

# GÉNESIS INSTRUMENTAL EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3-DIMENSIONAL. EL CASO DE UN ESTUDIANTE DE ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA<sup>1</sup>

## Instrumental genesis in a 3-dimensional dynamic geometry environment. The case of a mathematically gifted student

Ángel Gutiérrez, Adela Jaime, Francisco Javier Alba

Universitat de València

### Resumen

*El uso de las aplicaciones de geometría dinámica 3-dimensional en las clases de matemáticas está planteando diversas cuestiones importantes a los investigadores en didáctica de las matemáticas. En este texto analizamos la actividad de un estudiante de alta capacidad matemática resolviendo una secuencia de tareas para el aprendizaje de conceptos relativos a relaciones entre rectas y planos en el espacio. Las tareas estaban planteadas en un entorno de Cabri 3d. Aportamos una interpretación, desde la óptica de la teoría de la génesis instrumental, de los conflictos surgidos durante la resolución de las tareas como consecuencia de la forma como la aplicación representa los planos en la pantalla del ordenador, que es imitada por el estudiante.*

**Palabras clave:** *software de geometría dinámica, geometría espacial, génesis instrumental, educación secundaria, talento matemático.*

### Abstract

*The use of 3-dimensional dynamic geometry software in the mathematics classrooms is raising a number of important questions to researchers in mathematics education. In this paper we analyze the activity of a mathematically gifted student solving a sequence of tasks for the learning of concepts relative to relationships between straight lines and planes in space. The tasks were posed in a Cabri 3d environment. We provide an interpretation, from the perspective of the instrumental genesis theory, of the conflicts arisen while solving the tasks as a consequence of the way the software represents the planes on the computer screen, which is imitated by the student.*

**Keywords:** *dynamic geometry software, space geometry, instrumental genesis, Secondary Education, mathematical giftedness.*

### INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones han analizado la utilidad de los entornos de geometría dinámica plana (EGD2d) para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría plana (Laborde y otros, 2006, Battista, 2007). La conclusión mayoritaria es que los EGD2d pueden ser un instrumento muy útil para facilitar el aprendizaje de la geometría, si bien su utilización no es trivial y los estudiantes deben afrontar algunas dificultades inherentes a las características del entorno. Fernández (2013) señala algunas de estas posibles dificultades, como la necesidad de desarrollar habilidades de visualización para analizar los momentos intermedios de la construcción durante el arrastre o la diferencia entre los dibujos de los libros de texto y los de la pantalla del ordenador. Arnal y Planas (2013) describen dificultades originadas por lo poco significativo que era el EGD2d diseñado para los estudiantes.

Más recientemente, la aparición de programas de geometría dinámica 3-dimensional ha hecho crecer el campo de aplicación de los EGD al estudio de la geometría espacial. Los entornos de geometría dinámica 3-dimensional (EDG3d) incorporan características diferenciadas respecto de los

Gutiérrez, A., Jaime, A., Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM.

EGD2d derivadas de las peculiaridades de la geometría espacial respecto de la geometría plana.

En la década de 1990, didactas franceses introdujeron la teoría de la génesis instrumental, lo cual les permitió analizar y entender ciertas dificultades experimentadas por los estudiantes al aprender álgebra con calculadoras gráficas y simbólicas (Artigue, 2002; Guin, Ruthven y Trouche, 2005). Teniendo en cuenta las diferencias entre una calculadora y un programa de geometría dinámica pero también las similitudes entre ambos entornos de aprendizaje, en los últimos años han empezado a desarrollarse investigaciones que utilizan la teoría de la génesis instrumental para analizar y entender las interacciones entre estudiante y máquina en un EGD2d (Restrepo, 2008; Morera y Fortuny, 2010) y en un EGD3d (Mackrell, 2006; Salazar, 2009; Alba, 2012).

En investigaciones anteriores, hemos identificado y caracterizado varios obstáculos que encuentran los estudiantes cuando empiezan a aprender el uso de Cabri 3d, directamente relacionados con el manejo del ratón y con la interpretación 3-dimensional de la información ofrecida en la pantalla del ordenador, es decir con el inicio de la génesis instrumental de Cabri 3d (Alba, 2012).

