INFLUENCIA DE LOS CONCEPTOS TOPOLÓGICOS EN LA DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO EN LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO

Influence of topological concepts in the definition of finite limit of a function at a point in Calculus textbooks

Ignacio González-Ruiz, Juan F. Ruiz-Hidalgo, Marta Molina

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se estudia la influencia de los conceptos topológicos elementales en la definición formal de límite finito de una función en un punto en manuales universitarios destinados a la formación inicial en Análisis Matemático o Cálculo. Seleccionamos cuatro de los manuales más populares dentro las guías docentes de diversas titulaciones universitarias. El análisis realizado permite constatar la escasa presencia explícita que se otorga a los conceptos topológicos en el tratamiento y la definición de límite. Los conceptos topológicos suelen tratarse implícitamente por medio de las ideas de aproximación y tendencia y del trabajo con secuencias numéricas finitas, así como recurriendo a distintos sistemas de representación. Contrastamos estos resultados con la naturaleza del concepto límite que se potencia en cada manual.

Palabras clave: *análisis matemático, cálculo, límite finito, manuales universitarios, topología.*

Abstract

In this paper we study the influence that elementary topological concepts have on the formal definition of finite limit of a function at a point, in undergraduate Calculus textbooks. We consider four of the most popular textbooks in syllabi from different university degrees. The analysis reveals the weakness of the explicit presence of topological concepts at the time of addressing the treatment and definition of limit. Topological concepts are usually dealt implicitly by the ideas of ***approximation and tendency, and dealing with finite number sequences as well as considering different*** *representation systems. We contrast these results with the nature of the concept of limit promoted in each textbook.*

Keywords: *calculus, finite limit, mathematical analysis, topology, undergraduate textbooks.*

El Análisis Matemático es una de las ramas de las matemáticas, configurada como tal en el siglo XVII. Su estudio se fundamenta en el cambio o la variación; de ahí sus importantes contribuciones al desarrollo de la ciencia y, en particular, de la Física. Su presencia en el ámbito educativo se remonta a las enseñanzas de los jesuitas que se plasmaron en el Ratio Studiorum y, en particular, en la edición del padre Pachtler (Labrador, Beatrán-Quera, Diez-Escaniano y Martínez, 1986). Si bien, en España, su implantación en los planes de estudio no se hizo efectiva hasta 1934, cuando, por primera vez, se contemplaba al Análisis Matemático en las enseñanzas regladas de Bachillerato; hecho que se prolonga hasta la actualidad, habida cuenta de su importancia (González y Sierra, 2004). En diversidad de planes de estudios de los actuales grados universitarios se incluyen materias propias de este ámbito, por lo que resulta de interés el papel que en los distintos contextos (científico, técnico o económico) se otorga a los conceptos fundamentales del Análisis Matemático y el desarrollo que de ellos se hace. Este es, por ejemplo, el caso del concepto de límite, sobre el

González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F., Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 385-394). Salamanca: SEIEM.

que se fundamentan muchos otros como los de derivada o integral, básicos en la formación de distintos profesionales. El límite adquiere una relevancia notable en la formación de científicos (matemáticos y estadísticos, fundamentalmente) y se erige como una de las herramientas matemáticas básicas de la investigación en muchas áreas. Atendiendo a estas consideraciones, surge una cuestión de interés al plantearse si la formación en Análisis Matemático que se propone para algunos profesionales es la adecuada para satisfacer los futuros retos profesionales que estos puedan tener. Este problema cuenta con una escasa presencia en la literatura, concentrándose ésta en la noción de límite como objeto de enseñanza-aprendizaje o en su evolución histórica (ej., Blázquez y Ortega, 1998; Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo, 2012; Sierra, González y López, 1999, 2000, 2002). Si bien, en Blázquez, Gatica y Ortega (2009) se lleva a cabo una revisión crítica de las definiciones de límite funcional en textos universitarios, no se pone el foco de interés en el papel que en las mismas se confiere a los conceptos topológicos elementales. En torno a la definición de límite cobra una especial relevancia la noción de punto de acumulación que ha sido abordada por Thompson y Silverman (2007); si bien, en este trabajo se analiza el papel de la noción de acumulación en cuestiones propias del cálculo integral. Con todo, nuestra propuesta pone el foco de interés en el papel que juegan los conceptos topológicos elementales a la hora de introducir la definición del límite finito de una función en un punto y en vislumbrar de qué modo esto se manifiesta en los libros de texto de Cálculo, propios de la formación inicial en Análisis Matemático de diversos perfiles académico-profesionales.

