

SIGNIFICADOS DE POLINOMIOS Y SUS RAÍCES EN UN AMBIENTE DE EVALUACIÓN EN LÍNEA

Maximino Dórame Velásquez y Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
Universidad de Sonora.
mdorame@ciencias.uson.mx, acastillo@gauss.mat.uson.mx

México

Resumen. El propósito de este trabajo es presentar los avances de un proyecto de investigación cuyo objetivo es describir los *significados institucionales y personales* de polinomios y sus raíces en un curso de Álgebra del primer semestre de ingeniería, al utilizar el sistema Maple T.A. Para describir los significados institucionales y personales se llevó a cabo un *análisis de texto*, donde la información proviene de los reactivos en el ambiente Maple T.A., de las respuestas de los estudiantes registradas en dicho sistema y de los procesos asociados documentados en hojas de trabajo. El análisis está basado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática y se denomina *Análisis Ontológico-Semiótico*. Consideramos que la descripción, así como el contraste, de los significados institucionales y personales de polinomios, y la determinación de conflictos semióticos aportarán elementos para entender los procesos de enseñanza y aprendizaje de polinomios y raíces al usarse el sistema Maple T.A.

Palabras clave: Raíz de polinomio, significados, Maple T.A.

Abstract. The aim of this paper is to present the progress of a research project which has by objective to describe the *institutional and personal meanings* of polynomials and their roots in an Algebra course of the first semester of engineering, using the system Maple T.A. In order to describe the institutional and personal meanings, a text analysis was held. The information comes from the questions in the Maple T.A. environment, the responses of students recorded in the system and associated processes documented in worksheets. The analysis is based on the Onto-semiotic Approach of Mathematical Cognition and Instruction and it is called Ontological Semiotic Analysis. We consider both the description and the contrast between the institutional and personal meanings of polynomials, and determination of semiotic conflicts as well, provide elements to understand the teaching and learning of polynomials and roots at the Maple T.A. system

Key words: Polynomial root, Meanings, Maple T.A.

Introducción

Desde el año 2006, en la Universidad de Sonora se han estado implementando tareas y exámenes en línea (Del Castillo, Flores, 2012) para los cursos de Álgebra de primer semestre de los programas de ingeniería utilizando el sistema Maple T.A. (MapleSoft, 2013). El propósito de este trabajo es presentar los avances de un proyecto de investigación cuyo objetivo es describir los *significados institucionales y personales* (Godino, Batanero, 1994) sobre el tema de polinomios y sus raíces que se ponen en juego al utilizar el mencionado sistema. El trabajo se ha estructurado de la siguiente manera: se presenta el problema de investigación y su justificación, los elementos del marco teórico en los que se sustenta el trabajo, la metodología de investigación implementada para cumplir con el objetivo, y se finaliza con algunos análisis y resultados.

Problema de Investigación

Una gran cantidad de alumnos de primer semestre de ingeniería de la Universidad de Sonora, presentan notables deficiencias en el aprendizaje de ecuaciones polinomiales. El tiempo establecido para cubrir este tema en los planes y programas de estudio es reducido. Por tal motivo algunos

profesores están implementando tareas y exámenes a través del sistema Maple T.A. para promover el trabajo extraclase y la retroalimentación inmediata del mismo. Estas tareas y exámenes en línea se han estado implementando por varios años. Dado que los estudiantes registran en el sistema sólo las respuestas a las situaciones que se les presentan, se hace necesaria una investigación bien fundamentada que caracterice las prácticas y procesos llevados a cabo por los estudiantes en ese ambiente. Así, el presente trabajo tiene como objetivo caracterizar los significados institucionales y personales de polinomios y sus raíces. La investigación se lleva a cabo en un curso de Álgebra del primer semestre de ingeniería que utiliza sistemáticamente el software mencionado. Una investigación semejante se llevó a cabo considerando el tema de números complejos (Ibarra, Del Castillo, 2012). Consideramos que, tanto la descripción, así como el contraste, entre los significados institucionales y personales de polinomios y sus raíces, y la determinación de conflictos semióticos, aportarán elementos para entender los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados al usarse dicho sistema.

Elementos Teóricos

Para este trabajo se consideran, como fundamentación teórica, algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, J. D., 2002). Entre los elementos a considerar, podemos mencionar los sistemas de prácticas, los objetos matemáticos personales e institucionales, sus significados sistémicos, los elementos básicos del significado y las relaciones que se establecen entre ellos (funciones semióticas y conflictos semióticos).