Diversos estudios publicados coinciden en señalar algunas características diferenciadoras de las formas de razonar y resolver problemas de los estudiantes con altas capacidades matemáticas (aa.cc.mm.) respecto de los estudiantes medios de sus mismos cursos (Krutetskii, 1976; Greenes, 1981; Miller, 1990; Ramírez, 2012). Ninguno de estos estudios, realizados en contextos muy diversos, tiene como base la observación de estudiantes de aa.cc.mm. resolviendo problemas en EGD2d ni EGD3d. La conjetura más plausible es que los estudiantes de aa.cc.mm. muestran también esas características distintivas cuando interactúan con entornos informáticos. Pero se trata de una conjetura sin base experimental que la valide o rechace, por lo que es una cuestión interesante de investigación.

Estamos desarrollando una línea de investigación centrada en analizar las características del razonamiento matemático de los estudiantes de aa.cc.mm. Uno de los aspectos que nos interesan es crear conjuntos de actividades matemáticas ricas (Jaime y Gutiérrez, 2014) y observar las formas de resolver estas actividades de diferentes tipos de estudiantes. La utilidad de los EGD para diversificar la enseñanza y motivar a los estudiantes hace que parte de nuestro trabajo se oriente a desarrollar actividades para un EGD2d (Benedicto, 2013) y un EGD3d (Alba, 2012) y a analizar la actuación de estudiantes de aa.cc.mm. en dichos entornos. Así, se produce de manera natural la integración de la teoría de la génesis instrumental en nuestra línea de investigación.

Presentamos resultados de un estudio de un caso en el que aportamos información sobre las siguientes **cuestiones de investigación**: ¿qué obstáculos relacionados con la representación de objetos geométricos 3-dimensionales encuentran estudiantes de aa.cc.mm. al utilizar un EGD3d? ¿Cómo superan los estudiantes esos obstáculos? ¿Cómo se desarrollan los procesos de génesis instrumental relativos a la representación de objetos geométricos 3-dimensionales cuando los estudiantes resuelven tareas planteadas en un EGD3d?

En las secciones siguientes hacemos un resumen de los principales elementos de la teoría de la génesis instrumental y presentamos el análisis de la actuación de un estudiante de aa.cc.mm. de 2º de ESO, con el fin de identificar la evolución de su génesis instrumental en este EGD3d mientras resuelve una secuencia de actividades de geometría espacial basadas en Cabri 3d.

## MARCO TEÓRICO

La teoría de la *génesis instrumental* describe los cambios en la interacción entre un *sujeto* y un *artefacto* a medida que el sujeto adquiere experiencia y práctica en el uso del artefacto (Rabardel, 2002). Un artefacto puede ser físico (p. ej., una máquina o una herramienta) o simbólico (p. ej., un diagrama o un ábaco). Dicha interacción entre sujeto y artefacto tiene un componente físico (manipulación de la máquina, el diagrama, etc.) y otro psicológico (interpretación de la información recibida por el sujeto y toma de decisiones de actuación sobre el artefacto).

Rabardel (1999) analiza la evolución de la relación sujeto - artefacto e introduce el concepto de *instrumento* para identificar el resultado de la asimilación por el sujeto de algunas características del artefacto cuyo dominio le permite alcanzar el objetivo planteado. Para Rabardel, el instrumento está formado por un artefacto y por *esquemas de uso* resultantes de la interacción del sujeto con el artefacto, esquemas que pueden haber sido elaborados por el propio sujeto o haber sido apropiados.

