el año 1948, ha sido reconocido a nivel nacional e internacional por sus importantes aportes a la didáctica de la matemática y de la física, y su más reciente trabajo está dirigido a la enseñanza de las matemáticas escolares.

iniciando por los enteros, y generalizando a los racionales.

Este modelo se apoya en el proceso filogenético de la construcción del número, tanto desde una mirada en perpsectiva como en retrospectiva de la historia de la matemática y de la ciencia, las cuales están ligadas a los avances socioculturales de cada época.

La mirada en perspectiva, es decir remontándonos a las construcciones como: acueductos, palacios, foros, ... de las civilizaciones de la Antigüedad, egipcia, babilónica y griega, demuestra un pensamiento matemático y físico ya que para sus construcciones los arquitectos usaron piedras cortadas y de esta manera lograron dar una forma regular a las edificaciones, y así garantizar la estabilidad de las mismas.

El origen de los números tiene dos fuentes, por un lado, los números naturales provienen de la actividad conocida de los pastores, quienes contaban asociando cada oveja a una piedra, y por otro lado, los números racionales surgen de la actividad de los arquitectos de la Antigüedad, quienes para construir edificaciones necesitaron cortar las piedras para dar forma regular o paralelepípeda. La actividad de comparar longitudes y otras magnitudes como áreas y volúmenes es la filogenésis del número racional, actividad que precede a la medición misma pero que nos aproxima a la medición. El número racional resulta de la comparación o relación entre longitudes, en general entre magnitudes. La noción de conmensurabilidad, fundamental para la construcción de los números racionales, fue estudiada por Eudoxio de Cnido (C 408-355) y por Euclides (C 300 a. C.).

En el siglo XII y XIII, el desarrollo del álgebra impulsó la definición de "fracción"como la relación entre la parte y el todo. "La fracción significa partes alícuotas de la unidad y se representa con una raya que separa el numerador del denominador"(Pisano (1180-1250), *Liber Abaci*, citado por Natucci). De este modo, la noción de número racional se desligó de la medición, aunque algunos físicos, como Newton (Newton 1643-1727), continuaron considerando la fracción como una relación entre magnitudes.

En el siglo XIX el desarrollo de la lógica hace aportes a la definición del número racional:

- Como clase de parejas de naturales: $2/3 = (2, 3), (4, 6), (6, 9), \ldots$ (Padoa, *Introduzione alla teoria delle frazioni*, 1909, citado por Natucci).

- Como operadores sobre naturales:

$$R = \times \ni \exists(a,b) \ni [a, b \in N_1 \cdot \times = (\times b/a)]$$

(Peano, *Arithmetica generale*, 1899, citado por Natucci).

- Como clases de equivalencia de fracciones (Siglo XIX), (citado por Natucci)

Estas definiciones han primado hasta la actualidad en la enseñanza de los números racionales como se puede constatar en algunos textos de matemáticas utilizados en nuestro país durante las últimas décadas. También se puede concluir que la organización de los sistemas numéricos en los textos obedece al orden de cerradura de las operaciones aritméticas y sus inversas: N, Z, Q, R, C_2 y que el énfasis en la enseñanza de los números racionales es la sintaxis más no la semántica de los números. En la mayoría de los casos, los números racionales se enseñan a partir de la definición como clases de equivalencia de fracciones.

El profesor Federici hace una mirada en perspectiva del proceso de construcción del número, es decir, desde su proceso evolutivo y las actividades socio-culturales que lo impulsaron pero además, hace una mirada en retrospectiva de la construcción del número con el fin de llenar vacíos en ese proceso y hacer aportes a la didáctica de la matemática y de la ciencia.

La conclusión de la mirada en retrospectiva es que "la Numerosidad es el supersistema de los diferentes sistemas numéricos que el hombre ha creado a lo largo de su historia"(Federici, 2001) y que los números han sido estudiados por los físicos como representación de medición de vectores en el espacio:

- Tridimensional por los complejos cuaterniones (C_4)
- Bidimensional por los complejos binarios (C_2)
- Unidimensional por los reales (R)