En este enfoque teórico (referido como EOS) se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Asimismo, se declara que el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas que manifiesta una institución o un individuo sobre dicho objeto matemático, calificándose como institucional o personal (Godino, Batanero, 1994), respectivamente. Tanto el *significado institucional* como el *significado personal* tienen una tipología. El significado institucional puede ser de *referencia*, *pretendido*, *implementado* o *evaluado*; el significado personal puede ser *global*, *declarado* o *logrado*. Asimismo, los elementos básicos del significado son: *Situaciones-problema*, *Lenguaje*, *Conceptos-definición*, *Procedimientos*, *Proposiciones* y *Argumentos*, conocidos también como objetos matemáticos primarios. Todos estos elementos son herramientas útiles para caracterizar el conocimiento de los estudiantes y contrastarlo con lo que institucionalmente se pretende.

Metodología de Investigación

Con el propósito de cumplir con el objetivo planteado en esta investigación, se implementa una

técnica analítica, basada en el EOS, que nos permite determinar o caracterizar dichos significados. Ésta consiste en realizar un análisis sistemático de los objetos matemáticos y funciones semióticas que se ponen en juego en un segmento de actividad matemática; dicho análisis es llamado *análisis ontológico-semiótico* y se realiza siguiendo varias fases o etapas.

En una primera fase se determina el significado institucional de referencia. Para tal efecto, se identifican los objetos matemáticos y el sistema de prácticas que se promueven en el programa oficial de la asignatura, así como en textos referidos por profesores que imparten la materia. Posteriormente, en una segunda fase, se describe el significado institucional pretendido y el significado institucional implementado, mediante el uso del software Maple T.A. Para ello se determinan los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se promueven utilizando el sistema Maple T.A. En este caso, para llevar a cabo el análisis semiótico se toma cada tarea del sistema como una unidad de análisis. La tercera etapa consiste en describir el significado institucional evaluado, lo que se logra mediante la determinación de los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se consideraron pertinentes para ser incluidos en la evaluación en línea. Cada reactivo incluido en el examen se considera una unidad de análisis. En la última etapa se describen los significados personales declarado y logrado, así como conflictos semióticos, por lo que se analiza la actividad realizada por estudiantes de dos grupos distintos de Álgebra, tanto en el sistema Maple T.A. como en hojas de trabajo: se realiza un estudio de casos documentando el trabajo de tres alumnos representativos de cada grupo, haciendo una selección estratificada en términos de su desempeño.

En las secciones posteriores, se presentan algunos análisis y resultados, siguiendo el orden de las etapas de la metodología de investigación planteada.

Significado Institucional de Referencia

Situaciones-problemas: Se identifican aquellas que giran en torno a la descripción y determinación de raíces de polinomios de grado n en una variable, tales como evaluación, división y factorización de polinomios; articulación de representaciones gráficas y algebraicas; determinación de relaciones entre coeficientes y raíces de polinomios; estimación de raíces irracionales. Todas las situaciones son de carácter intra matemático.

Lenguaje: Comprenden las representaciones de polinomios y sus raíces en forma algebraica, gráfica, numérica y en menor medida tabular. La representación algebraica es la que se presenta en mayor medida y, una de las prácticas principales consiste en articular la representación algebraica y gráfica de un polinomio, haciendo énfasis en la noción de raíz.

Conceptos-definiciones: Polinomio, raíces de polinomios, números complejos, multiplicidad de raíces, grado de un polinomio.

Proposiciones: Teorema del algoritmo de la división, Teorema del residuo, teorema de la raíz y del factor, teorema de las raíces racionales, teorema de las raíces conjugadas, Teorema Fundamental del Álgebra.

Argumentaciones: Pruebas de las proposiciones. Asimismo, estas proposiciones son útiles para avalar los procedimientos que sirven para la determinación y clasificación de las raíces de polinomios.

Procedimientos: División de polinomios, evaluación de polinomios, factorización de polinomios, construcción de polinomios y ecuaciones polinomiales, articulación entre la representación gráfica y la algebraica de un polinomio, método de bisección para aproximar raíces irracionales.

La práctica *procedimientos* es la que más se promueve, por lo que se puede afirmar que el *significado institucional de referencia* de polinomios y sus raíces tiene una fuerte carga de la práctica procedimental.

Significado Institucional Pretendido e Implementado

Para determinar el significado institucional pretendido, se analizan las tareas diseñadas mediante el software Maple T.A. Una vez que las tareas se han realizado por los estudiantes y, éstas pasan a ser una fuente para la determinación del significado institucional implementado. El sistema cuenta con nueve tareas, cada una con un número variado de reactivos. Enseguida se presenta un resumen del significado institucional pretendido.

Situaciones-problemas: giran en torno a la determinación y clasificación de raíces de polinomios de grado n en una variable, tanto en forma algebraica como en la gráfica. Algunas de ellas son: evaluación, división y factorización de polinomios; articulación de las representaciones gráficas y algebraicas de polinomios; determinación de relaciones entre coeficientes y raíces de polinomios, entre otras situaciones, todas de carácter intra matemático.