En el aprendizaje de las matemáticas mediante EGD, el sujeto es el estudiante y el artefacto está formado por el teclado, ratón o pad, pantalla, etc. del ordenador más la parte del programa informático que necesita utilizar el estudiante (por ejemplo, para hacer una construcción geométrica en Geogebra no es necesario utilizar su hoja de cálculo). Las interacciones del estudiante con el ordenador (manejo del teclado, ratón o pad, uso del menú, observación de la pantalla, etc.) tienen como objetivo resolver un problema o aprender unos contenidos mediante la interpretación en clave matemática por el estudiante de la información ofrecida por la pantalla y la transformación de su razonamiento matemático en decisiones de actuación sobre el ordenador (elección de un comando, acción de arrastre, etc.). La génesis instrumental, es decir la formación de un instrumento por un sujeto, tiene dos componentes:

- La *instrumentalización* concierne al surgimiento y evolución de los componentes del artefacto que forman parte del instrumento: selección, reagrupamiento, producción e institución de funciones, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento,..) que prolongan la concepción inicial de los artefactos.
- La *instrumentación* se refiere al surgimiento y la evolución de los esquemas de uso: su constitución, su funcionamiento, su evolución así como la asimilación de nuevos artefactos a esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1999, p. 9)

Así pues, mediante los procesos de instrumentalización el sujeto aprende a utilizar de manera más eficaz la parte del artefacto que necesita, hasta llegar a un nivel de perfección en su uso suficiente para poder resolver los problemas planteados. Y mediante los procesos de instrumentación el sujeto crea esquemas de acción instrumentada (es decir, de acción mediante el uso del instrumento) orientados a permitirle resolver las tareas planteadas. Ambos procesos evolucionan generalmente de manera simultánea. En el contexto de los EGD3d basados en Cabri 3d, los procesos de génesis instrumental incluyen una variedad de elementos, entre los que destacamos:

- Manejo de los comandos: algunos comandos realizan una única acción, pero otros actúan de maneras diferentes dependiendo de los objetos seleccionados o de si se pulsa o no determinada tecla. Por ejemplo, el comando “Perpendicular” permite hacer cuatro construcciones diferentes.
- Manejo de la opción “bola de cristal”, que permite cambiar la ubicación del observador alrededor del espacio para ver los objetos construidos desde cualquier posición.
- Idiosincrasias de Cabri 3d, en especial la referente a la movilidad de los puntos construidos sobre el “plano base” (el plano XY, en adelante pb): un punto construido en la parte visible del pb (el cuadrilátero que lo representa en la pantalla) no puede moverse fuera del plano, mientras que un punto construido en el pb fuera de la parte visible sí puede sacarse del pb.
- Códigos visuales: dada la inevitable pérdida de información que se produce cuando se proyecta del espacio sobre un plano (Parzysz, 1988), como la pantalla del ordenador, Cabri 3d ofrece al usuario diversos códigos para ayudarle a visualizar e interpretar correctamente la imagen presentada en la pantalla. Así, se utiliza el código de la perspectiva que hace aparecer más pequeños los objetos más lejanos: la recta AB (Figura 1) es aproximadamente paralela a la pantalla, y la recta CD forma un ángulo mayor con la pantalla, siendo su parte derecha la que se acerca al observador.

La complejidad de la geometría espacial hace que sólo sea posible adquirir destreza en el uso de los EDG3d si paralelamente se van adquiriendo determinados conocimientos geométricos. Mackrell (2006), al describir un experimento de enseñanza basado en Cabri 3d, indica que los procesos de

génesis instrumental deben incluir tanto la adquisición de destreza en el uso del programa como el aumento de la comprensión de la geometría espacial. Salazar (2009) lo confirma al constatar que sus alumnos, desarrollaban estrategias de uso de Cabri 3d al mismo tiempo que establecían conexiones entre el programa y sus conocimientos matemáticos. En la experimentación que presentamos podremos observar también esta situación.

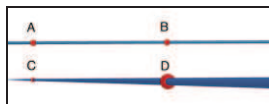


Figura 1. Dos rectas en la pantalla de Cabri 3d.

## METODOLOGÍA

El aprendizaje de la geometría espacial empieza en E. Primaria con el estudio descriptivo de poliedros y cuerpos de revolución. En 2º de ESO se inicia el estudio de los puntos, rectas y planos en el espacio, sus posiciones relativas y la medida de ángulos, que continúa en cursos posteriores al estudiar isometrías del espacio y geometría analítica.

