# UNA PERSPECTIVA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL PROFESOR CENTRADA EN SU ESPECIALIZACIÓN: EL MODELO MTSK

Dinazar I. Escudero, Eric Flores-Medrano, Nuria Climent, José Carrillo, Luis C. Contreras, Miguel A. Montes, Álvaro Aguilar y Nielka Rojas
Universidad de Huelva España
Universidad de Granada.
climent@uhu.es, carrillo@uhu.es, lcarlos@uhu.es

**Resumen.** Esta comunicación toma como eje de discusión la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas plasmada en modelos analíticos. Fruto de esta reflexión y de la búsqueda de instrumentos teóricos que nos permitieran analizar dicho conocimiento, elaboramos un modelo al que denominamos *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) que considera la especialización en el conocimiento del profesor como característica definitoria. Ayudados de ejemplos, discutiremos cómo visualizamos esta especificidad y presentaremos brevemente el MTSK como un resultado del trabajo teórico y empírico que ha llevado a cabo el Grupo de Investigación de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Huelva, España.
**Palabras clave**: Conocimiento especializado, MKT, MTSK
**Abstract.** This communication takes the mathematics' teacher knowledge specificity embodied in analytical models as argument axis. Result of this reflection and the pursuit of theoretical tools that allow us to analyze such knowledge, we are developing a model that we call *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) considering specialization in teacher knowledge as a defining characteristic. Helped by examples, we discuss how we visualize this specificity and present MTSK briefly as a result of theoretical and empirical work that has been carried out in the Didactic of Mathematics Research Group at the Huelva´s University, Spain.
**Key words**: Specialized Knowledge, MKT, MTSK

## Introducción

Hay una larga tradición de investigaciones que se han preocupado por examinar qué conocimiento necesita el profesor de matemáticas para llevar a cabo su labor, considerando diferentes enfoques y necesidades según las distintas regiones en las que se estudia (e. g. Usiskin, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Sosa, 2011). En esta línea, existe una tendencia a diferenciar distintas componentes en dicho conocimiento (usando, últimamente, los términos dominios y subdominios).

Entendemos que de este modo se proponen marcos analíticos para investigar sobre el conocimiento del profesor (y eventualmente para poder orientar el diseño de programas de formación), más que pretender reflejar una estructura organizativa de su conocimiento, que sabemos es integrado. Nuestra comprensión del contenido del conocimiento del profesor es heredera de la contribución de Shulman (1986), respecto de su llamada de atención sobre la especificidad del conocimiento profesional en relación con la materia a enseñar. Uno de los modelos más destacados en los últimos años que pone énfasis en dicha especificidad, es el propuesto por el grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad de Michigan llamado *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT).

Esta comunicación toma como eje de discusión la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas. Analizamos, apoyados en un ejemplo, cómo entendemos que esta especificidad es considerada en el MKT y mostramos algunas necesidades detectadas con respecto al tratamiento de dicha característica y a problemas de delimitación y definición de los subdominios que identifica.

De los seis subdominios de conocimiento que plantea el MKT en Ball et al. (2008), sus autores subrayan la importancia del *Conocimiento Especializado del Contenido* (SCK, de aquí en adelante, las siglas se corresponden con la traducción al inglés). En Flores, Escudero y Carrillo (2013), se identifican dos tendencias usadas para definirlo: como un conocimiento específico del profesor puramente matemático o como un conocimiento que va *más allá* del *Conocimiento Común del Contenido* (CCK, otro de los subdominios del MKT, atribuible al conocimiento asociado a un adulto bien educado al nivel que se está analizando).

En este mismo trabajo, de una larga lista de ejemplos que se han utilizado para ilustrar al SCK se extrae uno que resulta representativo, sobre el que se realiza un proceso de desempaquetado para identificar el conocimiento puramente matemático asociado al profesor, con la intención de hacer un análisis crítico de la naturaleza de este conocimiento.

La información obtenida del desempaquetado no permite inferir que el conocimiento involucrado sea específico del profesor de matemáticas, ni tampoco que sea diferente del CCK. Es más evidente, desde el punto de vista descrito en los trabajos del MKT, un uso específico del conocimiento que la existencia de un conocimiento especial o específico del profesor. Se hace notar, además, que la delimitación entre SCK y CCK se ve condicionada por las concepciones del investigador que observa el fenómeno.

