

PERCEPCIÓN DE LOS FUTUROS MAESTROS Y PROFESORES SOBRE USOS Y ENSEÑANZA DE RECURSOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Future elementary and secondary mathematics teachers' perception of the use and teaching of resources in solving word conditional probability problems

M. Pedro Huerta^a, Joaquín Arnau^b

^aUniversitat de València, ^bColegio Pío XII de Valencia

Resumen

En este trabajo exploramos la percepción que tienen los estudiantes para maestros y profesores de matemáticas sobre los recursos para la resolución de problemas de probabilidad condicional en una doble vertiente, como resolutores de problemas y como futuros docentes. Los resultados muestran como los futuros docentes, como resolutores, tienen preferencias por un conjunto de recursos entre los que destacan las listas organizadas de datos, las tablas de contingencia y los diagramas en árbol, proponiendo su enseñanza dependiendo del nivel educativo y las finalidades de los estudios.

Palabras clave: *Formación de profesores, resolución de problemas, probabilidad condicionada, recurso para la resolución de problemas de probabilidad condicional.*

Abstract

In this piece of work we explore the perception that future elementary and secondary mathematics teachers have of the uses of the resources for solving conditional probability problems. Students are considered in a double condition: as problems solvers and as futures teachers of problem solving. Results show us that, as solvers, future teachers have preferences for a determined set of resources that includes data listings, contingency tables (2 x2 table) and tree diagrams, proposing their teaching depending on the educative level and the studies' purposes.

Keywords: *Teachers training, problem solving, conditional probability, resources for solving problems of conditional probability.*

INTRODUCCIÓN

En la resolución de problemas de probabilidad condicional, por la particularidad de estos problemas, la enseñanza suele ofrecer como medios para la organización de la información y el cálculo de cantidades, entre otros, las tablas de contingencia, los diagramas en árbol y el lenguaje simbólico y, en menor medida, las listas organizadas y los diagramas de Venn. Como problemas de matemáticas que son, los resolutores a veces incorporan al catálogo de medios para la organización de la información y el cálculo de nuevas cantidades representaciones espontáneas e idiosincráticas dependiendo del contexto en el que se formula el problema: urnas, o bolsas, por ejemplo, con una determinada distribución de bolas, en el contexto de extracciones aleatorias.

La investigación sobre el uso de estas representaciones o medios de organización, o recursos para la resolución de problemas de probabilidad condicional, como las designaremos a lo largo de este trabajo, es bastante escasa aunque con cierto interés como lo atestiguan trabajos relacionados con éste como, por ejemplo, en Estrada y Díaz (2006); Contreras, Estrada, Díaz y Batanero (2010); Corter y Zahner (2007) o Zahner y Corter (2010), a pesar de la dificultad que entrañan dichos

problemas para casi la totalidad de estudiantes que se enfrentan a ellos, incluidos los futuros maestros y profesores (Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo, 2011; Arnau, 2012). Maestros y profesores en formación, con posterioridad, pueden verse en la tesitura de llevar a cabo su enseñanza, en función del currículum que tengan que desarrollar. Esto hace que la reflexión sobre la formación de los futuros maestros y profesores en la resolución de estos problemas y en el uso de dichos recursos como resolutores y formadores sea pertinente abordarla. Una parte de esa reflexión se puede fundamentar en la manera en la que éstos perciben dichas representaciones o recursos en el doble papel en el que los vamos a situar, como resolutores de problemas y como futuros maestros o profesores de dichos problemas.

PROBLEMÁTICA Y MARCO DE REFERENCIA

En este trabajo, por tanto, informaremos sobre los primeros resultados obtenidos al hacernos las siguientes preguntas en un estudio de corte exploratorio:

1. ¿Qué dificultades presentan los problemas de probabilidad condicional a los futuros maestros y profesores?
2. ¿Qué recursos suelen usar los futuros maestros y profesores en la resolución de dichos problemas?
3. ¿Cómo perciben los futuros maestros y profesores los recursos que utilizan como resolutores de problemas como objetos de enseñanza?

De los problemas que hablamos aquí son problemas de probabilidad condicional definidos por dos sucesos básicos A y B y sus complementarios, sus probabilidades y las probabilidades conjuntas y condicionales que se pueden considerar al tomar dos cualesquiera de ellos. Son problemas verbales, formulados en contexto y con un formato de expresión para las cantidades que solamente se refieren explícitamente a probabilidades en la pregunta del problema, es decir, frecuencias y porcentajes. Son problemas que llamamos ternarios (Cerdán y Huerta, 2007), escolares (Lonjedo, Huerta y Carles, 2012) y que han sido usados para investigar su resolución en otros muchos trabajos (Arnau y Huerta, 2013 y Huerta, 2014).

