UM MODELO PARA ANÁLISE DO PROCESSO DE GENERALIZAÇÃO

Maria Lucia Panossian y Manoel Oriosvaldo de Moura
Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo Brasil
malupanossian@hotmail.com; modmoura@usp.br

Resumen. Este artigo tem como foco o processo de generalização no ensino de álgebra. Tal processo é citado por professores e revelado em propostas curriculares oficiais, abrangendo diferentes conceituações. Entende-se que a organização do ensino de álgebra deve abranger a generalização como processo matemático (em que se generalizam relações, propriedades, conceitos, etc.) e/ou como forma de pensamento e produto do ensino (no sentido em que é necessário ensinar o estudante a 'generalizar'). Desta forma se destaca a necessidade de analisar e detalhar este processo em situações de ensino. Para tanto, este artigo apresenta um modelo de análise do processo de generalização com quatro componentes: conteúdo, elemento mediador; formas de expressão e significado; critérios de validade, às quais foram atribuídos quatro níveis de generalidade. Destaca-se por meio da análise de uma situação enunciada de ensino o potencial do modelo para estabelecer discussões sobre os processos de generalização e sobre a organização do ensino de álgebra.

Palabras clave: generalização; modelos de análise; situações de ensino

Abstract. The focus of this article is the process of generalization in algebra teaching. This process quoted by teachers and revealed in syllabus proposals, embracing different conceptualizations. It understood that the organization of the algebra teaching has to embrace the generalization as a mathematical process (in which one generalizes relations, attributes, concepts, etc.) and/or as a way of thinking and a product of teaching (in the sense that it is necessary to teach students to 'generalize'). In the way it is highlighted the need of analyzing and detailing this process in teaching situations. For this, the paper presents a model of analysis of the generalization process composed by four components: content, mediating element; forms of expression and meaning; validity criterion, which were assigned four levels of generalization. It is highlighted through the analysis of an enunciated teaching's situation; the model's potential for establishing discussions about the processes of generalization and about the organization of the teaching of algebra.

Key words: generalization; analysis model; teaching situations

Introdução

Em 2011, foi realizado um curso de atualização com professores da rede pública do Estado de São Paulo intitulado 'Atividades de ensino de álgebra a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural'. Este curso pretendia discutir com os professores, princípios para a organização do ensino da álgebra na Educação Básica, analisando as situações de ensino da proposta curricular (São Paulo, 2008), que vigora em toda a rede estadual atualmente.

Durante este curso, o processo de generalização foi citado pelos professores de forma recorrente como um elemento importante para o ensino de álgebra. Entretanto, não há clareza entre os professores em relação ao que realmente se constitui como processo de generalização ou como ele pode ser ensinado.

Destaca-se a possibilidade de generalizar propriedades, relações etc. por meio do conhecimento algébrico, mas também se considera a possibilidade de ensinar a 'generalizar' de forma desvinculada dos objetos matemáticos como retratado na fala de uma professora: "[…] o que a gente estava questionando é será que não seria o caso de ensinar ele primeiro a generalizar? Ter uma aula só para aprender a generalizar [...] a gente chegou a esta conclusão será que não precisa de uma aula disso".

A análise sobre a proposta curricular que serve de orientação aos professores da rede estadual de ensino também revela a generalização como um *processo,* a ser desenvolvido sobre objetos matemáticos, ou seja, generalizam-se propriedades, generalizam-se fórmulas, generalizam-se relações, generalizam-se regularidades como se destaca no trecho a seguir:

> Um dos objetivos centrais do processo de ensino e aprendizagem da Álgebra é generalizar regularidades. O uso de letras para representar, por exemplo, o padrão de uma determinada sequência numérica é um dos recursos que a álgebra nos permite. Nesse caso, a generalização de uma sequencia numérica com o uso de expressões algébricas pode ser útil para determinar números específicos da sequência sem recorrer a processos aritméticos (São Paulo, 2009a, p. 11).

Mas também se destaca a generalização como uma capacidade cognitiva a ser desenvolvida no estudante e desta forma como um *produto* do ensino. Entende-se que é necessário estabelecer esta relação entre a generalização como uma forma de pensamento do aluno a ser desenvolvida e/ou como um processo realizado sobre objetos matemáticos. A capacidade cognitiva do estudante em generalizar se desenvolve quando ele realiza os processos de generalização. E ao mesmo tempo, os processos de generalização se desenvolvem na medida em que o estudante possui condições cognitivas para realizar este processo.