Esta mirada del número, retrospectivamente desde la ciencia y la matemática, tiene implicaciones trascendentales en la enseñanza de los números en la educación básica y media. El modelo didáctico del profesor Federici está organizado con base en el proceso filogenético del número, es decir, la organización de los sistemas numéricos obedece al orden de construcción de los sistemas numéricos en la historia de la matemática: N, Q^+, Q^- y R. Además, este modelo hace énfasis en la construcción semántica del número y la sintaxis es una consecuencia y una necesidad para su manipulación. El modelo del profesor Federici se apoya en la geometría para enseñar la semántica y deducir la sintaxis, y establece un puente entre el estudio de un sistema numérico y otro. Los racionales sin signo se construyen a partir de la medición entre longitudes, y los racionales con signo o negativos a través de la medición entre flechas. La extensión a los reales presupone una representación de los racionales como sucesiones de racionales, es decir, como pseudo irracionales. Los reales se construyen como límite de sucesiones de racionales.

Construcción del Número Racional

El modelo del profesor Federici (Federici, 2001) estudia la construcción de los números racionales como operadores sobre magnitudes, específicamente, sobre longitudes cuya representación son los segmentos. Hay que recordar que las longitudes son abstracciones de los segmentos y por lo tanto no se manipulan longitudes sino segmentos.

La construcción de los números racionales positivos mediante este modelo es un camino para dar sentido al número racional y usarlo en la vida cotidiana, en la ciencia y en la matemática. La enseñanza de los operadores sobre magnitudes permite dar el paso entre N y Q y evitar los obstáculos didácticos, aunque sea difícil superar las ideas sobre fracciones aprendidas en años anteriores.

Los "Naturales" Como Operadores

Antes de la medición se construyen los números racionales como operadores o relatores. El número natural es una propiedad que resulta de contar los elementos de una colección, es un cardinal, por ejemplo, el número 3 natural es la clase de todas las ternas:

$$3 = (\bullet \bullet \bullet), \ldots$$

El número racional es un número relator porque establece una relación entre magnitudes. Para entender la idea de relación recordemos que la relación "el padre de" implica una clase de parejas ordenadas, un papá con un hijo, otro papá con otro hijo, etc. Por lo tanto, el número racional es la clase de todas las parejas ordenadas de longitudes que cumplen la relación ser "el triplo de":

$$3 = \{(\mathrm{ln}|\text{———}|\text{———}|\text{———}|, \mathrm{ln}|\text{———}|), \cdots\}$$

Es evidente que el 3 no es el mismo "3" *contador* porque tiene otro significado, es un número relator u operador, y por lo tanto, se lee "el triplo de". El "3" cardinal está oculto. La manera de verlo es hacer la figura porque para lograr la abstracción se necesita lo concreto:

$$\mathrm{ln}|\text{———}|\text{———}|\text{———}| = 3\,\mathrm{ln}|\text{———}|$$

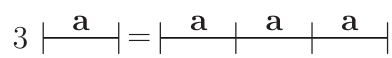
El operador divisor es inverso al operador multiplicador: el inverso de "el triplo de" es "el tresavo de" y se simboliza $^{/}3$. (terminología de Federici) (Federici, 2001)

$$\mathrm{ln}|\text{———}| = {}^{/}3\,\mathrm{ln}|\text{———}|\text{———}|\text{———}|$$

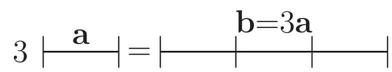
En adelante, se trabaja con segmentos que son la representación de las longitudes. Por ejemplo, el operador multiplicador 3 transforma el segmento **a** en el segmento 3**a**:

$$3\ \overset{\mathbf{a}}{|\text{———}|} = \overset{3\mathbf{a}}{|\text{———}|\text{———}|\text{———}|}$$

El 3 no es tanto lo que se *ve* sino lo que hace, es la acción, añadir a un punto el segmento **a**, otro **a** y otro **a**:



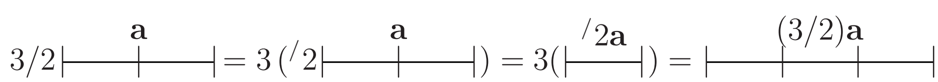
Las acciones son discretas pero el resultado es una sola cosa:



el segmento $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}$. El "3"está ahí porque une 3 segmentos que forman uno solo. La acción implica pensar porque para actuar se necesita pensar.[2]