En esta línea de investigación, nos planteamos los objetivos que se contemplan a continuación.

O.1. Analizar la relación que se establece en los libros Análisis Matemático de los primeros niveles universitarios, entre los contenidos topológicos y los relacionados con el límite.

O.2. Analizar el tratamiento que las distintas obras otorgan al concepto de límite atendiendo a su naturaleza dual, como objeto y proceso.

MARCO TEÓRICO

Este trabajo se sitúa en la línea de los trabajos en Didáctica del Análisis y del Pensamiento Matemático Avanzado. El marco teórico lo articulamos en torno a varias ideas clave: la relevancia del análisis de textos en la investigación en educación matemática, la naturaleza dual de los conceptos matemáticos y el significado de los conceptos matemáticos.

El papel de los libros de texto

Autores como Choppin (1980) y Schubring (1987) han abordado el papel que en la transmisión del conocimiento ha constituido la aparición del libro de texto. Este puede considerarse como un elemento cultural que se caracteriza por la imposición de unos contenidos frente a otros y propone una determinada forma de estructurarlos. La importancia del libro de texto como recurso didáctico es señalada ya en el informe Cockroft (1985), donde se afirma que constituye una ayuda inestimable para el docente y su labor en la práctica del aula. Algunos autores, como Chevallard (1991), sugieren que los libros de texto ofrecen una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizan una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes. Por otro lado, Robert y Robinet (1989) sostienen que el estudio de los libros de texto nos permite conocer, de manera indirecta, la concepción con que los docentes cuentan en relación a un contenido específico, puesto que, al elegir los materiales curriculares que se van a emplear, intervienen muchas variables y al tomar la decisión de utilizar uno u otro texto se está posicionando y compartiendo, al menos parcialmente, lo que éste propone. Trabajos como Bosch, Gascón y Sierra (2009), Gómez (2009) y Monterrubio y Ortega (2009), presentados en previos simposios de la SEIEM, dan muestra de esta relevancia de los libros de texto como fuentes de información para los investigadores en educación matemática, siendo su estudio reconocido como una línea más de la investigación en esta área.

La naturaleza dual de los conceptos

Tall (1991) establece que las nociones abstractas pueden concebirse de dos formas: estructuralmente, como objetos, u operacionalmente, como procesos. En este trabajo adoptamos como definición la propuesta por Sfard (1991) que considera los objetos matemáticos como las nociones u objetos abstractos que no pueden ser explorados por nuestros sentidos; tratándose de entes sólo existentes en un universo teórico y, por tanto, sólo visualizables por medio de la mente humana. Por otro lado, en Tall, Gray, Ali, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas y Yusof (2001) se asocia la concepción operacional de un objeto matemático a la ejecución de cálculos que dan sentido a su existencia. Estas dos maneras de concebir un objeto matemático no son incompatibles sino más bien complementarias, ya que las dos son necesarias para una correcta comprensión de los conceptos matemáticos.

Significado de los conceptos matemáticos

En relación al significado de un concepto matemático, adoptamos la propuesta recogida en Rico (2012) y Gómez (2007), adaptación de la noción de significado introducida por Frege (1998). Abordamos el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones bien diferenciadas: los sistemas de representación (signos), la estructura conceptual (referencia) y la fenomenología (sentido). La primera de estas dimensiones comprende los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y permiten su relación con otros. La estructura conceptual la forman los conceptos y las propiedades, así como los argumentos y proposiciones que se derivan del mismo y sus criterios de veracidad. La fenomenología contempla aquellos fenómenos, ya sean contextos, situaciones o problemas, subyacentes en la génesis del concepto y que le confieren sentido.

Entendemos que los conceptos matemáticos se introducen sujetos a un contexto determinado, hecho de capital importancia a la hora del tratamiento y desarrollo de los mismos. Este es, por ejemplo, el caso de los libros de texto, donde la forma en que se introducen los conceptos se encuentra muy condicionada por las pretensiones que persiga la obra y determina el posterior tratamiento que de los mismos, sus relaciones y propiedades se hacen en ella. Partiendo de esta consideración introducimos lo que llamamos Niveles de Completitud Semántica con el objetivo de caracterizar y ahondar en el tratamiento, que de un concepto matemático, se realiza en un contexto determinado. Definimos y ejemplificamos cada uno de ellos a continuación.