Se presentan dos problemáticas subyacentes al análisis, una de corte teórico: ¿qué se entiende por especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas?; y otra de corte analítico: ¿cómo distinguir lo especializado de lo común (o de lo ampliado si añadimos el *Conocimiento del Horizonte Matemático*, el otro subdominio matemático en el MKT)?

Fruto de la reflexión sobre lo especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas, y de la búsqueda de instrumentos teóricos que nos permitieran analizar dicho conocimiento, así como apoyados en investigaciones empíricas, elaboramos un modelo al que denominamos *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) que considera la especialización en el conocimiento del profesor como característica definitoria (Escudero, Flores y Carrillo, 2012), el cual se describirá posteriormente.

## Discusión del Conocimiento Especializado en dos Modelos

En esta sección se muestra el análisis, desde dos modelos, de la noción de *conocimiento especializado* atribuible al profesor de matemáticas. Los modelos utilizados son el MKT y el MTSK. Se parte de un ejemplo que se utiliza en Suzuka et al. (2009) para ilustrar aspectos de conocimiento especializado del contenido (SCK) del MKT, y se hace una crítica que va delineando lo que, desde el MTSK, se entenderá por *especializado*.

En Suzuka et al. (2009) proponen un ejemplo en el que está involucrado conocimiento matemático para la enseñanza, en particular, señalan que se evidencia conocimiento especializado del contenido.

Plantean que un profesor debería poder resolver correctamente $\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$. Sin embargo, mencionan, esto es muy alejado de aquello que es suficiente para su labor en el aula. Para ilustrar esta insuficiencia proponen un caso en el que un estudiante realiza el siguiente proceso: $\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{10}{12} \div \frac{4}{12} = 10 \div 4 = 2\frac{1}{2}$, y plantean una serie de cuestionamientos que son parte de las demandas del profesor:

> ¿Es esta una coincidencia, o podría ser un método matemáticamente válido? Si el método funciona, ¿funciona en general o sólo para números específicos? ¿Por qué pueden ser ignorados los denominadores de las fracciones en la división (como en el ejemplo anterior), pero no en la multiplicación, adición o sustracción? Tener la habilidad para preguntarse y responder a estas demandas supera a tener la habilidad de dar la respuesta en sí. Nosotros llamamos a esto conocimiento especializado de matemáticas (Suzuka et al., 2009, p. 9, traducción nuestra).

Si bien no todo el conocimiento que se involucre en responder a esas tareas es puramente matemático, nosotros nos centramos en hacer un análisis detallado de las exigencias matemáticas ya que, de acuerdo con los autores del MKT, la naturaleza del SCK es puramente matemático (Ball et al., 2008). Para hacerlo, partimos de una posible forma de pensamiento que permite llegar a ese resultado, sin que pensemos que esa haya sido la que llevó a cabo el estudiante que realizó esa operación de ese modo. Es decir, procederemos desde el propio conocimiento del contenido.

Un conocimiento en el que el profesor puede apoyarse es saber los distintos significados de la división de fracciones. En particular, dado que no resulta natural repartir $\frac{5}{6}$ de algo entre $\frac{1}{3}$, el significado que es más plausiblemente asignable a esta operación es el cuotitivo (número de veces que cabe $\frac{1}{3}$ en $\frac{5}{6}$).

En registro gráfico, la operación se apoyaría en el esquema de la Figura 1.

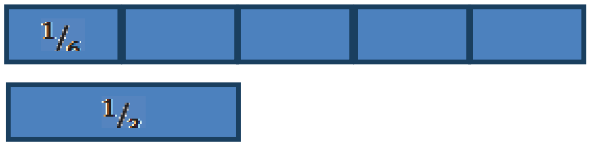



Figura 1. Representación gráfica de los números involucrados en la operación.