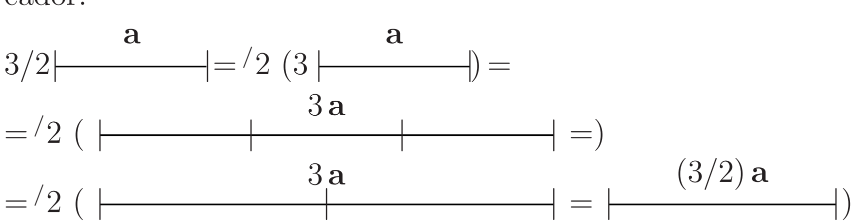
El operador divisor $/3$, transforma el segmento **a** en el segmento $/3\mathbf{a}$:

El uso de segmentos facilita la comprensión del número racional (sin signo) como la composición de dos operadores, un multiplicador y un divisor, y no tiene el obstáculo de la fracción impropia:



El segmento **a** se transforma en el segmento $(1/2)\mathbf{a}$. El segmento $(1/2)\mathbf{a}$ se transforma en el segmento $\mathbf{b} = (3/2)\mathbf{a}$; el triplo del medio de **a**.

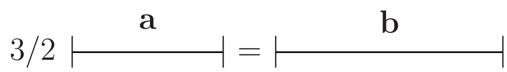
Otra forma de realizar la composición es iniciando por el operador multiplicador:



Se observa que el proceso es más corto aplicando en primer lugar el operador divisor el cual está más cerca del segmento.

[2] "En el principio era la acción" Goethe

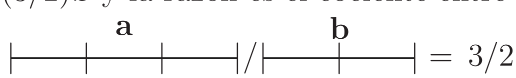
En cualquiera de los casos, el número racional 3/2 transforma el segmento **a** en el segmento $\mathbf{b} = (3/2)\mathbf{a}$:



La medida es el número racional que resulta de la comparación cuantitativa entre dos longitudes. Por ejemplo, se formula la pregunta:

¿Cuál es la medida del segmento **a** con respecto al segmento **b**?

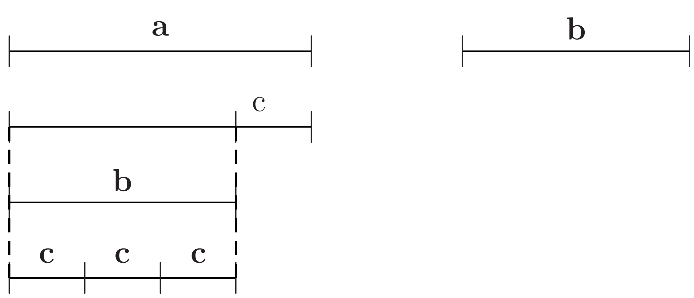
La medida de $\mathbf{a} = (3/2)\mathbf{b}$ y la razón es el cociente entre las longitudes:



lo cual se simboliza:

$$\mathbf{a}/\mathbf{b} = 3/2$$

Para determinar la medida de un segmento **a** con respecto a un segmento **b**, se sigue el procedimiento de Eudoxio. En el ejemplo, se dan los segmentos **a** y **b**:



$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ $\qquad$ $\mathbf{b} = 3\mathbf{c}$ $\qquad\longrightarrow\qquad$ $\mathbf{a} = (4/3)\mathbf{b}$

$\mathbf{b} = 3\mathbf{c}$ $\qquad$ $\mathbf{a} = 4\mathbf{c}$

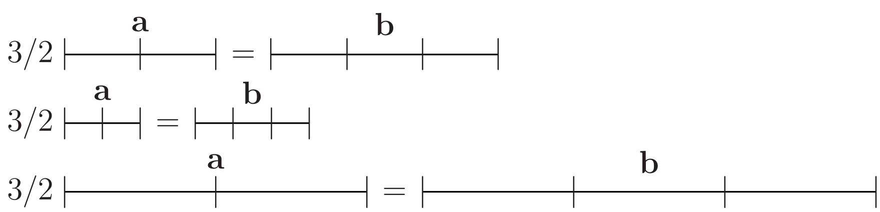
La medida de **a** con respecto al segmento **b** es: $\mathbf{a} = (4/3)\mathbf{b}$ En forma general: $\mathbf{a}/\mathbf{b} = 4/3$

Se obtiene la razón pero ya se está en la proporción:

$$\mathbf{a}/4 = \mathbf{b}/3 \text{ o } 3\mathbf{a} = 4\mathbf{b}$$

Cuando el proceso termina se dice que los segmentos son conmensurables, es decir, se construye el número racional. Por lo tanto, se evidencia que el operador, la medida y la razón son diferentes interpretaciones del mismo concepto, del concepto de número racional como medida entre magnitudes. Cuando el proceso no termina se dice que los segmentos son inconmensurables, y el resultado es un número irracional. Por lo tanto, la noción de conmensurabilidad es fundamental para la construcción del número racional.