Nivel intuitivo: Se caracteriza por realizar un trabajo, previo a la introducción de un concepto matemático, en relación a algunos de sus elementos más característicos, propios de la estructura conceptual, por medio del uso de sistemas de representación y fenómenos que organizan el concepto matemático en cuestión. Su interés reside en rebajar las dificultades cognitivas que pueda entrañar el tratamiento de los conceptos. Un ejemplo del mismo se organiza en torno las nociones "tender a" o "aproximarse a", usualmente trabajadas con anterioridad a la introducción del concepto de límite por medio de representaciones gráficas, y que contribuyen a generar en el estudiante una idea intuitiva de dicho tales conceptos, que contribuirán a rebajar la dificultad que pueda surgir al abordar la noción de límite.

Nivel formal: Se caracteriza por trabajar los conceptos matemáticos desde su esencia pero sin llegar a conferirles la autonomía necesaria para considerarlos como objetos matemáticos. En él se aprecia un empleo riguroso del lenguaje matemático así como del estudio formal de la estructura conceptual de los conceptos matemáticos. Este nivel suele ir ligado a potenciar la naturaleza de proceso presente en algunos conceptos matemáticos. A modo de ejemplo, cabe decir que este nivel se manifiesta en las numerosas tareas de cálculo de límites que se presentan en los textos, una vez se ha introducido la definición formal de límite. De esta forma, se evidencia el contraste que este tipo de tareas confiere a la noción de límite, minando su perspectiva teórica en favor de potenciar su concepción de operación matemática; hecho que cobra especial relevancia al introducir técnicas de cálculo de límites.

Nivel de abstracción: Se caracteriza por dotar a los conceptos de autonomía y entidad matemática, de forma que puedan considerarse como objetos matemáticos. Cabe decir que es lícito hablar del nivel de abstracción siempre que se establezca una armonía entre la concepción de los conceptos como objeto y proceso. En el caso del límite, puede decirse que se ha alcanzado este nivel si se conjugan sus aspectos estructurales y operacionales en su tratamiento.

En lo que sigue se entiende por definición de un concepto matemático al enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones). En un contexto de matemática avanzada, la definición es la referencia del concepto dentro del modelo de significado adoptado.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO Y DE LA MUESTRA

La muestra de manuales universitarios seleccionados para este estudio consiste en un conjunto de obras, destinado a un fin común, cuya temática versa sobre la disciplina Análisis Matemático. Se trata de las siguientes obras: Apostol (2006), Ayres (1989), Larson y Edwars (2010) y Spivack (1996).

Esta muestra es intencional. La selección de obras obedece a dos criterios básicos. Por un lado, son obras que abordan los contenidos matemáticos de los que trata esta investigación. En sus páginas se presentan, desde ópticas diversas, aspectos relativos a los conceptos topológicos básicos, así como a la noción de límite finito de una función en un punto. Por otro lado, se trata de obras que se incluyen en las bibliografías básicas de guías docentes procedentes de diferentes titulaciones impartidas en universidades españolas[1]. En este sentido, las obras seleccionadas gozan de influencia en la formación de profesionales bien dispares como matemáticos, estadísticos, economistas o ingenieros de diversa especialidad.

Antes de atender al contenido de las obras, las caracterizamos utilizando una serie de descriptores que permiten ilustrar los aspectos más significados que este trabajo pretende contemplar en relación a la descripción externa de cada una de las obras. Se han considerado la editorial, el título de la obra, el autor, la ciudad de publicación, el año de publicación y la pretensión de la obra. Todos ellos se organizan, para cada obra en una tabla semejante a la Tabla 1.