El marco de referencia en el que situamos la formación de profesores es el marco teórico conocido como *Mathematical Proficiency for Teaching* (MPT, Wilson y Heid, 2010), un ejemplo de su uso en la formación de profesores de matemáticas educación secundaria puede verse en Conner, Wilson y Kim (2011), y en particular con una de sus tres dimensiones que tienen que ver con el trabajo matemático que conlleva la enseñanza. Elementos con el que se caracteriza el *proficiency* de dicho trabajo (Wilson y Heid, 2010, p. 3) son tenidos en cuenta aquí, en particular el que es llamado *proficiency in mathematical activity* (p. 10). Nuestro interés ahora no está en describir ni caracterizar dicha *proficiency* en maestros y profesores sino en obtener información sobre cómo debe ser dicha *proficiency* en la resolución de problemas de probabilidad condicional para su posterior caracterización.

METODOLOGIA

Muestra

27 alumnos de 4º Curso del grado de Maestro de Educación Primaria (mención en Educación Musical) y 30 estudiantes del curso de postgrado Máster en Profesado de Educación Secundaria, participaron en un estudio más amplio, longitudinal, en el que investigamos los usos de sistemas de representación en la resolución de problemas de probabilidad condicional. Los estudiantes de Magisterio, en el momento en el que participaron de esta investigación, habían completado el curso sobre Didáctica de la Geometría, la medida, la estadística y la probabilidad, de 6 créditos. En este curso, le dedicamos 4 sesiones de 2 horas cada una al análisis didáctico de la probabilidad como una medida y a la resolución de problemas de probabilidad, entre los cuáles se incluían los

problemas de probabilidad condicionada. En dicho análisis cabe el de los sistemas de representación para la resolución de los problemas. Cabe además, extender el campo de problemas más allá de los propios en el currículum de primaria, con lo que nos situamos en el entorno del marco teórico conocido como *Horizon Content Knowledge* (HCK) descrito en Fernández y Figueiras (2014).

Por su parte, los estudiantes del Máster, con una presencia escasa del 33% de graduados en Matemáticas y una amplia representación de ingenieros en la muestra, habían cursado 3 créditos en didáctica de la probabilidad. Los sistemas de signos o sistemas de representación o recursos, según se considere cada noción, para la resolución de problemas están presentes a lo largo de todo el curso en el análisis didáctico de la probabilidad en la educación secundaria obligatoria y en el bachillerato. En ambos casos, los cursos fueron impartidos por uno de los firmantes de este artículo.

Método

Con el fin de explorar cómo perciben los futuros maestros y profesores los recursos para la resolución de problemas de probabilidad condicional, tanto como resolutores como futuros enseñantes, primero les propusimos que fueran resolutores de problemas y después que describieran su perfil en la doble condición en la que les habíamos situado: como resolutores y como (futuros) enseñantes. Sabemos que los futuros maestros tal vez no tengan ocasión de abordar la resolución de esos problemas pero, no obstante, quisimos pulsar su percepción ante la hipótesis de una posible enseñanza de estos problemas y esos recursos: si los introduciría, cuáles y por qué. En todo caso a los maestros se les sitúa con conocimientos suficiente para evaluar un horizonte más lejano en el que se ubicarán sus estudiantes de primaria en la transición hacia la secundaria (Fernández & Figueiras, 2014, p. 9)

Tabla 1. Variables de la tarea y sus valores en los problemas de los cuestionarios.

