ESTUDIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

Romina Menares y Elizabeth Montoya
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
menares.romina@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Resumen. El presente escrito forma parte de una investigación que tiene entre sus principales objetivos conocer el trabajo en análisis de profesores, en particular su trabajo en torno a las funciones continuas. En el currículum actual de la secundaria en Chile se evidencia la poca o nula referencia que se hace a las funciones continuas, en materias donde matemáticamente la relación no solo existe, sino que en algunos casos, es lo que le da sentido al contenido. En este trabajo estudiamos particularmente una tarea relacionada con la continuidad, propuesta a estudiantes en la formación inicial y a profesores de en formación continua. Como soporte teórico, nos basamos en la teoría de *Espacio de Trabajo Matemático* de Kuzniak (2011), como una ampliación de la teoría iniciada por Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006) de *Espacio de Trabajo Geométrico*. La investigación forma parte del proyecto Fondecyt 1110988

Palabras clave: profesores, funciones continuas, análisis matemático

Abstract. This paper forms a part of an investigation that has between his principal objectives to know the work in teachers' analysis, especially his work concerning the continuous functions. In the current curriculum of the secondary one in Chile it is demonstrated small or void reference that is done to the continuous performances, in matters where mathematically the relation not only exists, but in some cases, it is what gives him sense to the content. In this work we study particularly a task related to the continuity proposed students in the initial formation and to teachers of constant education. As theoretical support, we base on the theory of Mathematical Working Space of Kuzniak (2011), as an extension of the theory initiated by Houdement and Kuzniak (1996, 1999, 2006) of Geometric Working Space. The investigation forms a part of the project Fondecyt 1110988.

Key words: teachers, continuous functions, analysis mathematics

Introducción

El presente trabajo se centra en la formación inicial de profesores de matemáticas. Cuando hablamos de *profesor*, lo situamos en dos escenarios que nos resultan interesantes de explorar: al profesor en su formación inicial y el profesor en servicio, para este último, nos hemos centrado en el estudio del trabajo del profesor en formación continua. Esto implica, por un lado, sortear diversos obstáculos presentes en su paso por el aprendizaje de distintas materias y, por otro, las distintas decisiones pedagógicas y didácticas a las que se ve enfrentado en su quehacer como profesor. Consideramos que para realizar un estudio profundo de los aprendizajes en la formación inicial de profesores, es necesario mirar lo que más tarde el profesor realiza en el aula.

En Chile, la carrera que forma profesores de matemáticas es impartida por distintas universidades. Actualmente en el país, se realizan esfuerzos por estandarizar la enseñanza en la formación inicial. Con este fin se han producidos textos, llamados *estándares*, y se aplican cada año evaluaciones a profesores recientemente egresados. En nuestro trabajo hemos estudiado las mallas y los programas – en la línea del análisis matemático – de seis universidades de Chile, que constituyen importantes centros de formación del profesorado, y hemos observado que existe una gran similitud en los planes y en los programas de estudio para los primeros años de la carrera; todos ellos pasan por el concepto de continuidad en un primer curso, que digamos, es de cálculo diferencial. Además en este nivel estudian los axiomas para los números reales, el concepto de límite de sucesiones y de derivada, para pasar a un segundo curso, donde se trabaja el cálculo integral y las series.

Con el fin de acercarnos al escenario donde el profesor se desempeña como docente, hemos realizado en primer lugar un estudio al currículo del liceo, donde observamos que aparecen temas relacionados con el análisis pero más bien de manera implícita; conceptos como sucesiones, funciones, o inecuaciones, forman parte de los planes de estudio, pero el trabajo en torno a ellos es generalmente algebraico, escondiendo cualquier sentido analítico en el objeto o en su tratamiento, obviando sus fundamentos para conservar solo los métodos.