Lenguaje: verbal, algebraico, gráfico y numérico. Una de las representaciones simbólicas importantes promovidas a través de este sistema es la sintaxis propia del software.

Conceptos-definiciones: Se promueven y se utilizan los que son necesarios para la determinación y clasificación de las raíces de polinomios: polinomio, raíz, grado de un polinomio, multiplicidad de una raíz, raíz compleja, raíz compleja conjugada, raíz racional, factor lineal de un polinomio, entre otras.

Proposiciones: se promueven o son necesarias las que giran en torno a la determinación y clasificación de raíces de polinomios. Tales como: Teorema Fundamental del Álgebra, teorema de factor, teorema del residuo, teorema del factor y de la raíz, entre otros.

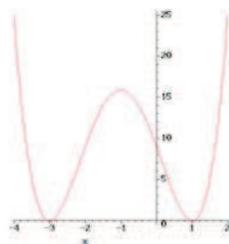
Procedimientos: División de polinomios, evaluación de polinomios, factorización de polinomios, construcción de polinomios y ecuaciones polinomiales, articulación entre la representación gráfica y la algebraica de un polinomio. El método de bisección no se incluye en las tareas diseñadas con el software, por dificultades en su automatización.

Argumentación: No es explícita a través del software, debido a que no resulta práctica su automatización en el sistema.

Significado Institucional Evaluado

El examen implementado a través del Maple T.A. se forma con la mayoría de los reactivos que han sido incluidos en las tareas, por lo tanto, la mayoría de las prácticas que se promueven en las tareas forman parte del significado institucional evaluado. A continuación se muestra el análisis de uno de los reactivos tomado de un examen.

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



- $(x + 3)^2 (x - 1)^2$
- $(x + 3)^2 (x - 1)$
- $-(x + 3)^2 (x - 1)^2$
- $(x + 3)^3 (x - 1)^2$
- $-(x + 3)^3 (x - 1)^2$
- No se

Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones:

- ❖ Seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente.
- ❖ Determinar el grado del polinomio dado.

Prácticas matemáticas

- ❖ Identificación de raíces y sus multiplicidades de un polinomio dado algebraicamente.
- ❖ Identificación de raíces y sus multiplicidades de un polinomio representado gráficamente.
- ❖ Articulación entre la forma gráfica y algebraica de un polinomio.

Elementos básicos del significado

- ❖ Situaciones problemas: seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente y determinar su grado.
- ❖ Lenguaje: verbal, algebraico y gráfico.
- ❖ Conceptos: polinomio, gráfica y grado de un polinomio, raíz, raíces múltiples, factores.
- ❖ Procedimiento: articulación entre la expresión gráfica de un polinomio y su representación algebraica y, suma de las multiplicidades de las raíces del polinomio dado algebraicamente, suma de los exponentes de los factores lineales.
- ❖ Proposiciones: el teorema que ayuda a discriminar entre una raíz de grado par o una impar en la representación gráfica, el teorema que describe la forma de la gráfica de un polinomio de grado par y de uno impar.

Funciones semióticas

FS1: Asociar las intersecciones que se dan entre la gráfica y el eje x , con las raíces del polinomio.

FS2: Asociar la forma de las intersecciones entre la gráfica y el eje x , con la multiplicidad de las raíces.

FS3: Asociar al polinomio representado por la gráfica, el grado que le corresponde.

FS4: Asociar a la expresión $(x + 3)^2(x - 1)^2$ con las raíces -3 y 1 .

FS5: Relacionar los exponentes en la expresión algebraica $(x + 3)^2(x - 1)^2$ con la multiplicidad de sus raíces.

FS6: Asociar el grado del polinomio representado por $(x + 3)^2(x - 1)^2$ con la suma de sus exponentes (Asociar el grado del polinomio representado por $(x + 3)^2(x - 1)^2$ con la suma de las multiplicidades de sus raíces).

FS7: Asociar la gráfica dada con la expresión $(x + 3)^2(x - 1)^2$.

Significados Personales

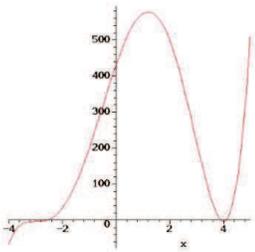
Se realizó el análisis de la actividad reportada por seis estudiantes provenientes de dos grupos distintos (tres de cada grupo). Por cuestiones de espacio, a continuación se muestra el análisis de un reactivo del estudiante Caso I, y se muestra el resumen del significado personal identificado de dicho caso.

Caso I: Reactivo I (unidad de análisis U_1).