| P | Estructura de datos | Estructura conceptual | Contexto | Formato de datos | Número de resoluciones |
|----|--|-----------------------|------------|------------------|------------------------|
| 1 | L ₀ C ₂ T ₁ | PC | Est Social | F, p | 28 |
| 2 | L ₀ C ₂ T ₁ | PC | Est Salud | %, p | 28 |
| 3 | L ₀ C ₂ T ₁ | PC | Urnas | F, p | 29 |
| 4 | L ₀ C ₂ T ₁ | PC | Test Diag | %, p | 29 |
| 5 | L ₁ C ₁ T ₂ | PT | Est Social | F, %, p | 29 |
| 6 | L ₁ C ₁ T ₂ | PT | Est Salud | %, p | 29 |
| 7 | L ₁ C ₁ T ₂ | PT | Urnas | F, %, p | 28 |
| 8 | L ₁ C ₁ T ₂ | PT | Test Diag | %, p | 28 |
| 9 | L ₂ C ₁ T ₁ | T. Bayes | Est Social | F, %, p | 28 |
| 10 | L ₂ C ₁ T ₁ | T. Bayes | Est Salud | %, p | 28 |
| 11 | L ₂ C ₁ T ₁ | T. Bayes | Urnas | F, %, p | 29 |
| 12 | L ₂ C ₁ T ₁ | T. Bayes | Test Diag | %, p | 29 |
| | | | | Total | 342 |

Léase: L_iC_jT_k, la familia de problemas (Huerta, 2014). Estructuras conceptuales: PC (definición de probabilidad condicional), PT (Teorema de la probabilidad total), T. Bayes (Teorema de Bayes). Formato de cantidades conocidas: F (frecuencias absolutas), % (porcentajes) y desconocidas (pregunta del problema, p en probabilidad).

En la misma tesitura se sitúa a los futuros profesores, pero en este caso sabiendo que los problemas sí deben ser objetos de enseñanza a lo largo de toda la educación secundaria (12-18 años). Esta vez, quisimos ver, además, si los futuros profesores preveían una introducción escalonada de los recursos a lo largo de la toda la enseñanza secundaria en función de algún tipo de complejidad, ya en los problemas ya en la estructura interna de los recursos.

De una selección de 12 problemas, cuyas características se describen en la Tabla 1, se diseñaron dos cuestionarios de 6 problemas cada uno. El primero (con los problemas 1, 2, 7, 8, 9 y 10) fue resuelto por 28 estudiantes (13 de Magisterio y 15 de Máster); mientras que el segundo (con los problemas 3, 4, 5, 6, 11 y 12) fue resuelto por 29 estudiantes (14 de Magisterio y 15 de Máster). En total, por tanto, disponemos de 162 resoluciones correspondientes a futuros maestros y 180 resoluciones de los futuros profesores.

Consideraremos, para cada problema, tres tipos de dificultades (Huerta y otros, 2011; Huerta, 2014) la dificultad aparente, la dificultad del problema y la dificultad de la solución del problema. La primera se mide a partir del número de estudiantes que no abordan la resolución de un problema dado, la segunda por el número de estudiantes que llegan a dar una respuesta a la pregunta formulada y, finalmente, la tercera por el número de estudiantes que dan como respuesta un número correcto para la probabilidad preguntada.

Por otra parte, para obtener información sobre la percepción que tienen los futuros maestros y profesores sobre su perfil de resolutores y de enseñantes, diseñamos una encuesta *on line* utilizando el editor de formularios de Google. El primer diseño de la encuesta fue probado con profesores de secundaria en activo (un total de 9), a quienes les propusimos que resolvieran algunos de los problemas del cuestionario y les pedimos que contestaran a la encuesta como enseñantes experimentados. Esta prueba piloto nos permitió modificar y perfeccionar las preguntas hasta que tuvimos los formularios que finalmente fueron propuestos. Éstos constan de tres partes: información general sobre el resolutor, información sobre el perfil como resolutor e información sobre el perfil como (futuro) docente. La primera y la tercera presentan diferencias, que resultan obvias, entre el formulario dirigido a los futuros maestros y el dirigido a los futuros profesores. La encuesta contiene tanto preguntas de elección múltiple como preguntas de respuestas abiertas, generalmente éstas últimas justificando o bien una valoración previa o bien una elección o posición previa, ya sea como resolutor o como futuro docente. Brevemente puede verse el contenido de la encuesta a continuación:

- Datos iniciales. Aquí se le pedía una identificación así como la titulación de acceso a los estudios que estaban realizando.
- Como resolutor. Al encuestado se le pedía contestar a las siguientes preguntas:
 - *Indica el número de problemas que has abordado.* Esto nos da una idea de la “dificultad aparente” que puede tener un problema y en consecuencia del cuestionario.
 - *Indica el número de problemas en los que has llegado a una solución.* Esto nos da idea de lo que llamamos “dificultad del problema”, como aquella que no permite al resolutor dar una respuesta a la pregunta formulada.
 - *Indica en cuál o cuáles de los siguientes recursos sueles confiar más para resolver problemas como los que has abordado.* Para cada uno de los recursos (*Lista organizada de datos, Diagramas de árbol, Tablas de contingencia (Tablas 2x2), Diagramas de Venn (conjuntos), Lenguaje simbólico (fórmulas), Otros (dependiendo del problema)*), el estudiante tenía que asignarle un valor entre 0 y 5 en función del grado de confianza que él o ella depositaba en dicho recurso.
 - *Si has escogido la opción otros, pon algún ejemplo.*
 - *Justifica, por favor, tus preferencias.*
- El perfil de resolutor. *De las siguientes opciones, escoge la que creas que mejor se adapta a tu perfil como resolutor de problemas de probabilidad condicional.*

- *Independientemente del problema, siempre los resuelvo usando...:* El estudiante debe escoger una de las siguientes opciones: *tabla de contingencia (solamente), diagramas de árbol (solamente), tabla de contingencia y diagrama de árbol, tabla de contingencia y fórmulas, diagrama de árbol y fórmulas, lista organizada y fórmulas*
- *No, dependo del problema.*

Indica, por favor, cuál o cuáles de las características te hacen decidirte por un recurso u otro. El estudiante podía escoger más de una de las siguientes opciones:

- *Depende de cómo se expresen los datos (en %, en frecuencias o en probabilidad)*
- *Depende de si conozco el contexto (por ejemplo, uso recursos diferentes según si es de urnas, cartas, test de diagnóstico...)*
- *Depende del tipo de datos conocidos que tenga (Si en los datos hay probabilidades de intersección, o condicionales...)*
- *No dependo de ninguna característica del problema.*
- *Por favor, justifica tus elecciones de las dos preguntas anteriores.*

El perfil como docente. Distinguimos entre las dos versiones: como maestro/a y como profesor/a

- Como maestro/a: *Ahora, piensa como futuro maestro/a.*
 - *¿Cuál o cuáles de los siguientes recursos crees que sería razonable introducir en la enseñanza de la probabilidad en Ed. Primaria?* El estudiante podía escoger más de una de las siguientes opciones: *Lista organizada de datos, Diagramas de árbol, Tablas de contingencia, Diagramas de Venn, Lenguaje simbólico, Otros (dependiendo del problema).*
 - *Trata de dar una breve justificación de tus elecciones.*
- Como profesor/a: *Ahora, piensa como profesor/a de matemáticas. Si tuvieras que enseñar resolución de problemas de probabilidad condicional, en cuál o cuáles de los siguientes recursos pondrías énfasis, dependiendo del nivel:* Para cada nivel educativo (4ºESO, BTO humanidades/ciencias sociales y BTO científico/técnico), el estudiante podía escoger más de una de las siguientes opciones: *Lista organizada de datos, Diagramas de árbol, Tablas de contingencia, Diagramas de Venn, Lenguaje simbólico, Otros (dependiendo del problema).*
 - *Trata de dar una breve justificación de tus elecciones.*

El formulario *online* fue enviado a los estudiantes por correo electrónico después de que realizaran el cuestionario de problemas. Los estudiantes participaron de manera voluntaria y obtuvimos un total de 20 (de 27) respuestas por parte de los futuros maestros y 22 (de 30) de los futuros profesores.

La información obtenida por la encuesta la hemos tratado cualitativamente a partir de un tratamiento descriptivo de los datos numéricos (escalas de valores sobre los recursos) y los datos cualitativos (perfil de usuario y de futuros maestro y profesor). Las variables cualitativas definidas para el grado de confianza en un recurso, el perfil de resolutor y el perfil de enseñante y sus valores son los siguientes:

- Confianza en los recursos seleccionados, justificada basándose en que éste: organiza la información, facilita el cálculo, visualizan los datos del problema, otros y no justifica.
- Perfil de resolutor. Confianza estable en un conjunto de recursos para la resolución de los problemas o no. En este último caso, el recurso elegido depende del problema.

- Justificación de su perfil, basándose en que: Es independiente del problema o es dependiente, en cuyo caso dependiente de la expresión de los datos, del conocimiento del contexto y de la tipología de los datos; dominio y conocimiento de un determinado recurso; en su eficiencia/utilidad; eficacia; otras razones.
- Perfil como enseñante. Conjunto de recursos que, a juicio del (futuro) maestro y profesor, serían objeto de enseñanza.
- Justificación del perfil como enseñante, basándose en que son: medios de organización de la información del problema; visualizan los datos del problema, son eficientes/eficaces, otras razones.