Hemos notado que, por ejemplo, se trabaja con sucesiones, pero la noción de límite no constituye en el currículo un objeto de estudio. Se estudian además funciones, muchas de las cuales tienen la propiedad de continuidad (como por ejemplo la función lineal, afín, cuadrática e incluso funciones no definidas en todo **R**), pero esta propiedad aparece de manera implícita; no se cuestiona si una función es continua o no, solo se trazan las gráficas, o se manipulan algebraicamente; en el eje de estadística aparecen gráficos de funciones discontinuas, pero tampoco se cuestiona desde esa propiedad. La continuidad no es un objeto de estudio en el liceo, sin embargo, podemos observar que existen conceptos cuyo tratamiento y métodos de resolución encuentran fundamentos en la propiedad de continuidad, tal es el ejemplo de las inecuaciones, donde los tratamientos no aparecen sustentados en el Teorema del Valor Intermedio, en ocasiones donde es este teorema lo que le da fundamento.

El presente trabajo, sustentado en el enfoque *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM) de Kuzniak (2011), tiene como objetivo estudiar el trabajo del profesor en el dominio del análisis para una tarea específica propuesta en los dos escenarios antes mencionados: en la formación inicial y en la formación continua. Buscamos conocer y caracterizar los aspectos matemáticos, donde el profesor encuentra los fundamentos de su trabajo, y aquellas adaptaciones y organizaciones didácticas presentes en su quehacer como docente. De este modo, su trabajo y como consecuencia –de la transposición didáctica– el trabajo de sus estudiantes, se fortalece en la medida en que el profesor logra fundamentar desde este dominio el trabajo sobre objetos, que se ven robustecidos al ser mirados y estudiados analíticamente.

El Espacio de Trabajo Matemático

El enfoque teórico que sustenta este trabajo es la teoría *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG), desarrollada inicialmente por Houdement y Kuzniak (1996, 2006). Actualmente profundizamos en aspectos no abordados en dicho enfoque y que se enmarcan en lo que Kuzniak (2011) llama *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), como una generalización del ETG a otros dominios de la matemática. En particular, profundizamos en el dominio del análisis (ETM_{An}).

La noción de *Paradigma Geométrico* está inspirada en la noción de paradigma en el sentido de Kuhn (1962). Un *Espacio de Trabajo Matemático,* se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven problemas matemáticos dependiendo del dominio (geométricos, algebraico, etc) (Kuzniak, 2011). Si bien las tareas – en el sentido de Chevallard (1999) – no forman parte del ETM, son las que activan y dan sentido al trabajo en un determinado ambiente desarrollado por un individuo, que puede ser entre otros, un estudiante, un experto matemático o un profesor que organiza la enseñanza.

En el ETM se distinguen dos planos, el epistemológico y cognitivo, y la articulación entre estos mediante un conjunto de génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que favorecen su coordinación. El plano epistemológico del ETM, contempla tres componentes: el *representamen*, los artefactos y el referencial. El plano cognitivo contempla las componentes: visualización, construcción y prueba. Tanto las génesis, como las componentes de los planos, deben ser reinterpretadas dependiendo del dominio matemático específico en cuestión. Una primera génesis, inicialmente llamada *génesis figural,* se introduce en el marco del ETG para describir el proceso semiótico asociado con el pensamiento visual que se produce en geometría. Actualmente hablamos de *génesis semiótica*, ampliando el concepto a otros dominios de la matemática, pensando en el objeto y su representación en el sentido de Duval (2005).

Una segunda génesis, la *génesis instrumental* reposa en *artefactos* cuyo uso no es transparente e inmediato; necesita un cierto número de procesos que pueden ser descritos en el enfoque instrumental (Artigue, 2002). Además de los artefactos materiales o softwares, consideramos los artefactos simbólicos (Rabardel, 1995), que pueden ser una serie da algoritmos utilizados para desarrollar una tarea. En la *génesis discursiva* entra en juego el razonamiento, que articula la componente *referencial teórico* (en el plano epistemológico), con la componente *prueba* (del plano cognitivo). La noción de prueba está inspirada en las tipologías de pruebas de Balacheff (1987) y los aportes de Duval (1995) en lo relativo al razonamiento. Estas tres génesis no son independientes, tampoco deben considerarse como una biyección entre dos componentes determinadas, sino más bien como relaciones que participan en las génesis del ETM global. A continuación se presenta un esquema del ETM (figura 1).