Tabla 1. Descriptores externos Ayres (1989)

Editorial	Título	Autor	Ciudad	Año	Pretensión
McGraw-Hill	Cálculo Diferencial e Integral. Teoría y 1175 problemas resueltos	Frank Ayres	Madrid	1989	Proporcionar una formación inicial teórico-práctica en Cálculo a los estudiantes de Ciencias e Ingeniería

Cabe destacar de entre los descriptores anteriores el relativo a la pretensión de la obra. Frecuentemente las obras incluyen algún tipo de apéndice en el que los autores justifican la génesis de su obra en base a metas formativo-pedagógicas o de adquisición del contenido. En este sentido, para cada una de las obras que se han seleccionado, los autores arguyen metas que, en algunas ocasiones, adoptan una posición más explícita en relación a los profesionales a quienes va dirigida, como es el caso de Ayres (1989). Por el contrario, en Larson y Edwards (2010) y Spivack (1996) se adopta una posición más abierta en este sentido, centrándose únicamente en una justificación de las pretensiones que persigue su obra en base a los contenidos que en ella se recogen: Definir y demostrar o, presentar, los conceptos fundamentales del Cálculo. En la obra de Apostol (2006) no se contempla ningún tipo de pretensión similar a las mencionadas para el resto de obras.

ANALISIS Y RESULTADOS

Abordamos el análisis de los textos en dos etapas a las que nos referimos, respectivamente, como caracterización interna y análisis del contenido de las obras.

Caracterización interna de las obras

Caracterizamos el tratamiento y la presentación que en cada una de las obras se hace de los contenidos matemáticos sobre los que se centra el interés de la investigación por medio de tres descriptores: "Contenidos" (C), "Presentación y Tratamiento" (PT) y "Actividades Relacionadas" (AR). El primero de ellos alude a los contenidos que, en relación a los dos focos de interés señalados, cada obra recoge; el segundo trata de matizar el modo en que se introducen los citados contenidos. El tercero atiende a los objetivos que persiguen las actividades incluidas en las distintas obras. De esta forma, para cada una de las obras, se ha recogido la información como se ilustra en la Tabla 2.

Tabla 2. Descriptores internos Spivack (1989)

Conceptos Topológicos C PT AR	**Conceptos del límite** C	PT	AR
No se contemplan	Límites (Parte II, Sección 5)	Aproximación a la definición formal de límite (Págs. 107-118)	Cálculo de límites (Act. 1-4, págs. 132-133)
	Sucesiones infinitas y Series infinitas (Parte IV, Sección 21)	Definición de límite. (Pág. 118-119)	Aplicación de la definición formal de límite (Act. 6-14, págs. 133-134)
		Caracterización de la definición de límite por sucesiones (Pág. 619-620)	Demostración de propiedades (Act. 16-31, págs. 135-137)

La información que se recoge en las tablas elaboradas evidencia el énfasis que en cada una de las obras se confiere al tratamiento de los distintos contenidos. En este sentido, atendiendo a los datos, destaca, por un lado, la restrictiva presencia que las obras otorgan a los conceptos topológicos elementales, ausentándose estos contenidos de forma explícita en tres de ellas: Ayres (1989), Larson y Edwards (2010) y Spivack (1996). Entendemos que este hecho condiciona el tratamiento que en las obras se hace del concepto de límite finito de una función en un punto y, en particular, de su definición. Asimismo, en relación a las actividades, se aprecia un predominio del trabajo de cálculo de límites, en detrimento de otras destinadas a ahondar en sus rasgos definitorios o propiedades.

Análisis del contenido de las obras

Para analizar el contenido matemático, de interés para la investigación, en cada una de las obras seleccionadas, así como del tratamiento que en cada una ellas se hacen del mismo, se utilizan las tres dimensiones del significado de un concepto matemático descritas en el marco teórico: estructura conceptual (EC), los sistemas de representación (SSR) y la fenomenología (F). Asimismo, se hace uso de los niveles de completitud semántica (NCS), introducidos en este trabajo, y se analizan las relaciones que puedan manifestarse entre ellos. Finalmente, tanto para los conceptos topológicos como relacionados con el tratamiento del límite, se contempla una síntesis, a modo de comparativa, de los aspectos más significativos y de interés para la presente investigación, atendiendo a cada una de las obras.

Conceptos topológicos

Sólo la obra de Apostol (2006) incluye un capítulo dedicado al tratamiento de los conceptos topológicos. Si bien, aun careciendo el resto de obras de una sección semejante, conviene tener en cuenta la presencia, explícita o implícita, que en el tratamiento de los contenidos relacionados con la definición de límite, puede apreciarse de los conceptos topológicos. Con el fin de precisar esta labor para cada una de las obras se hace uso de tablas (ver Tabla 3 y Tabla 4). No recogemos aquí las tablas correspondientes a todas las obras por limitaciones de espacio.