El profesor también requiere saber sobre equivalencia de fracciones: que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$. Con lo cual, construye una situación propicia para verificar y dar sustento a que el resultado es $2\frac{1}{2}$. Este razonamiento, si bien está apoyado en aspectos visuales, también puede ser explicado a través de sus fundamentos. Se trata de un cambio de dividir dos números fraccionarios a dividir dos números enteros, ya que, al considerar al $\frac{1}{3}$ como $\frac{2}{6}$ ambos números son de la *misma naturaleza* (naturaleza $\frac{1}{6}$) y la tarea se convierte en dividir *5* elementos entre *2*. Este proceso es equivalente a aquel en el que el común denominador es *12*.

El proceso, además, funcionará con cualquier otro par de fracciones, dado que la división en sí es la misma (al estar considerando parejas de fracciones equivalentes a la pareja inicial, esto es, el mismo par de números racionales). Bastan estos conocimientos para que el profesor pueda verificar que el procedimiento es matemáticamente válido.

Para dar respuesta a otras preguntas, es necesario hacer una abstracción de por qué el procedimiento sirve.

La división, en su significado cuantitivo, tiene la facultad de comparar a dos cantidades. Para poder comparar sólo los numeradores, es necesario que estos tengan las mismas unidades, es decir, la operación $\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$ es transformada en la pregunta: ¿Cuántas veces caben *4* trozos de tamaño $\frac{1}{12}$ en *10* trozos de tamaño $\frac{1}{12}$? Donde la respuesta es dos veces y media. Lo que nos da explicación de que no se están ignorando los denominadores, sino que se les consideran al momento de hacerlos iguales (común denominador) para preparar a los numeradores para ser operados.

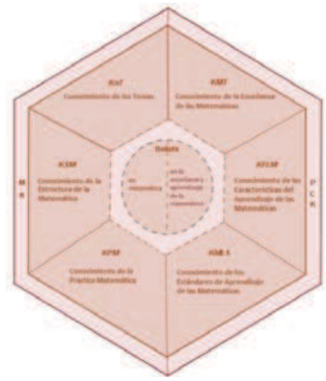
Se requiere matizar el hecho de que para la adición y sustracción no es posible ignorar de la misma forma a los denominadores. En realidad el procedimiento utilizado en la división puede deberse (conjetura de qué llevó a un estudiante a proceder así) a la forma en la que se operan sumas y restas de fracciones con diferente denominador, en la que, una vez convertidas a fracciones con el mismo denominador, solo se aplica la operación a los numeradores. La pregunta que se equivale con esa forma de proceder para $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$ sería ¿Cuánto resulta de sumar $a$ trozos de tamaño $\frac{1}{n}$ con $b$ trozos de tamaño $\frac{1}{n}$? La respuesta es $a+b$ trozos de tamaño $\frac{1}{n}$ (donde $\frac{1}{n}$ forma parte de la interpretación del resultado, no pudiendo obviarse como en el caso de la división).

Una vez identificados los elementos de conocimiento puramente matemáticos, procedemos a analizar cuáles de estos podrían ser considerados como parte del SCK según las definiciones propuestas en el MKT. La difusa delimitación entre lo común y lo especializado no permite garantizar que alguno de los elementos (significado de la división, equivalencia de fracciones, distintos algoritmos para la división de fracciones) sea exclusivo de la labor del profesor o sea algo *más allá* del conocimiento que se espera que tenga un adulto bien instruido al nivel escolar identificable para la realización de divisiones de fracciones.

Por otro lado, en el análisis surge un elemento de interpretación del posible pensamiento del estudiante que requiere de elementos matemáticos, pero que no es un conocimiento matemático en sí. Este conocimiento posee tintes más relativos a un elemento propio del profesor de matemáticas. Es, a su vez, un conocimiento que requiere saber sobre características de aprendizaje del estudiante y de relaciones entre las operaciones de fracciones. Es en esta visión integradora donde se sustenta la perspectiva de conocimiento especializado en nuestro modelo, el MTSK.

El MTSK (ver Figura 2) es un modelo analítico que considera al conocimiento especializado del profesor de matemáticas como un cúmulo que contempla conocimientos de distintas naturalezas. Considera dos dominios de conocimiento provenientes de Shulman (1986, 1987): el dominio de Conocimiento Matemático y el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido. Además, se caracterizan tres subdominios de distinta naturaleza para cada uno de los dominios.