Dado que el cuestionario *online* admite respuestas abiertas, una respuesta puede contener aspectos contenidos en más de un valor de las distintas variables consideradas. Es por esto que en algunos casos la suma de frecuencias sea mayor que el total de la muestra y la de porcentajes mayor que 100.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Aparentemente, los problemas del cuestionario no presentaron ninguna dificultad inicial a los futuros maestros pues todos ellos abordaron la resolución de los problemas de su cuestionario. De las 162 resoluciones, en 144 ocasiones (88,9%) los futuros maestros llegaron a proporcionar una respuesta a la pregunta del problema. De este número de respuestas, en 72 ocasiones (50%) las soluciones del problema fueron números correctos.

Los datos anteriores no nos deben hacer pensar que las dificultades de la solución de los problemas se distribuyen por igual al 50%. Los estudiantes tuvieron más dificultades en unos problemas que en otros, de tal manera que algunos no fueron resueltos correctamente por ningún futuro maestro (caso del problema P6) y en cambio otros por la práctica totalidad de ellos (11 de 13 en el problema P7 y 11 de 11 que respondieron en el P9). Pero esto que solamente es información sobre la actuación de los futuros maestros merece un análisis posterior que no haremos en este trabajo, pues su objetivo es otro. No obstante, lo que nos informa es que si son usuarios competentes de determinados recursos, éstos, por sí mismos, no les evitan dificultades en determinados problemas que, en cambio, en otros problemas no encuentran, aun siendo los problemas en cuestión estructuralmente isomorfos (los problemas P6 y P7 pertenecen a la misma familia de problemas).

Los futuros maestros confían básicamente en tres recursos, que por este orden (de mayor a menor valoración media), son: tablas de contingencia ($\mu=3.8$, $\sigma=1.4$); lista organizada ($\mu=3.3$, $\sigma=1.5$) y diagramas de árbol ($\mu=2.75$, $\sigma=1.44$). El resto de recursos, diagramas de Venn, el recurso simbólicos y otros (como dibujos u otras representaciones gráficas) quedan lejos de aquéllos e incluso no llegan a ser aprobados por los usuarios ($\mu<1.5$). Estos resultados difieren en mucho de aquellos que aportan en sus trabajos Corter y Zahner (2007) y Zahner y Corter (2010) también para una muestra de estudiantes futuros maestros.

Las razones por las cuáles los futuros maestros confían en sus recursos pueden agruparse en tres: porque hace visibles los datos del problema (64.7%) (*La tabla es muy visual y te das cuenta enseguida si tienes todos los datos o te falta alguno*, M27), porque organizan la información del problema (58.8%) (*Creo que en la tabla de contingencia y en el diagrama de árbol se ve la información más organizada y clara, por eso utilizo preferentemente estos recursos*, M110) y, en menor medida porque facilita el cálculo (41.18%) (*Utilizando la tabla de contingencias, puedo ver fácilmente la relación existente entre los datos del problema y la incógnita que me pide y, por tanto, me resulta mucho más fácil resolver el problema*, M19). Los recursos pues les ayudan a hacer lecturas de los problemas de un modo organizado que les facilita la comprensión del mismo y el cálculo.

Muy pocos estudiantes (4 de 20) han modelizado la resolución de estos problemas haciendo uso de los recursos independientemente del problema de que se trate. El resto, dependen en mayor o menor medida de las variables del problema, de las que hemos hablado con anterioridad (Tabla 1). Así, 5 de 20 no declaran tener un perfil claro como resolutor. Eligen un recurso u otro en función del problema de que se trate (*Según los datos del problema utilizo un recurso u otro. Si los datos del problema son dicotómicos, normalmente lo resuelvo mediante una tabla de contingencias. Sin embargo, cuando hay más de dos posibilidades, utilizaría otros recursos. Normalmente el diagrama de árbol o la lista organizada de datos, M19*), mientras que 13 de 20 confían en la tabla de contingencia como recurso básico (*Según el problema, me resulta más cómodo utilizar una forma de resolver el problema u otra. Normalmente me suelo decantar por la tabla, como he dicho anteriormente, M27*), ya sea en exclusividad (3 de 13) o en compañía de otros recursos (8 de 13, asociada con el diagrama de árbol y 2 de 13 asociada al registro simbólico).