Para analizar las ventajas e inconvenientes del uso de los EGD3d en las aulas de E. Secundaria para la enseñanza de la geometría espacial, hemos diseñado un entorno de este tipo para enseñar en las clases ordinarias de 2º de ESO los conceptos de punto, recta y plano en el espacio, las diferentes posiciones relativas de puntos, rectas y/o planos en el espacio (coincidencia, pertenencia, corte, cruce, paralelismo y perpendicularidad) y sus características, así como algunas propiedades relacionadas. El EGD3d se basa en Cabri 3d y todas las actividades se realizan usando el programa.

La secuencia de actividades experimental consta de un cuestionario escrito (sin uso del ordenador) cuyo objetivo es identificar los conocimientos y concepciones de los estudiantes sobre los contenidos matemáticos objeto de estudio (descritos en el párrafo anterior) y de 24 actividades centradas en el estudio de dichos contenidos geométricos mediante la creación y movimiento de puntos, rectas y planos y la medida de ángulos. Las actividades piden a los estudiantes crear puntos, rectas y planos que cumplan determinados requisitos, arrastrarlos y observar las relaciones matemáticas presentes. Para cada actividad, los estudiantes disponen de una ficha con su enunciado y espacio para la respuesta escrita y de un archivo de Cabri 3d para manipular durante la resolución. En las páginas siguientes describimos algunas actividades.

La experimentación que presentamos se realizó con un estudiante de aa.cc.mm. de 2º de ESO. Antes de empezar la experimentación, el estudiante manejaba con confianza los comandos geométricos de Geogebra y había usado en algunas ocasiones Cabri 3d, para realizar construcciones basadas en la manipulación de poliedros. Por lo tanto, el estudiante tenía suficiente experiencia en el uso de programas de geometría dinámica, y en particular de Cabri 3d, para poder interactuar con comodidad con el ordenador, tanto al usar comandos como al seleccionar y arrastrar objetos. En cuanto a sus conocimientos previos de geometría, había estudiado las relaciones entre rectas en el plano y los elementos descriptivos de poliedros y cuerpos redondos de los cursos anteriores, pero no había estudiado nada relacionado con los contenidos de la secuencia de actividades.

Las sesiones de trabajo tuvieron lugar fuera del horario escolar, mediante entrevistas entre el estudiante y uno de los investigadores, que actuó como profesor, y fueron de duración variable, dependiendo del tiempo empleado por el estudiante para resolver las actividades previstas para cada sesión. En total hubo seis sesiones. En la primera sesión el estudiante respondió el cuestionario, en las sesiones 2ª a 5ª resolvió las 24 actividades y en la 6ª sesión respondió de nuevo el cuestionario.

Los datos recogidos consisten en las respuestas escritas en la fichas, los archivos de Cabri 3d usados por el estudiante, la grabación mediante un programa de captura de pantalla de las interacciones del estudiante con el ordenador y la grabación de las conversaciones entre estudiante e investigador. Hacemos un análisis de tipo cualitativo de estos datos, centrado en identificar y analizar elementos

que nos permitan dar respuestas, aunque sean iniciales, a las cuestiones de investigación planteadas.

## DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE UN CASO

El experimento empieza presentando al estudiante el cuestionario, 18 cuestiones de respuesta libre en las que se recorren los diferentes casos de relaciones entre planos y/o rectas en el espacio: nueve cuestiones piden dibujar planos y/o rectas que estén colocadas en determinada posición relativa (paralelas, perpendiculares, que se corten). Las cuestiones sobre paralelismo o intersección van seguidas por una pregunta de cuántos puntos tienen en común dos rectas / dos planos / una recta y un plano que se cortan / son paralelos. Además, hay dos cuestiones que piden dibujar dos rectas que estén en planos paralelos y preguntan cuántos puntos tienen en común estas dos rectas.

### Inicio de la génesis instrumental

La Figura 2 muestra los dibujos realizados por el estudiante en respuesta a las cuestiones 1, 3 y 5, las cuales ponen de relieve de manera consistente un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1976) que tiene que ver con el paralelismo entre su forma de representar un plano en el papel y la forma como Cabri 3d representa un plano en la pantalla.



Figura 2. Dibuja un plano y dos rectas que estén en el plano a) paralelas, b) que se corten, c) perpendiculares.