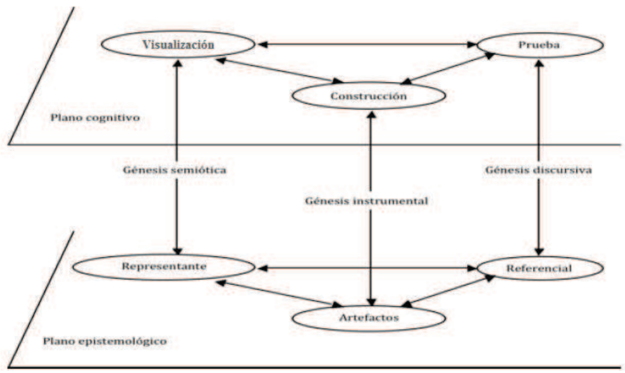

Figura 1. Espacio de Trabajo Matemático y sus Génesis, Kuzniak (2011).

La teoría busca caracterizar, a través de tres tipos, el espacio de trabajo: el ETM *de referencia,* definido de manera ideal en función de criterios matemáticos; el ETM *idóneo*, organizado para permitirle a un alumno comprometerse en la resolución de un problema; y el ETM *personal*, ambiente donde se lleva a cabo el tratamiento del problema por parte de un individuo, que puede ser estudiante o profesor.

En este escrito mostramos parte del estudio al *ETM_{An} idóneo* de un profesor universitario que dicta cursos de cálculo en la formación inicial de profesores. Eventualmente, este *ETM_{An} idóneo* pasa a ser parte del *ETM_{An} de referencia*.

El ETM_{An} Idóneo de un Profesor Universitario

Para nosotros, un objeto central en el dominio del análisis es la noción de continuidad. En el transcurso del desarrollo del análisis, hacia la fundación de la teoría de los números reales, se han tratado constantemente cuestiones acerca del problema del continuo. Bourbaki (1976), señala que mucho antes del nacimiento del cálculo infinitesimal, los griegos admiten como evidente el que una curva, susceptible de ser descrita por un movimiento continuo, no puede pasar de un lado a otro de una recta sin cortarla. Este es uno de los fundamentos del que, mucho más tarde, se conocería como el *Teorema del Valor Intermedio* (TVI).

A continuación, presentaremos una parte del estudio del *ETM_{An} idóneo* de un profesor universitario matemático. El estudio es de carácter cualitativo, sobre lo que el profesor –académico de una universidad chilena– declara ser su trabajo en el aula en la formación inicial de profesores. El académico (PA), tiene más de treinta años de carrera como matemático y profesor en carreras de licenciatura en matemáticas, posgrados en matemáticas, y en la formación de profesores de secundaria. En la Institución (I1), este profesor imparte clases hace más de ocho años, y ha dictado al menos una vez, todos los cursos relacionados con el análisis matemático.

Para llevar a cabo el estudio, se realizan entrevistas grabadas y se usan medios descriptivos mediante transcripciones, estudio de las mallas y de los programas de cursos vinculados al análisis, que el profesor dicta, y se revisan otros antecedentes, como el plan de trabajo del profesor para los cursos.

La institución I1 tiene contemplado en su malla, en la línea del análisis, tres cursos de cálculo y uno de ecuaciones diferenciales. El primero es un curso –llamado *cálculo 1*– que tiene como uno de sus objetivos que los estudiantes reconozcan y apliquen los axiomas de cuerpo ordenado y completo para los números reales, luego pasa por las nociones de convergencia de sucesiones, cálculo de límites y demostración de propiedades. En este mismo curso estudian las funciones continuas y llegan hasta la representación y aplicación del concepto de derivadas.

En un segundo curso de cálculo, se trabajan teoremas relacionados con la derivada, como el *teorema del valor medio*, también se estudian integrales y convergencia de series. El tercero es un curso de cálculo en varias variables, donde se estudia el cálculo diferencial en R^n, pasando por un estudio más topológico: bolas abiertas, conjuntos abiertos, límites y continuidad; estudian también integrales de línea, integrales múltiples e integrales de superficie.

Las funciones continuas es un objeto de estudio en el primer curso de cálculo, donde se entregan una o más definiciones y se trabajan teoremas relacionados con la continuidad, tal es el caso del *teorema del valor intermedio*. En I1 las funciones continuas aparecen explícita o implícitamente a lo largo de todo el currículo. Según PA, los tres cursos de cálculo son muy importantes de trabajar pues en los tres se tratan funciones, concepto que los profesores egresados deberán trabajar más tarde en su ejercicio como docente.