El pensamiento variacional es necesario para construir el número racional como relación entre magnitudes. El siguiente ejemplo lo muestra:



La relación entre el segmento **a** y el segmento **b** es 3/2, independientemente de la longitud inicial del segmento **a**.

Los racionales (sin signo) Q^+ tienen la función, uno de multiplicar y otro de dividir. Los racionales simples $0, 1, 2, 3, \ldots$ y $^/1, ^/2, ^/3, \ldots$ dan lugar a los compuestos (Tabla 1).

$Nm \quad N\mathbf{d}$	$^/1$	$^/2$	$^/3$	$\cdots$
0	0	0	0	$\cdots$
1	1/1	1/2	1/3	$\cdots$
2	2/1	2/2	2/3	$\cdots$
3	3/1	3/2	3/3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabla 3: Los racionales sin signo Q^+

El número racional tiene tres interpretaciones de las cuales se deriva la proporción y la equivalencia, como se muestra en la Tabla 2.

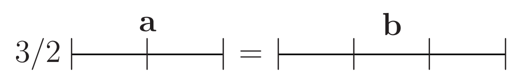
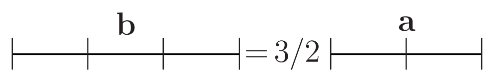
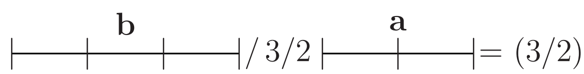
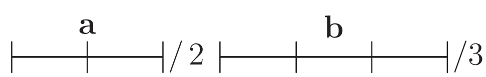
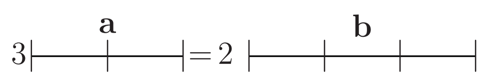
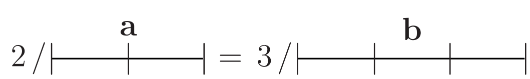
Operador		$(3/2)\mathbf{a} = \mathbf{b}$
Medida		$\mathbf{b} = (3/2)\mathbf{a}$
Razón		$\mathbf{b}/\mathbf{a} = 3/2$
Proporción		$\mathbf{a}/2 = \mathbf{b}/3$
Equivalencia		$3\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$

Tabla 4: Interpretaciones del número racional

Es conveniente mostrarle a los niños que no se puede escribir: $2/\mathbf{a} = 3/\mathbf{b}$



Obstáculos didácticos

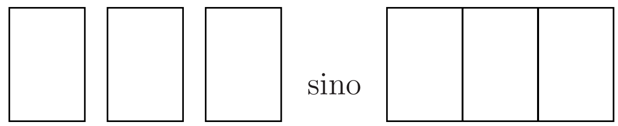
Algunas de las investigaciones revisadas sobre los números racionales y la fracción han estudiado las dificultades de los estudiantes en la comprensión de los números racionales, por ejemplo, Hart (Hart, 1981) observa que los estudiantes ven dos números separados por una raya y no ven la relación entre ellos. Mancera (Mancera, 1992) dice que la fracción como "tomar" tantas partes del todo crea concepciones limitadas que generan dificultades cuando se pasa de la idea de un todo a la idea de un todo de varias unidades y Clemens (Clemens, 1988) atribuye las dificultades a que los estudiantes pasan mucho tiempo en los primeros grados trabajando con fracciones que no están conectadas con la realidad, es decir, a la separación entre la semántica y la sintaxis

En el aprendizaje del concepto de número racional, los estudiantes tendrán que luchar con las ideas culturales acerca de la media taza de leche, o el cuarto de hora, pero si han tenido un entrenamiento en la fracción como relación parte-todo será difícil modificar las ideas que les han enseñado, y dar el paso al número racional como medida entre magnitudes.