Cuando el estudiante va a hacer el dibujo de la cuestión 1 (Figura 2-a), se inicia este diálogo:

- Estud.: ¿Cómo dibujo un plano en la hoja?  
 Investig.: A ver, ¿cómo se te ocurre a ti dibujar un plano?  
 E: Pues un cuadrado ... [empieza a dibujar el plano de Figura 2-a] ... bueno, un intento de cuadrado. Y dos rectas paralelas.  
 I: Pero dentro del plano. [E termina de dibujar el plano y las dos rectas paralelas] ¿Las rectas se pueden salir del plano [es decir del rectángulo dibujado]?  
 E: Sí, pero como has dicho dentro del plano, pues no salgo del plano.



Figura 3. ¿Cuántos puntos tienen en común dos rectas a) paralelas b) que se cortan?

Las cuestiones 2 y 4 preguntan cuántos puntos tienen en común dos rectas paralelas / que se cortan. El estudiante hace los dibujos de la Figura 3 para justificar que las rectas no tienen ningún punto en común (Figura 3-a) o tienen un único punto en común (Figura 3-b). Al observar los guiones dibujados por el estudiante como representación de las rectas, el investigador le pregunta:

- I: ¿Por qué dibujas esos puntitos sueltos a los lados [los guiones]?  
 E: Porque [las rectas] siguen y siguen.

En la cuestión 8, el estudiante debe dibujar dos planos que se corten. Su dibujo inicial (Figura 4-a) consiste en los dos rectángulos vertical y horizontal, a lo que sigue este diálogo:

- I: ¿Puedes marcar el corte? [E remarca la zona de la intersección de los rectángulos en Figura 4-a] ¿Los planos son finitos? ... ¿Dónde se acaban?  
 E: ¿Cómo que dónde se acaban? No entiendo la pregunta.  
 I: Que si los planos son esos rectangulitos.  
 E: ¡Ah! Sí.

- I: Entonces, ¿los planos son ese rectángulo y ya? ... ¿Por fuera del rectángulo no sigue el plano?
- E: No.
- .....
- I: ¿Y por qué las rectas son indefinidas?
- E: Porque lo dice su definición.
- I: Entonces, ¿las rectas caben en los planos o no?
- E: No. ... Podemos cortar una recta y hacer un segmento de la recta y meterlo en el plano.
- I: No, los planos son ilimitados, igual que las rectas.
- E: Bueno, eso depende. Yo ahora he dibujado un plano limitado, pero también puede haber planos ilimitados.
- .....
- I: Igual que las rectas son ilimitadas, los planos también son ilimitados.
- E: Bueno, depende. Si no dibujo los puntos suspensivos ...
- I: Pero los planos son como son. Aunque los dibujes o no los dibujes con los puntos suspensivos, lo que pasa es que, igual que en las rectas, dibujas un trocito porque no puedes dibujarlas enteras, con los planos tienes que dibujar un trocito porque no puedes dibujarlos enteros.
- E: Mira, ¿ves? Ahora puedo hacer así ... [empieza a dibujar los planos de Figura 4-b y sigue hablando mientras dibuja] y ahora puedo hacer así ... significa que los planos siguen hasta el infinito y más allá por ahí. O sea, que serían como una recta gorda. ... Y se cortarían ... [rellena el rectángulo de la intersección en Figura 4-b].

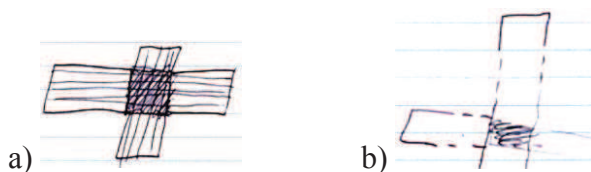


Figura 4. Dibuja dos planos que se corten.