Además se estudian áreas y volúmenes, que tienen que ver con los temas de enseñanza secundaria. La entrevista consta de tres preguntas fundamentales, de las cuáles nos centraremos solo en una de ellas: la que apunta directamente al trabajo con el Teorema del Valor Intermedio (TVI). La pregunta tiene como objetivo conocer cómo es el trabajo en torno a este teorema; cuáles son las definiciones que se entregan, si se realiza demostraciones y cuáles son, cuáles son los problemas que se proponen relacionados con el TVI.

Lo que se muestra a continuación es un análisis de resultados de la entrevista, bajo la teoría del ETM. Por sus características de descripción del trabajo en clases que realiza PA, hacemos corresponder este estudio al ETM *idóneo* de PA en la institución I1.

Cuando se le pregunta al profesor cómo introduce el TVI, él señala que comienza graficando los puntos que cumplen ciertas condiciones y luego pide a sus estudiantes que digan cómo puede ser la gráfica. El profesor declara realizar luego la demostración completa, para ello utiliza el Axioma del Supremo.

Al analizar esta primera parte de la entrevista, podemos decir que el profesor parte activando la *génesis semiótica*, destacándose la componente *visualización*. Luego, el trabajo matemático cambia, resaltando el componente referencial teórico, y es lo que provoca además el trabajo deductivo, poniendo énfasis en la *génesis discursiva*. Cabe destacar que fue el profesor quien cambia de manera intencionada y abrupta el trabajo matemático, pasando de una *génesis semiótica* a una *génesis discursiva*. Si bien, hay un cambio de registro, no es esta conversión la que moviliza las génesis.

Analizaremos ahora una de las actividades que el profesor propone a sus estudiantes y que nos parece atractiva, pues no es posible de resolver solo con manipulaciones algebraicas: *«Demostrar que la ecuación* $sen(x) = 1 - x$, *tiene solución* $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *»*. El profesor comienza graficando ambas curvas intentando dar una aproximación gráfica al problema. Hasta acá solo se ha representado la situación y hay un acercamiento a la *génesis semiótica*, como se muestra en la figura 2:

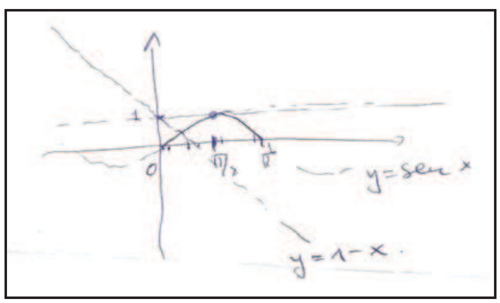

Figura 2. Gráfica del desarrollo de una tarea propuesta por el profesor universitario.

Luego, el profesor toma una función auxiliar: $F(x) = sen(x) - 1 + x$, y utiliza el TVI para concluir que existe $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $F(x_0) = 0$, y que por lo tanto, se obtiene lo deseado.

La función auxiliar aparece en el trabajo matemático como parte del *referencial teórico*. Esta componente aparece más reforzada en la medida en que se decida tomar la función auxiliar para que la tesis del TVI aparezca, como un mediador que activa la presencia de la *génesis discursiva*, hacia un razonamiento y la componente *prueba*. Cabe señalar que antes de plantear la actividad a sus estudiantes, el profesor resuelve, a modo de ejemplo, otro problema donde toma una función auxiliar. Esto podría llevar a que el problema planteado se resuelva más bien como una técnica en lugar de ser motivados por la gráfica o por la activación de la *génesis discursiva*.

El profesor declara que « los estudiantes toman esta función auxiliar luego de tener experiencia en desarrollar este tipo de problemas ». Lo que concluimos de este ejemplo es que se está privilegiando una técnica de resolución; si bien es cierto, se activa el TVI dentro de la componente *referencial teórico*, no se potencia el trabajo discursivo o semiótico, que será preponderante en el tipo de trabajo que el profesor en formación realice más tarde como docente en el liceo, para nociones que necesitan enriquecerse con un trabajo analítico.