Ningún futuro maestro/a declara que no debería hacerse enseñanza de los recursos que han usado para la resolución de los problemas propuestos y, por ende, de problemas en los que se pudieran usar. Al contrario, señalan unos más propicios que otros. Como era de esperar, una mayoría abrumadora (18 de 20) no haría enseñanza del recurso simbólico (*Me parecen —lista, árboles y tablas— los más asequibles para el nivel de primaria, porque el lenguaje simbólico me parece muy complejo para primaria. También añadiría los dibujos, M11*), manteniendo, en cambio, sus preferencias distribuidas entre diagramas de árbol (85%), listas organizadas (75%) y tablas de contingencia (70%), lo que comparado con su valoración como resolutores es justo la posición simétrica. Parece que, aun valorando altamente los recursos mencionados, le otorgan más complejidades o unos que a otros (*Creo que tanto las fórmulas como las tablas de contingencia son algo demasiado abstracto para los alumnos. Considero más apropiados para la educación primaria recursos que ayuden a visualizar el problema: lista de datos, diagrama de Venn o diagrama de árbol, M16*). Valoran mucho las tablas de contingencia como resolutores pero valoran más a los diagramas de árbol y las listas como recursos que podrían enseñarse a los estudiantes de primaria. Claro, en la justificación de porqué enseñarían estos recursos, el 55% menciona aspectos relacionados con la eficiencia y eficacia del recurso (*Pienso que mediante las tablas de contingencia se llega pronto a una solución y son fáciles de hacer (aunque depende de los datos). Las normas que se usan para llegar a la solución son muy elementales, M14*), dándoles el mismo peso por ser medios para organizar la información del problema y visualizar los datos del problema (40%) (*La tabla de contingencia por su claridad y organización. El diagrama de árbol porque también supone muy gráfico y se pueden trabajar más de dos variables. Y la lista porque es una forma de entender el problema y extraer los datos del mismo, M213*). Algunos incluso se sitúan en el horizonte de los estudiantes de primaria (*He elegido tanto el diagrama de árbol y la tabla de contingencias porque de este modo los alumnos ya tendrán algunos conocimientos sobre los mismos antes de llegar a la educación secundaria, ya que actualmente se enseñan en esta etapa educativa, M113*).

Al igual que para los futuros maestros, los problemas no presentan ninguna dificultad inicial para los futuros profesores, pues de 180 resoluciones, llegan a dar respuesta en 158 casos (87,8%). De entre éstas, 92 (el 58,2%) dieron como resultado un número correcto. De aquí observamos como estos problemas son algo menos difíciles para los estudiantes de máster que para los de magisterio (41,8% frente al 50%). Se observa, además, una distribución similar problema a problema. Por ejemplo, el problema 6 sólo fue resuelto correctamente por 4 de 15 estudiantes (27%), mientras que el problema 7 fue resuelto correctamente por la totalidad de los que dieron respuesta (14 de 14).

Los recursos preferidos por los futuros profesores son, por este orden, los diagramas de árbol ($\mu=3,95$; $\sigma=0,79$), las tablas de contingencia ($\mu=3,23$; $\sigma=1,62$) y la lista organizada de datos ($\mu=3,10$; $\sigma=1,44$). En menor medida encontramos el recurso simbólico ($\mu=2,52$; $\sigma=1,59$) y por último los diagramas de Venn y otros recursos. Observamos aquí un cambio en el orden de

preferencias, el diagrama en árbol pasa a ser el recurso favorito para resolver los problemas frente a la tabla de contingencia de los futuros maestros.

De entre los que han dado argumentos para justificar sus preferencias, el 60% hace referencia a motivos de visualización del problema (*En la tabla de contingencias es la que me permite ver y representar mejor los datos*, P214); el 33,3% a razones de organización de los datos (*Lo veo todo más claro en los diagramas de árbol o las tablas 2x2. Quedan claros los datos, las incógnitas y el orden que necesitas seguir*, P112); el 26,6% a la sencillez/eficiencia del recurso (*El diagrama árbol, me resulta más intuitivo y fácil de analizar y recordar*, P211); y el 20% aluden además a que facilita los cálculos (*Entre mis preferencias se encuentran las tablas de contingencia y los diagramas de árbol porque lo considero una manera de ordenar los datos de una manera visual, donde a partir de los datos conocidos, completamos la tabla o las ramas del árbol obteniendo datos desconocidos a priori, que nos pueden ser útiles para resolver el problema*, P27).