Esta conversación con el estudiante y otros similares durante la sesión confirman el origen de este obstáculo: al haber utilizado con anterioridad Cabri 3d, el estudiante ha visto cómo se representan los planos en la pantalla, ha interiorizado esta representación y está tratando de que su concepción de plano, que admite que los planos son ilimitados, sea coherente con esa representación finita. Así, ha generado una concepción de plano en el espacio según la cual un plano puede ser ilimitado o limitado a la región dibujada, según le interese. Por lo tanto, el obstáculo experimentado por el estudiante es parte de su proceso de instrumentalización de Cabri 3d, pues es un obstáculo inducido por su interpretación de la forma como el programa representa los planos. Para confirmar esta conclusión podemos fijarnos en que el estudiante dibuja correctamente las rectas (es decir de acuerdo con los convenios habituales) y responde y justifica correctamente las preguntas sobre cantidad de puntos en común en las diferentes posiciones relativas de rectas, pero tiene dificultades con las intersecciones entre rectas y planos. La Figura 5 muestra los dibujos que hizo el estudiante en respuesta a la cuestión 15, que pedía dibujar un plano y una recta perpendiculares. Su respuesta a la cuestión 16, sobre la cantidad de puntos en común entre el plano y la recta es:

- I: ¿Cuántos puntos tienen en común un plano y una recta perpendiculares? Por ejemplo, ese plano de la izquierda [Figura 5, izquierda] con la recta vertical.
- E: Pues muchos. Tiene este, este, este, ... [marca el segmento de la recta contenido dentro del rectángulo del plano]

- I: Bueno, infinitos. No hace falta que los marques más. Y en la figura de la derecha, ¿ese plano con la recta vertical?
- E: Ninguno.
- I: Entonces, ¿en qué quedamos?
- E: En que es infinitos o ninguno. Hay dos opciones.

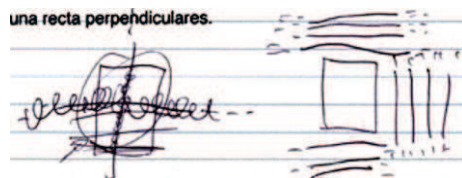


Figura 5. Dibuja un plano y una recta perpendiculares.

### Evolución del proceso de instrumentalización

Identificado el obstáculo, en las siguientes sesiones el investigador propicia cuando es posible reflexiones y comentarios sobre el concepto de plano en geometría 3-dimensional, la concepción del estudiante y el convenio sobre la representación de un plano en el papel o en el ordenador. Brevemente, describimos y analizamos algunos de estos momentos clave.

En la actividad 1 el estudiante abre un archivo de Cabri 3d con el pb y ocho puntos que están distribuidos por encima y por debajo del pb, en la zona visible del pb y en la zona no visible del pb. El estudiante debe usar la bola de cristal para ver el conjunto desde diferentes puntos de vista. También debe arrastrar los puntos horizontal y verticalmente. El punto A, por haber sido creado en la zona visible del pb, no puede desplazarse verticalmente. El estudiante lo nota:

- E: No me deja [el punto A no se puede desplazar verticalmente].
- I: ¿Por qué el A no?
- E: ¿Porque estaba en el plano y no se puede salir del plano?
- I: El plano base tiene dos zonas. La zona que ves, el cuadrilátero de color oscuro, y la zona exterior. Cuando construyes un punto en la zona roja [la parte visible del pb], ese punto solo se puede mover por el plano, peor no puedes levantarlo verticalmente. Si el punto lo construyes en el pb pero fuera de la zona rojiza, entonces sí lo puedes subir y bajar. ¿Está claro ya?

El estudiante parece haber entendido el procedimiento, pues en la actividad 2 crea diversos puntos en los lugares adecuados. Sin embargo, en la actividad 3, en la que debe crear dos rectas  $a$  y  $b$  en el pb para estudiar la coincidencia de rectas, coloca el primer punto de la recta  $a$  en el pb pero fuera de la zona visible y lo arrastra dentro de la zona visible y después crea el segundo punto de esta recta directamente dentro de la zona visible (recta transversal de Figura 6). El investigador le pregunta:

- I: ¿El plano base desde dónde hasta dónde va?
- E: Desde aquí, pasando por aquí y por aquí y por aquí [mientras señala en orden las cuatro esquinas de la zona visible del pb].
- I: O sea, ¿el cuadrilátero ese de color?
- E: Sí.
- I: ¿Y la parte de fuera no es plano base?
- E: No. Es ... no es nada.
- I: ¿No es nada? Sí, es el plano base.
- E: Bueno sí, pero en esta figura nos imaginamos como si el plano base fuese sólo eso.