El ETM$_{An}$ Personal de un Profesor de Secundaria

A continuación presentamos el análisis de un cuestionario realizado a profesores de secundaria, que cursan educación continua. El cuestionario se basa en una pregunta en torno al TVI. Se les pide resolver, entre otros problemas, el estudiado en el *ETM$_{An}$ idóneo* del profesor universitario, descrito en el apartado anterior: *«Demostrar que la ecuación* $sen(x) = 1 - x$*, tiene solución* $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *»*. Se aplicó el cuestionario a un total de veinte profesores, y solo uno de ellos resuelve el problema utilizando la función auxiliar $F(x) = sen(x) - 1 + x$. El resto de los profesores busca resolver el problema de manera gráfica, como el ejemplo de una de las producciones, que se muestra en la figura 3:

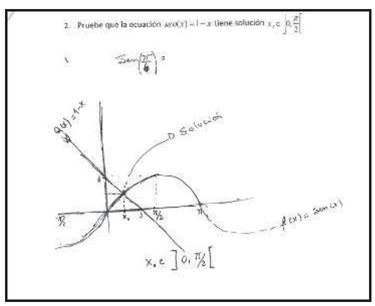

Figura 3: desarrollo de una tarea propuesta a un profesor de formación continua.

Para este trabajo, podemos decir, que está completamente potenciada la *génesis semiótica*, destacándose la componente *visualización*. La génesis discursiva aparece solo de manera implícita, por lo que decimos que las componentes referencial teórico y prueba, aparecen debilitados en este espacio de trabajo; lo que se concluye es a través de lo que se observa en la gráfica.

Además, podemos decir que el *ETM$_{An}$ idóneo* de PA, está muy alejado del *ETM$_{An}$ personal* del profesor de secundaria, pues este último, salvo un caso, no utiliza como *artefacto* la función auxiliar, y no potencia el trabajo en la *génesis discursiva*.

Conclusiones y Proyecciones

El principal objetivo de este escrito era mostrar evidencias del trabajo matemático idóneo en la formación inicial, y el trabajo matemático personal de profesores en educación continua, cuando los contenidos involucrados están en el dominio del análisis, particularmente, están basados en las funciones continuas. Identificamos cómo coordinan las génesis del ETM un formador de futuros profesores y un profesor de secundaria en formación continua, en su propio trabajo matemático. En el caso del profesor universitario, observamos que si bien es cierto, existe una activación principalmente de dos génesis (*semiótica y discursiva*), estas se muestran desconectadas o poco coordinadas. No es natural en su trabajo el paso de una génesis a otra, sino más bien, aparece como un ejercicio forzado. El profesor privilegia la génesis discursiva en su ETM *idóneo*, haciendo presente de manera explícita el TVI, como elemento del componente referencial teórico. Esto puede deberse en gran medida en que el profesor desconoce cómo realizar transposiciones didácticas adecuadas, que fortalezcan el trabajo en el análisis de sus estudiantes, generando elementos que aparecen en el trabajo como técnicas de resolución.

En el ETM personal de profesores en educación continua, evidenciamos precisamente una situación inversa a la anterior; los profesores privilegian la *génesis semiótica*, dejando debilitada la *génesis discursiva*. El TVI no aparece en su trabajo matemático, pues no es permitido por el tipo de trabajo generado, centrado en lo semiótico y no en lo discursivo.

A modo de proyección, trabajamos para proponer los paradigmas involucrados en el dominio del análisis, y así aportar a la especificación del marco del ETM en este dominio en particular, lo cual nos permitirá contribuir principalmente en la formación de profesores y en la forma de organizar la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3), 245-274.*

Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, *18* (2), 147-176.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas.* Editorial Alianza Universidad. Traducción de Hernández. Madrid, España.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique dudidactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, Recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10,* 5-53. IREM de Strasbourg.

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. *11*, 175-193. IREM de Strasbourg.

Houdement C., Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*. *51,* 5-21. IREM de Grenoble.

Houdement, C. Kuzniak A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématique*, *16*(3), 289-321.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 9-24.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Éd. Armand Colin.