Las concepciones erróneas se convierten en dificultades y cuando no es posible superar estas dificultades se convierten en obstáculos que impiden avanzar en la construcción del nuevo conocimiento. Brousseau (Brousseau, 1989) clasificó los obstáculos en: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos. Los obstáculos ontogenéticos se refieren a condiciones genéticas específicas de los estudiantes y por lo tanto están fuera de este estudio. Los obstáculos epistemológicos son parte del proceso de aprendizaje y no se pueden evitar porque juegan un papel muy importante en la adquisición del nuevo conocimiento. Por ejemplo, el salto conceptual entre los números naturales y los números racionales. (Brousseau, 1989) Por el contrario, los obstáculos didácticos provienen de la enseñanza y se deben evitar porque impiden superar los obstáculos epistemológicos, es decir, ver las cosas de una nueva manera. En el caso de la fracción, se crean ideas falsas que son difíciles de cambiar por eso se convierten en obstáculos didácticos que impiden construir el número racional como resultado de medida entre magnitudes.

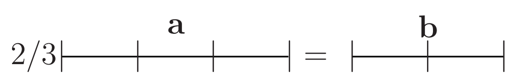
El profesor Federici, por su parte, ha estudiado los obstáculos didácticos que genera la enseñanza de la fracción como la relación entre la parte y el todo. Algunos de estos obstáculos se presentan a continuación (**OD** significa obstáculo didáctico, **P** significa problema, y **C** concepto según Federici) (Federici, 2001):

OD: La fracción implica contar pedazos de un todo.
P: Tres metros de tela no son:



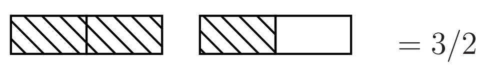
C: El número racional no es contador sino relator, por eso se dice “el triplo de”.

OD: La medida se estudia como la relación parte todo.
P: El problema es que se toman partes de un todo y no se comparan magnitudes:

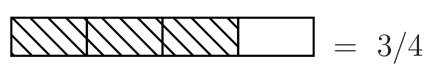


C: El número racional es resultado de la medida entre magnitudes:
b = (2/3)**a**

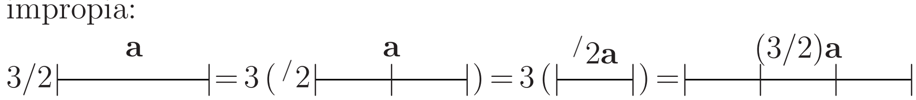
OD: La fracción impropia se construye con dos o más unidades.



P: ¿Qué sucede si se junta el dibujo?



C: La composición de dos operadores no tiene la dificultad de la fracción impropia:



¿Cómo se pueden evitar estos obstáculos? No basta con estudiar los obstáculos. Hay que estudiar el paso entre un sistema numérico y otro, en este caso específico, el paso de los números naturales a los números racionales. La construcción de los números racionales por medio del modelo del profesor Federici señala un camino para que los estudiantes puedan *dar el paso entre los naturales y los racionales positivos y logren dar sentido a los números racionales en diferentes situaciones.*

La teoría de aprendizaje de Sierpinska (Sierpinska, 1990) dice que el cerebro humano hace una ruptura entre el viejo y el nuevo conocimiento, pero en algunos casos no es posible porque el conocimiento previo actúa como un obstáculo en la comprensión (Brousseau, 1989).

Teniendo en cuenta que en matemáticas, los símbolos (significantes) están en lugar de los conceptos (significados), se hace énfasis en la construcción del concepto. De acuerdo con Sierpinska (Sierpinska, 1990), un concepto se aprende cuando se puede decir qué es y qué no es, cuando se conocen las relaciones con otros conceptos, cuando se puede establecer analogía con otras relaciones, cuando es posible su aplicación

Por lo tanto, comprender el concepto es adquirir los diferentes significados en los distintos actos de comprensión (Sierpinska, 1990). En el caso del número racional, las categorías se han definido de la siguiente forma:

- Identifica el número racional como dos operadores compuestos, multiplicador y divisor.

- iferencia el número contador del número relator.

- Generaliza el concepto de número racional como relación entre valores de una magnitud.

- Sintetiza diferentes interpretaciones del número racional como: operadores compuestos, medida y razón, y los organiza como un todo consistente.

- Usa el número racional en situaciones de la vida diaria y de las matemáticas.

Conclusiones

Los avances de los estudiantes en la construcción semántica de los números racionales, a partir del modelo del profesor Federici, invitan a pensar en este modelo como la alternativa para la didáctica de los números racionales y de los enteros porque se evitan los obstáculos didácticos, y además, porque es una base sólida para el estudio de la matemática y de la ciencia de los años superiores.