- I: No, eso es la parte que se representa, pero el plano base es todo el plano.
- E: Sí, pero estamos hablando de lo que se representa.
- I: Cuando ahí [en el enunciado de la actividad] dice plano base quiere decir todo el plano, no solamente ese trocito [la zona visible].
- E: Entonces creo otra [recta] aquí fuera [crea la recta vertical de Figura 6].



Figura 6. Crea dos rectas  $a$  y  $b$  en el plano base.

Al principio, el estudiante sigue pensando que el pb es solamente la parte visible, pero al decirle el investigador que no puede limitarse a considerar esa parte del plano, lo admite aunque trata de justificar el uso exclusivo de la zona visible. Al final del diálogo, parece haber asumido la conceptualización correcta, pues intencionadamente crea la segunda recta en el pb pero con puntos fuera de su zona visible. Por lo tanto, podemos decir que este diálogo incita un avance en el proceso de instrumentalización, ya que el estudiante mejora la comprensión que tiene de la diferencia entre el pb y su zona visible y parece aceptar el convenio de representación usado por el EGD3d.

Durante la resolución de la actividad 9, que pide crear dos rectas en el pb y dos fuera de él y arrastrarlas, observamos que el estudiante está completando su proceso de instrumentalización ya que tiene dificultades para expresarse pero sus ideas parecen ser válidas:

- I: ¿Qué has aprendido [en esta actividad]?
- E: Que ... los objetos que se encuentran en el plano base no podrán ser desplazados fuera del plano base.
- I: No, hay una recta que sí has cambiado.
- E: Pero los puntos no se encontraban en el plano base.
- I: No. Vamos a ver. Tú te refieres a la zona oscura.
- E: Sí.
- I: Esa es la zona visible del plano base, pero el plano base sigue por fuera. ¿No habíamos quedado en que ... [E le interrumpe]
- E: Que sí, que el plano base es infinito... pero digo la parte dibujada.
- I: Eso se llama la zona visible. Entonces, ¿qué es lo que tú querías decir, bien dicho?
- E: Los puntos... los objetos que se encuentran en el interior del plano base visible no podrán ser desplazados fuera de éste.

La actividad 21 pide crear un plano y tres rectas, una en el plano, otra que lo corte y otra que no lo toque. El estudiante ha avanzado muchos en el proceso de instrumentalización pues, para verificar que la recta que ha creado fuera del plano realmente no lo toca, se mueve con la bola de cristal hasta que ve la recta fuera de la zona visible del plano (Figura 7). El investigador le pregunta:

- E: Si lo ponemos así, podemos ver toda la recta.
- I: Pero ... ¿el plano dónde está?
- E: Aquí [señalando con el ratón la zona visible del plano azul]
- I: ¿Solamente es ese trozo el plano?



E: ¡Ah! Es verdad. No. Mi culpa. ... No es sólo ese trozo. ... Entonces tiene que ser paralela ... porque las paralelas son las que no cortan nunca [borra la recta y crea otra paralela al plano]

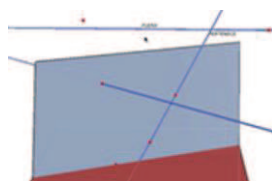


Figura 7. Intentando verificar que la recta superior horizontal está fuera del plano.

La actividad 22 estudia la propiedad de las rectas secantes de ser coplanarias. En la pantalla hay dos planos secantes, la recta de corte de los planos y un punto de esta recta que está fuera de las zonas visibles de los planos. El investigador pregunta si este punto está en uno de los planos y el estudiante le contesta que “sí, porque el plano es infinito”. Esta respuesta nos permite concluir que el estudiante ya está empezando a utilizar de manera natural la infinitud de los planos y el convenio de representarlos mediante una región acotada. Por lo tanto, ya ha completado el proceso de instrumentalización del EGD3d en lo referente a los planos. Esta conclusión se confirma por el hecho de que, en la última sesión, al contestar el cuestionario en la última sesión, realiza correctamente todos los dibujos que en la primera sesión hizo mal (debido a su concepción errónea de plano en el espacio) y responde bien a las preguntas.