Tabla 3. Conceptos topológicos en Apostol (2006)

EC	Se establecen las definiciones de punto de acumulación, punto interior y punto adherente. Destaca de ellos que, si bien otros conceptos en esta obra se definen en espacios métricos generales, el tratamiento de estos se realiza en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^n$, un hecho estrechamente ligado con las escasa tipología de tareas propuestas en relación a estos contenidos, destinadas a determinar los puntos de acumulación, interiores o la clausura de conjuntos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$. Cabe destacar que la terminología que se emplea es ajena a otras nomenclaturas presentes en la literatura especializada. Además, se contempla una proposición en la que se ilustra la caracterización por sucesiones de los puntos de acumulación; si bien, no de una manera explícita, puesto que en la obra las cuestiones relativas a sucesiones se tratan en capítulos posteriores. Aun así, este hecho se subsana en el capítulo dedicado a las sucesiones.
SSR	Se hace uso únicamente del sistema de representación simbólico para represar los conjuntos de puntos de acumulación, interiores o adherentes, adoptando la simbología universalmente establecida.
F	Al plantear actividades se recurre a determinados conjuntos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ en los que identificar los conjuntos de puntos aislados, interiores o adherentes.
NCS	Predomina el nivel intuitivo en el tratamiento de los conceptos, con el que se consigue rebajar el nivel de complejidad que presentan los conceptos, tal y como se manifiesta al definir los conceptos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$. A la hora de caracterizar por sucesiones el concepto de punto de acumulación, predomina el nivel formal.

Tabla 4. Conceptos topológicos en Larson y Edwards (2010)

EC	No se manifiestan. La obra no dedica ningún capitulo al tratamiento explicito de los conceptos topológicos elementales. Si bien, a la hora de definir la noción de límite finito de una función en un punto x_0, se propone un ejemplo en el que, sin hacer mención alguna a las cuestiones topológicas, se presenta en forma tabular un conjunto finito de valores, distintos a x_0, pero próximos a él. Además se incluye una representación gráfica que permite ilustrar dicha situación. La idea que subyace a estos planteamientos es la de que x_0 es un punto de acumulación
SSR	No se contemplan explícitamente. Únicamente se hace uso del sistema de representación tabular, en el que se representan los distintos valores próximos a x_0 y del sistema de representación gráfico.
F	El tratamiento implícito de los puntos de acumulación está ligado a la idea de aproximación.
NCS	Se trabajan los conceptos desde una perspectiva muy intuitiva evitando cualquier formalización o abstracción de los mismos. El nivel predominante es el intuitivo.

Síntesis comparativa I: conceptos topológicos

A la luz de la información extraída de cada obra, cabe destacar el tratamiento que de los conceptos topológicos se realiza en las mismas. Si bien en Apostol (2006) se abordan estas cuestiones con una mayor profundidad, es destacable, que a la hora de definir conceptos topológicos básicos no lo haga en espacios topológicos, ni siquiera en espacios métricos diferentes de la recta real. Este hecho condiciona la tipología de actividades que en relación a esta temática se proponen en la obra. El resto de las obras, en las que no se contempla explícitamente alusión alguna a los contenidos topológicos básicos que intervienen en la definición de límite finito de una función en un punto, presentan una mayor riqueza de sistemas de representación, de utilidad a la hora de subsanar sus carencias. Esto explica que el nivel de completitud semántica predominante en las obras, a excepción de en Spivack (1996), y en Apostol (2006) donde comparte presencia con el nivel formal, sea el intuitivo.

Concepto de límite

Las carencias en relación a los contenidos topológicos elementales que manifiestan las obras, contrastan con el tratamiento que en ellas se hace de la noción de límite finito de una función en un punto.

Previamente al establecimiento de la definición de límite finito de una función en un punto que se adopta en cada una de las obras, resulta de interés ahondar en los aspectos teóricos que cada una de ellas propone en aras de conseguir una aproximación a la idea de límite. Este hecho contribuye a vislumbrar el significado que cada obra asume de dicho concepto. Para llevar a cabo esta tarea se continúa con la metodología establecida anteriormente, como se muestra en la Tabla 5 y en la Tabla 6. No recogemos aquí las tablas correspondientes a las otras dos obras por limitaciones de espacio.