La enseñanza de la fracción como la relación parte-todo es un impedimento para superar el obstáculo epistemológico entre los naturales y los racionales porque conceptualmente se ha visto que es diferente al número racional. De acuerdo con Llinás (Llinás, 2002) el cerebro aprende porque construye patrones repitiendo las ideas, pero los falsos patrones cuesta mucho trabajo cambiarlos o quitarlos.

3. Los Números Reales Aproximación al Concepto Experiencia de Investigacion Acción

Wilson Gordillo
Mario E. Thiriat

La enseñanza y el aprendizaje de conceptos complejos en matemáticas han sido un reto para algunos profesores de Matemáticas en secundaria y media vocacional. Es por ello que al leer el reporte de investigación de la tesis doctoral "La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación acción"de Isabel Romero Albadalejo, surge la idea de retomar aspectos de dicha investigación, para aplicar en nuestro contexto, con el fin de reflexionar sobre el acercamiento al concepto de número real con los estudiantes; ya que en encuestas previas a maestros de grados décimo y undécimo, coinciden en percibir un bajo perfil por parte de los estudiantes de estos grados, en cuanto al desarrollo del pensamiento numérico, más específicamente en el dominio del campo de los números reales.

Por lo que respecta a la Dimensión Curricular en nuestro país, para la enseñanza de las matemáticas se han presentado varias reformas que dan tratamientos didácticos distintos al concepto de número real, derivados esencialmente del programa de matemática moderna, que ha resultado inadecuado y pobre en significatividad para los estudiantes. Un ejemplo de ello son Los problemas de la inconmensurabilidad e Irracionalidad, que no son tratados con detenimiento en ninguna de las reformas curriculares siendo estos pilares fundamentales en un acercamiento al concepto de número real, a esto, se añade el papel de que juega el infinito (actual y potencial) en el acercamiento a dicho concepto.

Con base en los elementos anteriormente enunciados se ve la necesidad de elaborar un diagnóstico sobre la relación que existe por parte de los estudiantes de grado octavo con el saber, concretamente con el concepto de número; para hacer una propuesta de introducción de los números reales en secundaria, que puede constituir un aporte a la educación matemática de nuestro país.

Para esto se estudiaran las dificultades y potencialidades que pueden presentar los estudiantes para el desarrollo de la comprensión matemática en un contexto curricular. Explorando vías para la introducción al concepto de número real en el currículo de la enseñanza secundaria, al establecer dos grandes grupos de estudio: las representaciones discretas, digitales, de carácter alfanumérico y las representaciones continuas, analógicas, de tipo grafico o figurativo. Estos dos grandes grupos se denominan en matemáticas, sistemas de representación simbólica y sistemas de representación gráfica.

Considerado que el concepto de número real no puede abordarse de forma efectiva mediante un tratamiento convencionalmente formal, basado en representaciones proposicionales y con referencias superficiales conectadas al terreno de las imágenes como se ha presentado en dichas reformas. Es necesario realizar un estudio que a partir de la compresión y el análisis de la propuesta presentada por Isabel Romero lleve a una reforma contextual en el acercamiento al concepto de número real en básica secundaria.

Este Estudio se realizará revisando las dificultades y potencialidades que pueden presentar los estudiantes para el desarrollo de la comprensión matemática en un contexto curricular. A través de la Exploración de vías para la introducción al concepto de número real en el currículo de la enseñanza secundaria, al establecer dos grandes grupos de estudio: las representaciones discretas, digitales, de carácter alfanumérico y las representaciones continuas, analógicas, de tipo grafico o figurativo. Estos dos grandes grupos se denominan en matemáticas, sistemas de representación simbólica y sistemas de representación gráfica.

Es decir, Estudiar dificultades y potencialidades que presenta la introducción del concepto de Número Real en estudiantes de 8º Grado, utilizando para ello un diagnóstico categórico y una propuesta didáctica que se caracterice por:

1. Tener en cuenta la complejidad del concepto, y abrir vías para la representación, comprensión y solución de problemas fundamentales en la construcción del número real.
2. Basarse, de forma simultanea y complementaria, en los sistemas de representación digitales (simbólicas) y analógicas (gráficas), propios del Número Real y en un conocimiento, claro, preciso y riguroso de la red conceptual que sustentan.