1

Your response

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



$(x + 3)^3 (x - 4)^2$ (50%)
El grado del polinomio es 5 (50%)

1) $(x + 3)^3 (x - 4)^2$ Elegí esta respuesta por que en la gráfica se aparece la raíz "-3" con multiplicidad 3 y raíz "4" multiplicidad 2 al final la gráfica es creciente por lo tanto es positiva. El grado es 5 por que al multiplicar los exponentes se suman y el grado máximo e tener en x es 5 ($3+2=5$)

Situaciones:

- ❖ Seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente.
- ❖ Determinar el grado del polinomio dado.

Prácticas matemáticas:

- ❖ Determina las raíces del polinomio representado gráficamente y sus correspondientes multiplicidades.
- ❖ Analiza la forma de la gráfica para escoger una de dos expresiones de signo contrario.
- ❖ Selecciona correctamente la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado por la gráfica dada y justifica dicha selección.
- ❖ Determina correctamente el grado del polinomio y lo justifica.

Objetos matemáticos:

- ❖ Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- ❖ Conceptos: Polinomio, grado de polinomio, raíz de polinomio, multiplicidad de raíz de polinomio y gráfica creciente.
- ❖ Procedimiento: Articulación entre la forma gráfica y algebraica del polinomio, y suma de los exponentes de los factores con el fin de obtener el grado del polinomio.

- ❖ **Argumentación:** Argumenta la elección de la representación algebraica y el grado del polinomio.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia las intersecciones de la gráfica con el eje x con el concepto de raíz de polinomio.

FSE2: Asocia la forma de la intersección de la gráfica con el eje x con el concepto de multiplicidad de raíz de polinomio.

FSE3: Asocia la elección de una de dos expresiones algebraicas de signo contrario con el trazo final de la gráfica dada.

FSE4: Asocia la suma de los exponentes de los factores lineales de la expresión algebraica con el grado del polinomio.

Significado Personal Logrado

Determina las raíces y sus correspondientes multiplicidades del polinomio dado gráficamente. Articula las expresiones gráfica y algebraica de un polinomio, y determina el grado de dicho polinomio considerando su expresión algebraica.

Conflicto semiótico:

Se presenta un conflicto semiótico cuando el estudiante, en su discurso, califica una gráfica como “positiva”, sin aclarar qué objeto debe recibir este calificativo. Este conflicto semiótico no fue detectado por el sistema, ya que el estudiante registró en el sistema respuestas correctas.

Resumen del significado personal:

Del análisis de todos los reactivos del examen correspondiente se puede afirmar lo siguiente: El estudiante es capaz de determinar las raíces y sus correspondientes multiplicidades de polinomios representados de forma gráfica o algebraica, así como articular dichas representaciones. Factoriza expresiones polinomiales cuadráticas, y de mayor grado dada una de sus raíces. Aunque, no tiene éxito cuando se le solicita directamente encontrar las raíces exactas de una ecuación de segundo grado. Conoce las relaciones entre las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$ y las utiliza para determinar las raíces de $-p(x)$ y $p(-x)$, dadas las de $p(x)$. También, conoce y usa las relaciones entre las raíces y los coeficientes de un polinomio dadas por las Fórmulas de Vieta, con la excepción de las establecidas entre los coeficientes y la suma de las raíces de polinomios no mónicos.

Se identifican algunas inconsistencias entre los significados declarados del estudiante, debido a que, determina con éxito las raíces de un polinomio de segundo grado con el fin de determinar las

raíces de un polinomio de grado mayor a dos, pero cuando se le presenta la tarea que consiste únicamente en resolver ecuaciones de segundo grado no lo logra.

Consideraciones finales

De los análisis llevados a cabo se puede afirmar que las prácticas matemáticas que forman el significado institucional evaluado son un subconjunto de las prácticas que forman los significados pretendido e implementado, y éstos a su vez, son un subconjunto de las que forman el significado institucional de referencia. Las diferencias entre estos conjuntos, en este caso, se deben a las dificultades en el proceso de automatización en el sistema Maple T.A. En cuanto a la determinación de los significados personales, se vuelve acertada la decisión de solicitar y analizar la actividad de los estudiantes en las hojas de trabajo. A través de las hojas de trabajo fue posible detectar conflictos semióticos que no fueron detectados en las respuestas registradas en el sistema.

Referencias

- Del Castillo, A. G., Flores, B. E. (2012). Evaluación y Autoevaluación en Línea con Maple T.A.: Un Estudio con Números Complejos. En Ulloa, R. (Ed.), *Colección Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012* (pp. 170-183). México: AMIUTEM, A.C.
- Godino, J., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 14, No. 3. pp. 325-355.
- Godino, J. D. (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284.
- Ibarra, S., Del Castillo, A. (2012). Significados Personales Logrados y Evaluados de Estudiantes de Álgebra en el Ambiente Maple T.A. En Ulloa, R. (Ed.), *Colección Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012* (pp. 161-169). México: AMIUTEM, A.C.
- MapleSoft (2013) Maple T.A. (Software) Disponible en: <http://www.maplesoft.com/products/mapleta/>