Tabla 5. Concepto de Límite en Apostol (2006)

EC	Atendiendo a las nociones que se han ido estableciendo sobre espacios métricos y sus propiedades, se propone la dedición formal de límite finito de una función en un punto en un espacio métrico cualquiera. Se acompaña además de una representación gráfica válida para espacios métricos cualesquiera. En la obra se contempla además la caracterización por sucesiones de dicha definición.
SSR	Se hace uso del sistema de representación simbólico a la hora de establecer la definición, además del gráfico que permite ilustrar el sentido que subyace a la misma.
F	Dentro de la sección dedicada al límite finito de una función en un punto no se hace referencia alguna a este respecto. De forma implícita, por medio de la caracterización por sucesiones se hace uso de una lenguaje propio de “aproximación” y “tender a”, lo que alude a situaciones de aproximación.
NCS	Se trabaja con los conceptos desde una perspectiva abstracta. La noción de límite adquiere un papel de objeto matemático en torno al cual se organizan sus propiedades en forma de proposiciones o teorema. Predomina por tanto el nivel de abstracción.

Tabla 6. Concepto de Límite en Spivack (1996)

EC	Antes de abordar la noción de límite, se trabaja con las ideas de aproximación y tendencia, por medio de representaciones gráficas. Se recoge la definición formal de límite. La obra también se encarga de caracterizar dicha definición por medio de sucesiones.
SSR	Se contemplan sistemas de representación simbólicos y gráficos.
F	Se proponen situaciones destinadas a explorar las ideas de aproximación y tendencia.
NCS	Predominan los sistemas formal y abstracto. Se aproxima a trabajar la idea de límite como un concepto dual.

A tenor de la información recogida se pone de manifiesto las diferencias que se establecen a la hora de tratar el concepto de límite finito de una función en un punto, apostándose en la mayoría de las obras por no reconocer la naturaleza dual con la que cuenta el concepto. Por otro lado, como nexo de unión entre las obras, figuran las ideas de tendencia y aproximación, trabajadas en la mayoría de ellas, con mayor o menor, profundidad. Fruto del trabajo con ellas radica la mayor o menor presencia de sistemas de representación distintos al simbólico.

A modo de contraste con el análisis realizado, se recogen las definiciones formales que se proponen, en cada una de las obras, para la definición de límite finito de una función en un punto. Un ejemplo de ello es la que se muestra en la Figura 1.

DEFINICIÓN

La función f **tiende hacia el límite** l **en** a **significa**: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Figura 1. Definición de límite finito en un punto. Spivack (1996)

Las definiciones que se proponen en las obras evidencian diferencias sustanciales en relación a los aspectos que unos autores u otros desean potenciar. Cabe destacar, en este sentido, el empleo que del lenguaje matemático se hace en cada una de ellas, la presencia o no, de explicaciones complementarias al simbolismo dominante en las definiciones o la alusión a los conceptos topológicos.

Síntesis comparativa II: concepto de límite

A la vista de los resultados resulta de interés ahondar en las particularidades que cada una de las obras manifiesta en torno al concepto de límite. A excepción de la obra de Apostol (2006), previamente a la introducción del concepto de límite el resto abogan por trabajar ideas en conexión a él como las de tendencia o aproximación, destacando en esos casos la presencia de los sistemas de representación gráfico y tabular, complementando al simbólico. En Ayres (1989) y Larson y Edwars (2010) y, en menor medida en Spivack (1996), no se reconoce la naturaleza dual que subyace en el concepto de límite, apostando por un tratamiento de éste como proceso en detrimento de cómo objeto matemático. Este hecho gana fuerza al analizar las tareas que se recogen en las obras, en su mayoría centradas en el cálculo de límites.

En relación a las definiciones formales de límite finito de una función en un punto, las obras hacen uso del lenguaje matemático que, en ocasiones, complementan con lenguaje verbal, a fin de clarificar las ideas que el primero expresa; hecho que avala el enfoque educativo de las mismas. Destaca la definición propuesta en Apostol (2006) para espacios métricos generales, como la única con una alusión explícita a los conceptos topológicos básicos (noción del punto de acumulación). Si bien, el resto de definiciones, de manera implícita, contempla este hecho al excluirse en todas ellas el punto sobre el que se plantea el límite de una función. Otra cuestión será la relación que de esto haga el estudiante o si se satisfacen las pretensiones formativas a las que aspira el profesor al incluir dichas obras en la bibliográfica básica de una determinada asignatura de Análisis Matemático; pero eso no es objeto de estudio de la presente investigación.