Los referentes teóricos en los cuales se basa la construcción de la propuesta se basa en la teoría de aprendizaje constructivista expuesta por Anna Sfard (2002) en donde se muestra que lo más importante es, que el desarrollo de la noción de número fue un proceso cíclico, en el que se pudo observar, aproximadamente la misma sucesión de eventos, una y otra vez siempre que una nueva clase de números estaba naciendo. Proceso que puede considerarse en tres fases:

1. La etapa preconceptual. En este punto las manipulaciones rutinarias fueron tratadas como procesos y nada más (no había necesidad de nuevos objetos, ya que todos los cálculos estaban aún restringidos a aquellos procedimientos que generan los números previamente aceptados).
2. Un periodo largo del enfoque predominante operacional. durante el cual una nueva clase de número comenzó a emerger fuera de los procesos familiares. En esta etapa el nombre dado al nuevo número servia como

una criptografía para ciertas operaciones, más que como un significador de un objeto real.

3. Fase estructural. Cuando el número en cuestión ha sido eventualmente reconocido como un objeto matemático maduro, de ahí en adelante diferentes procesos serían realizados sobre este nuevo número, dando así nacimiento a clases de números aún más avanzados.

De tal manera que Sfard presenta la historia de los números como una cadena larga de transiciones, desde las concepciones operacionales hasta las estructurales: Una y otra vez los procesos realizados sobre objetos abstractos ya aceptados han sido convertidos en totalidades compactas, o reificadas, para llegar a ser una nueva clase de constructor estáticos auto contenidos.

El tipo de investigación que se desarrolló esta enmarcado dentro de la investigación acción de tipo diagnostico (puesto que esta enfocada a la recolección de datos, su interpretación, su diagnostico y la recomendación de unas medidas de acción); interceptada con la investigación acción empírica (por que estudiamos el problema social mediante una acción que supone un cambio y valora los efectos producidos, todo ello de la manera más sistemática posible.) (Romero, 1997).

El cumplimiento de los objetivos de esta investigación dependerá de los focos de investigación que se escojan para su desarrollo, por tal motivo hemos sido cuidadosos al determinarlos del siguiente forma; un foco que estudie la notación simbólica de los números reales y otro foco que estudie la representación geométrica de los números reales, se escogen estos dos focos de investigación por:

1. El carácter integrador de la notación decimal para los números reales, en relación con la familiaridad que tienen los estudiantes con dicho sistema de notación, ya que la están usando desde su educación primaria

2. El carácter integrador del modelo de la recta para los números reales y el conocimiento que los estudiantes traen de dicho modelo (El hecho que permite considerar la recta como modelo para el conjunto de los números reales, es la correspondencia números - puntos de la recta, esta correspondencia se conceptualiza como una biyección).

Para estos dos focos de investigación se establecieron preguntas especificas de investigación, como son las siguientes:

1. ¿Qué expresiones decimales conocen los estudiantes y cómo las clasifican?
2. ¿Qué argumentos utilizan para aceptar o rechazar, según los casos, el hecho de que determinadas expresiones decimales infinitas representen números?
3. ¿Qué tipo de expresiones decimales infinitas se aceptan como números?
4. ¿Qué argumentos se aducen en cada justificación?
5. Dadas distintas parejas de segmentos, ¿son capaces los estudiantes de idear procedimientos para encontrar un número que exprese la relación entre ambas? En caso de ser afirmativo, ¿qué tipo de procedimientos emplean?
6. ¿Admiten los estudiantes que dos longitudes cualesquiera son siempre conmensurables, es decir, existe un número racional que expresa la medida de una en relación a la otra, tomada como unidad?
7. ¿Hasta qué punto comprenden la diferencia entre longitudes conmensurables y longitudes inconmensurables y aceptan la existencia de estas últimas a través de la notación decimal infinita no periódica? ¿Ponen en duda la existencia de longitudes inconmensurables y piden algún tipo de demostración?
8. ¿Piensan que la recta puede llenarse con números reales, o como en el caso de los racionales las intuiciones sobre el continuo lineal añaden matices significativos a la correspondencia planteada en términos de números - puntos?

Estas preguntas de investigación son abordadas a través de actividades en el aula de clase que permitan dar respuesta a estos y otros interrogantes.

Hasta el día de hoy se están planteado estas actividades a los estudiantes y se espera en un próximo encuentro dar los resultados concretos de la investigación y mostrar la propuesta enseñanza.

Bibliografía

[1] A Baroody, (1994) " *El pensamiento matemático de los niños*", Aprendizaje visor, España.