Figura 2. Esquema de los dominios y subdominios que conforman al MTSK. Las concepciones son referidas al profesor de matemáticas, pero, al no ser objeto de discusión en esta comunicación, hemos decidido no ahondar en su caracterización.



En lo que se refiere al dominio de Conocimiento Matemático consideramos tres subdominios: a) *Conocimiento de los Temas Matemáticos* (KoT), esto es, conocimiento de los conceptos, procedimientos, fenomenologías y fundamentación teórica del tema en cuestión (en el ejemplo anterior, significados de la división, de la fracción y de la división y suma de fracciones, algoritmos para realizar estas operaciones con fracciones, o la idea de fracciones equivalentes); b) *Conocimiento de la Estructura de la Matemática* (KSM), sobre el contenido matemático en las conexiones, que supone ver, entre otras cosas, la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

Así como considerar la complejización y simplificación respecto de un tema matemático (en el ejemplo dado, las operaciones con números naturales vistas desde las operaciones con números racionales), y c) *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM), es un conocimiento matemático de tipo sintáctico (según Schwab, 1978), por ejemplo, el papel que tiene el ejemplo y el contraejemplo en la generalización en matemáticas, saber qué es demostrar, qué es definir, entre otros.

En el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido: d) *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT); e) *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas* (KFLM) (como el conocimiento de la generalización habitual de los estudiantes del procedimiento estándar para sumar fracciones de distintos denominadores a otras operaciones con fracciones de distinto denominador) y f*) Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS).

Los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido incorporan aspectos de conocimiento del profesor que pueden ser asociados al conocimiento generado en las investigaciones en Matemática Educativa. Por ejemplo, aspectos relacionados con el conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas (teoría de Situaciones Didácticas para el diseño de actividades), o con teorías de fundamentos del aprendizaje en matemáticas (teoría APOS para entender/propiciar procesos de aprendizaje), o con estándares sobre el nivel de aprendizaje esperado de un tema en cierto momento educativo (los estándares de la NCTM, los niveles de Van Hiele), respectivamente.

## Reflexiones Finales

Esta comunicación se planteó por objetivo contrastar dos visiones acerca de lo que se considera como especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas. Por un lado, en el MKT lo especializado es visto como aquel conocimiento puramente matemático *exclusivo* del profesor de matemáticas. Por otro lado, en el MTSK lo especializado es visto como un cuerpo de conocimientos que *define* al núcleo básico de conocimiento profesional del profesor de matemáticas y que tiene sentido, en su conjunto, sólo para él (que es diferente del cuerpo de conocimientos del profesor de otras asignaturas y del usuario de las matemáticas para otras disciplinas distintas a la docencia).

Planteamos bondades de tipo analítico del MTSK con respecto al MKT debido a la difusa delimitación entre algunos subdominios. En esta comunicación ejemplificamos la difusión entre el CCK y el SCK, sin embargo, en otros trabajos (e. g. Carrillo et al., en prensa) se han abordado los problemas de delimitación entre diversos subdominios. No obstante, reconocemos la profunda aportación del grupo de Educación Matemática de la Universidad de Michigan (específicamente de los autores del MKT) a la comprensión de aspectos relacionados con el conocimiento del profesor de matemáticas y que nos permitieron delinear algunos de los elementos que consideramos en el MTSK.

**Agradecimientos** Los autores son miembros del proyecto de investigación “Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento” (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.

## Referencias bibliográficas

Ball D. L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Escudero, D., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y F.M. Rodríguez (Eds.), *Memorias de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 35-42.

Flores, E., Escudero, D. I., y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2055-3064). Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME.

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N.J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum and liberal education*, 229-272, University of Chicago Press: Chicago.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of a new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Sosa, L. (2011). Conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. Contribución teórica al conocimiento del contenido y estudiantes. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa vol. 25*, 1151-1159.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J. M., y Thames, M.H. (2009). Designing and Using Tasks to Teach Mathematical Knowledge for Teaching. En D.S. Mewborn y H.S. Lee (Eds.), *AMTE Monograph Series Volume 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*, 7-24. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.

Usiskin, Z. (2001). Teachers' Mathematics: a collection of content deserving to be a Field. *The Mathematics Educator*, *6*(1), 86-98.