## CONCLUSIONES

Como mencionábamos en la introducción, son muy pocas, y muy recientes, las investigaciones que muestran la aplicación de la teoría de la génesis instrumental para analizar la actividad de los estudiantes en EGD3d. Nuestro trabajo aporta información en esta línea de investigación, que está empezando a desarrollarse y tiene un interesante potencial de progreso futuro.

En respuesta a las cuestiones de investigación planteadas en la introducción, hemos mostrado el caso de un estudiante que, a pesar de tener aa.cc.mm., interpreta incorrectamente la información gráfica proporcionada por Cabri 3d. Hemos visto cómo, a lo largo de la secuencia de actividades se va desarrollando, con ciertas dificultades, el proceso de instrumentalización ligado a este obstáculo, a medida que va evolucionando la concepción de plano en el espacio del estudiante. Esta instrumentalización debe concluir con la superación del obstáculo. Hemos mostrado también que el planteamiento de actividades adecuadas, junto a conocimientos geométricos proporcionados por el profesor y preguntas o discusiones orientadas son la clave para la evolución de la génesis instrumental y la superación de los obstáculos.

De este experimento no se pueden extraer conclusiones sobre la generalidad o no del comportamiento observado, pues se trata sólo de un caso. Se necesitarán otros estudios en EGD3d similares para recoger más información sobre mayor número de estudiantes antes de poder identificar comportamientos similares.

## Referencias

- Alba, F. J. (2012). *Dificultades de interpretación y de uso de los arrastres en Cabri 3D por estudiantes de ESO* (Memoria de Trabajo Fin de Máster no publicada). Valencia: U. de Valencia. Disponible en <[http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/25780/Alba,F.J.\(2012\).pdf](http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/25780/Alba,F.J.(2012).pdf)>.
- Arnal, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de la Geometría con grupos de riesgo: un enfoque discursivo. En A. Berciano y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 157-164). Bilbao: SEIEM.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3), 245-274.

- Battista, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, EE.UU.: NCTM.
- Benedicto, C. (2013). *Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas* (Memoria de máster no publicada). Valencia: Univ. de Valencia. Disponible en <[http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/32580/Clara\\_23-01-2014.pdf](http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/32580/Clara_23-01-2014.pdf)>.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En J. Vanhamme y W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe Rencontre de la CIEAEM* (pp. 101-117). Lovaina, Bélgica: CIEAEM.
- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.
- Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 28, 14-18.
- Guin, D., Ruthven, K., y Trouche, L. (Eds.). (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators*. N. York: Springer.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de E. Primaria con altas capacidades matemáticas. En Gómez, B. y Puig, L. (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*. Valencia: PUV.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., y Sträesser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Mackrell, K. (2006). Cabri 3D: potential, problems and a web-based approach to instrumental genesis. *Proceedings of the 7th ICMI Study Conference "Technology revisited"*, 2, 362-369.
- Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. Washington, DC: ERIC.
- Morera, L., y Fortuny, J. M. (2010). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías. En M. M. Moreno y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 435-450). Lleida: SEIEM.
- Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.
- Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la 10e Université d'Été de Didactique des Mathématiques*, 203-213.
- Rabardel, P. (2002). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Univ. Paris 8. [traducción al inglés: Rabardel, P. (2002). *People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments*. Paris: Univ. Paris 8]
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada. Disponible en <[http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver\\_detalle/7461/descargar](http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalle/7461/descargar)>
- Restrepo, A. M. (2008). *Génese instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème* (Tesis doctoral no publicada). Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier.
- Salazar, J. V. F. (2009). *Génese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço* (Tesis doctoral). Sao Paulo, Brasil: Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo.

<sup>1</sup> La investigación presentada es parte de las actividades de los proyectos de I+D+i *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259) y *Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico* (EDU2011-23240), subvencionados por el Gobierno de España.