[2] L Blanco, M. Calderón, (1994) "*Los problemas de sumar y restar*", Servicio de Publicaciones, Universidad de Extremadura, Badajoz, España.

[3] M Bonilla , (1999) "*Estructura aditiva y formación de profesores para educación básica", En "Cuadernos de Matemática Educativa"*, Asociación colombiana de matemática educativa.

[4] G Brousseau,(1989) "*Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques*"En Construction des savoirs, Canada: CIRADE Agence d´arc, pp. 41-63.

[5] T. P Carpenter, E Fennema, otros (1999) " *Las matemáticas que hacen los niños. La enseñanza de las Matemáticas desde un enfoque cognitivo*", Versión digital de la traducción de Carlos Castro de Hernández y Marta Linares.

[6] E Castro, et al (1992) "*Enfoques de Investigación en Problemas Verbales Aritméticos Aditivos*"En Revista de Enseñanza de las Ciencias, Universidad Autónoma de Barcelona, Vol. 10 N° 3.

[7] E Castro, (1997)) "*Representaciones y Modelización*"en Rico, L. (1997) "*La educación matemática en la enseñanza secundaria"* Segunda edición Ice U de Barcelona /Horsori Ed. España.

[8] E Castro. et al (1999)) "*Estructuras aritméticas elementales y su modelización*"Una empresa docente. Universidad de los Andes, Bogotá.

[9] E Castro, (2001)) "*didáctica de la matemática en la educación primaria*"Síntesis Educación, España.

[10] M.A Clemens , G. A. Lean, (1988) "*Discrete fraction concepts and cognitive structure*"En PME XII, Hungary.

[11] L Dickson, et al (1991)) "*El aprendizaje de las Matemáticas*"

[12] C Federici, (2001), *Sobre la resolución de problemas y la numerosidad*, Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

[13] G García, Serrano, C. y H. Díaz, (2002), *La aproximación una noción básica en el cálculo un estudio en la educación básica*, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá

[14] Arana A Hernández, et al. (1999) "*La construcción del número natural a través del proceso aditivo, Uso del cuadrito vacío por estudiantes de educación básica*". En Educación Matemática, Vol. 11 N°2 , Cinvestav, México.

[15] ICME (1998), Budapest, sin otros datos editoriales. Mancera M., E. (1992) *"Significados y significantes relativos a las fracciones*"En Educación Matemática, Vol. 4, No. 2.

[16] C Maza, (1989)) "*Sumar y Restar. El proceso de enseñanza/ aprendizaje de la suma y de la resta"*. Aprendizaje Visor, España.

[17] C Maza, (2001) "*Adición y sustracción*". En Castro, E. (ed) "*didáctica de la matemática en la educación primaria*"Síntesis Educación, España.

[18] Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1988) *Marco general matemáticas, Propuesta de programa curricular sexto grado*, Bogotá.

[19] ________(1988), *Marco general matemáticas. Propuesta de programa curricular octavo grado*, Bogotá.

[20] ________(1998), Matemáticas Lineamientos Curriculares, Bogotá.

[21] A. Natucci, (1923) *Il Concetto di Numero e le sue estensioni*, Fratelli Boca, Torino.

[22] L Rico, (1997)) "*La educación matemática en la enseñanza secundaria*"Segunda edición Ice U de Barcelona /Horsori Ed. España.

[23] I Romero, (1998) *La Introducción del Número Real en Enseñanza Secundaria: una experiencia de Investigación Acción*, tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

[24] A Sfard, (2000), *Sobre la naturaleza de las concepciones matemáticas: reflexiones sobre procesos y objetos como caras de la misma moneda,* Impreso, Seminario-Taller: "El pensamiento algebraico y el concepto de función en las matemáticas escolares. Una empresa docente", Bogotá: Universidad de los Andes.

[25] A Sierpinska, (1992) "On Understanding the notion of function" *The concept of function aspects of epistemology* (Edt) Duboinsky, Harel. Traducción Cinvestav México.

[26] M. Socas, et al (1998).) "*Modelo de Competencias para el Campo Conceptual Aditivo de las Magnitudes Discretas Relativas*" En Revista "Enseñanza de las Ciencias", Vol. 16 N°. 2, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

[27] G. Vergnaud, (1991)) "*El niño, las Matemáticas y la realidad, Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria*" Trillas, México.