Al igual que ocurría con los maestros, son pocos (7 de 22) los que afirman no depender de las características del problema para utilizar un recurso u otro, sino que han universalizado uno o varios recursos y los usan independientemente del problema de que se trate. Los otros 15 de 22 afirman depender de alguna de las características del problema. Entre estos, 13 dependen del tipo de datos conocidos para decantarse por un recurso u otro (*En los problemas de probabilidad condicionada suelo utilizar tablas, ya que percibo la globalidad del problema y me evita recurrir a la memorización de las fórmulas. Éstas me gusta utilizarlas cuando no tengo que buscarlas en mi memoria. Los diagramas en árbol los utilizo en problemas de intersección y unión (AyB, AoB) ya que me resulta muy cómodo (por lo metódico que es) ir multiplicando probabilidades y sumando cuando cambio de rama*, P210). En cualquier caso, los diagramas de árbol parecen ser el recurso predilecto por los futuros profesores: 13 de 22 afirman utilizarlo, 5 en combinación con fórmulas (registro simbólico), 8 en combinación con tablas de contingencia, pero en ningún caso en solitario. (*Suelo utilizar el diagrama del árbol para organizar la información. Según lo que pida el problema (probabilidades de intersección, condicionales, probabilidades totales, etc.) uso las fórmulas que considero adecuadas*, P12).

En la tabla siguiente (Tabla 2) puede verse la propuesta que los futuros profesores hacen sobre qué recursos enseñar y en qué nivel. En cada casilla se ofrece el porcentaje de aquéllos que harían enseñanza de ese recurso y en ese nivel.

Tabla 2. Porcentaje de futuros profesores (N=22) que proponen la enseñanza de un determinado recurso para un determinado nivel educativo.

| Nivel educativo | L | DA | TC | DV | RS | O |
|----------------------|----|----|----|----|----|----|
| 4º ESO | 45 | 95 | 68 | 32 | 9 | 5 |
| BTO CCSS | 45 | 82 | 86 | 27 | 45 | 9 |
| BTO CIENTÍFICO/TECNO | 55 | 77 | 91 | 32 | 82 | 14 |

L= lista organizada, DA= Diagrama de árbol, TC= Tabla de contingencia, DV= Diagrama de Venn, RS= Recurso simbólico (fórmulas), O = otros (dibujos, otras representaciones gráficas que no son las anteriores).

La suma de los porcentajes nunca puede ser 100 pues se pueden proponer más de un recurso.

Sin entrar en detalles, de la Tabla 2 puede apreciarse que lo que se propone tiene en cuenta el nivel educativo al que va dirigida, tiene en cuenta, por tanto, a los estudiantes y a la finalidad de los estudios a los que se refiere. Así, mientras que listas organizadas y diagramas de Venn no marcan diferencias, el recurso simbólico sí lo hace (*Me parece que en cursos anteriores hay que intentar explicar la probabilidad de una forma más visual (diagramas, tablas...) y en cursos más avanzados, además de consolidar estos métodos, habría que ampliar las posibilidades de resolución de los problemas con fórmulas...P21*). Más aún, el tipo de bachillerato al que se dirige su propuesta (*He seguido con los que me parecen más claro con la única diferencia que en el bachillerato*

científico/técnico he añadido también el lenguaje simbólico porque creo que tienen que ser capaces de usar las fórmulas correctamente y con mayor naturalidad y frecuencia, P111).

La finalidad en la introducción de los recursos está claramente expuesta en sus justificaciones, la visualización es el objetivo (*En la ESO proporcionaría una resolución lo más visual posible tratando de utilizar el menor número de fórmulas para resolver los problemas. En el Bachillerato, trataría de resolver los problemas utilizando varios métodos, comprobando que las fórmulas pueden deducirse a partir de lo visual, P23).*

CONCLUSIONES

A pesar de que los futuros maestros y profesores han recibido enseñanza reglada en sus diferentes trayectorias escolares y especializada, como futuros docentes, la resolución de problemas de probabilidad condicional presenta un cierto grado de dificultad que no desaparece aún cuando los resolutores llegan a tener un alto grado de conocimientos sobre los recursos que pueden usarse en la resolución de dichos problemas: qué recursos y cuándo y cómo pueden usarse. No obstante los resultados obtenidos en dichas dificultades son mejores, para algunos problemas, que aquellos reportados en Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo (2011), para una muestra de futuros profesores que no habían recibido enseñanza especializada en el momento en el que resolvieron los problemas. Efectivamente, siguen habiendo factores asociados a determinados tipos de problemas que influyen en el éxito de su resolución y que incluso una demostrada competencia en los recursos disponibles para su resolución no llegan a evitar completamente. Lo hemos señalado para los problemas del anexo y tanto para los futuros maestros como para los futuros profesores.