El hecho de evadir la inclusión de nociones topológicas, como la de punto de acumulación, o de rebajar la fuerza del lenguaje simbólico, incluyendo lenguaje verbal en la definición de límite, también refuerza la idea de que en las mayoría de la obras se potencia la noción de límite como proceso.

CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos en la investigación así como de los objetivos planteados al inicio de la misma se concluye lo siguiente.

Aun estando la misma obra presente en bibliografías básicas correspondientes a grados universitarios conducentes a perfiles profesionales bien dispares, se contempla una mayor preferencia hacia aquellas en las que los conceptos topológicos no se manifiestan explícitamente o incluso no se dedica un capítulo a ellos en las obras. La mayoría de ellas apuestan por trabajar con algunas ideas, como las de tendencia o aproximación, que posibilitan, de forma implícita, subsanar este hecho.

En relación al objetivo número uno, cabe destacar la endeble presencia que en las obras se confiere a los conceptos topológicos, hecho coherente con el tratamiento que se hace de las distintas nociones matemáticas que requieren de estos conceptos para su construcción. Destaca la ausencia, en la mayoría de obras, de capítulos dedicados a los conceptos topológicos, de ahí a que en este estudio se haya distinguido entre una presencia o manifestación explícita o implícita de los mismos.

En relación al segundo objetivo, la mayoría de las obras apuestan por potenciar la concepción de límite como proceso, confiriendo una mayor importancia a las propiedades destinadas al cálculo de los mismos en detrimento de las que ahondan en el estudio de su estructura como concepto. Este hecho cobra especial relevancia al analizar la tipología de actividades, que en las obras se proponen, para afianzar los conocimientos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del grupo del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) y del proyecto "Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación" (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICINN).

Referencias

Apostol, T. (2006). *Análisis Matemático*. 2ª Edición. Barcelona, España: Reverté.

Ayres, F. (1989). *Cálculo Diferencial e Integral. Teoría y 1175 problemas resueltos*. Serie Schaum. Madrid, España: Mc Graw-Hill.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, *12*(1), 145-168.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula, 10,* 119-13.

Bosch, M., Gascón, J., y Sierra, T. (2009). Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: El caso de los sistemas de numeración. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 139-150). Santander, España: SEIEM.

Chevallard (1991). *La transposition didactique. Dusavoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, Francia: La pensé sauvage.

Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Fernández-Plaza, J. A., Castro, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 - 237). Jaén, España: SEIEM.

Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 21-36). Santander, España: SEIEM.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de Matemáticas. Los puntos críticos en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.

Labrador, C., Beatrán-Quera, M., Diez-Escaniano, A y Martínez, J. (1986) *La Ratio Studiorum de los Jesuitas.* Madrid, España: Universidad Pontificia de Comillas.

Larson, E. y Edwars, B. H. (2010). *Cálculo I, de una variable*. 9ª Edición. México D. F.: Mc Graw-Hill.

Monterrubio, Mª C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-54). Santander, España: SEIEM.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM*, 1, 39-63.

Robert, A. y Robinet, J. (1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels* (IREM). Universidad de París, Francia.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 463-476.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 71-75.

Sierra, M., González, M. T. y López, M. C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 29,* 77-94.

Spivack, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal*. 3ª Edición. Barcelona, España: Editorial Reverté.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Tall, D., Gray, E., Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M.F., Thomas, M.J. y Yusof, Y.B. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1, 81–104.

Thompson, P.W. y Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection. Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 117-131). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

---

[1] Por ejemplo, en el caso de titulaciones de la Universidad de Granada estas obras están incluidas en las guías docentes de las siguientes asignaturas: "Matemáticas I" (Grado en Ingeniería Civil), "Análisis Matemático I" (Grado en Estadística y Grado en Física), "Cálculo" (Grado en Ingeniería informática), "Cálculo I" (Grado en Matemáticas) y "Matemáticas" (Grado en Economía y Grado en Administración y Dirección de Empresas). También cuentan con una presencia relevante, en la formación inicial en Análisis Matemático de diversos perfiles académicos, en un buen número de universidades españolas como las de Jaén (Diplomatura en Estadística y Grado en Estadística y Empresa), Sevilla (Grado en Matemáticas y Grado en Economía), Salamanca (Grado en Estadística) o Cantabria (Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas y Grado en Ingeniería Civil).