Los resultados muestran que los resolutores (futuros maestros o profesores) tienen preferencias por unos determinados recursos frente a otros. Las listas organizadas, tablas de contingencia y árboles son los preferidos, con distinto grado de confianza dependiendo de si se trata de un futuro maestro (valorando más las tablas de contingencia) o un futuro profesor (quienes valoran más a los diagramas de árboles). Estos resultados son distintos de los obtenidos por Corter y Zahner (2007) quienes reportan que el uso de árboles y tablas es más bien escaso entre sus resolutores, a pesar de la presencia de éstos en todo momento en el curso recibido. Sin duda, en ambos casos, la influencia del modelo de enseñanza “especializada” recibida por los futuros maestros y profesores es clara.

En consonancia con sus preferencias como resolutores, los futuros docentes se definen como futuros enseñantes. Ninguno de los futuros maestros rechaza la posibilidad de que estos recursos puedan ser objeto de enseñanza en la educación primaria, aún siendo conscientes de que no forman parte del currículo escolar, ni los problemas ni los recursos posibles. En primer lugar, se justifican por la capacidad de visualizar y organizar la información contenida en el problema y, en segundo, por su eficiencia y eficacia para obtener la respuesta a la pregunta del problema, una vez que todos los datos del mismo están disponibles y se hacen visibles en el recurso de que se trate. Todos menos el recuso simbólico que en razón se decide considerarlo no apropiado para sus futuros alumnos.

En parecidos términos a los maestros se pronuncian los futuros profesores. A sabiendas de que los problemas y sus recursos sí deberían ser objeto de enseñanza tanto en la educación obligatoria como postobligatoria, los futuros profesores diferencian su perfil de enseñantes en función del nivel educativo y la finalidad de esos estudios. Así, mientras que la presencia de los diagramas en árbol decrece desde la ESO hasta el bachillerato científico y tecnológico, pasando por el bachillerato de ciencias sociales, aumenta la presencia de la tabla de contingencia y el recurso simbólico, de tal manera que éste solamente es razonable en el bachillerato y, su presencia debe ser mayor en el bachillerato científico y tecnológico.

Referencias

- Arnau, J. (2012). *Un estudio exploratorio de la resolución de problemas de probabilidad condicional centrado en la fase de cálculo*. Memoria de investigación. Màster de Investigació en Didàcticas Específicas. Universitat de València.
- Arnau, J. & Huerta, M. P. (2013). Probabilidad vs Porcentaje en la formulación de problemas de probabilidad condicional. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 165-173). Bilbao: SEIEM
- Cerdán, F. & Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19 (1), 27-62.
- Corter, J. E. & Zahner, D. (2007). Use of External Visual Representations in Probability Problem Solving. *Statistics Education Research Journal*, 6 (1), 22-50.
- Conner, A. N; Wilson P. S. & Kim, H. J. (2011). Building on mathematical events in the classroom. *ZDM Mathematics Education*, 43, 979–992.
- Contreras, J. M.; Estrada, A.; Díaz, C. & Batanero, C. (2010). Dificultades de los futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: SEIEM
- Fernández, S. & Figueiras, L.(2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, 3(1), 7-29.
- Estrada, A. & Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two-way tables: an exploratory study with future teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education.
- Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*. Dordrecht: Springer, 613-639.
- Huerta, M. P.; Cerdán, F. ; Lonjedo, M^a. A. & Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. In Marta Pytlak; Tim Rowland & Ewa Swoboda (Eds.) *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 807-817. Rzeszów:University of Rzeszów.
- Lonjedo, M^a A.; Huerta, M. P. & Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15 (3), 319-338.
- Zahner, D. & Corter, J. E. (2010). The process of Probability Problem Solving: Use of External Visual Representations. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 177-204.
- Wilson, P. S. & Heid, M. K. (Eds.). (2010). *Framework for mathematical proficiency for teaching*. Athens, GA/University Park, PA: Center for Proficiency in Teaching Mathematics/Mid-Atlantic Center for Mathematics Teaching and Learning.