Em suas pesquisas, Radford (1996, 2001) indica que o processo de generalização não é um conteúdo específico da matemática e que existem exemplos em que a conclusão da generalização é absurda, preocupando-se com o que pode constituir uma 'boa' ou 'má' generalização. Neste sentido pretende retomar o papel epistêmico da generalização no conhecimento matemático, e em particular no conhecimento algébrico. Destaca ainda que há muitos tipos de generalizações e que de um ponto de vista didático, a generalização depende dos objetos matemáticos que estão sendo generalizados, sendo sua base lógica a de justificar sua conclusão, e neste sentido um processo de prova, que se move entre conhecimentos empíricos e abstratos.

Assim, Radford (2010) se refere a níveis de generalização do pensamento matemático, caracterizados pelo desenvolvimento epistemológico dos conceitos matemáticos e seus sistemas semióticos de representação.

> Levamos em consideração o fato de que o pensamento matemático pode ocorrer em vários níveis de generalidade. A isso, adicione a premissa epistemológica que a dificuldade conceitual da tarefa matemática e dos sistemas semióticos que medeiam o pensamento matemático que é assim provocado caracteriza estes níveis de generalidade (Radford, 2010, p. 115).

É fato que ainda não se distinguem claramente os diferentes níveis do processo de generalização considerados para aprendizagem da álgebra em diferentes faixas etárias. Desta forma se justifica a necessidade de constituir um 'modelo' para análise destes níveis de generalização, particularmente as algébricas, nas situações de ensino enunciadas em propostas curriculares e livros didáticos, bem como presentes no discurso e ações dos professores. Metodologicamente, este modelo foi constituído a partir das análises sobre as situações de ensino da proposta curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2008), a partir da categoria 'generalização' fundamentada teoricamente principalmente em Davýdov (1982) e Radford (1996, 2001).

O Modelo de Análise do Processo de Generalização em Situações de Ensino

Ao estabelecer componentes para o processo de generalização, o modelo proposto neste texto, permite analisar os níveis de generalização envolvidos em diferentes situações de ensino. A constituição deste modelo envolveu estudos teóricos sobre a generalização enquanto processo psíquico e matemático e foi elaborada durante um estágio de pesquisa com o professor Joaquin Gimenez, em 2012, na Universidade de Barcelona.

A constituição deste modelo se pauta em pressupostos da teoria histórico-cultural (Vygotsky, 2001; Leontiev, 1983) e assume que o estudo do processo de generalização matemática na experiência histórica humana oferece elementos para compreendê-lo enquanto movimento lógico de pensamento. Considera também os estudos e pesquisas de Davydov (1982) sobre os processos de generalização empírica (obtida por meio da abstração do que é comum a casos particulares) e teórica (que extrai o que é geral e constitui a essência dos conceitos).

O modelo foi estruturado tendo como referência inicial o modelo de análise do enfoque ontosemiótico (Godino, 2002, Font, 2007) que estabelece dualidades (Pessoal/Institucional; Exemplar/tipo; Ostensivo/Não Ostensivo; Elementar/Sistêmica; Expressão/Conteúdo) para analisar as práticas matemáticas, sua representação e desenvolvimento.

Assim, como no modelo do enfoque ontosemiótico, pretende-se que o modelo aqui apresentado contemple dimensões epistemológicas e psicológicas do processo de generalização. Para estabelecer as componentes deste processo e os níveis de generalidade foram considerados os pares dialéticos: geral/particular; concreto/abstrato; análise e síntese; material/ideal.

Este modelo de análise da generalização é constituído por quatro componentes: o CONTEÚDO, *o que* está sendo generalizado, varia de características físicas de objetos a relações conceituais; o ELEMENTO MEDIADOR, *como* a generalização está se processando, varia do uso de um elemento particular desconhecido até um elemento que contempla a variação; a FORMA DE EXPRESSÃO e SIGNIFICADO, como a generalização se *expressa* e se identifica com seu conteúdo, varia desde o uso da linguagem natural, até expressões simbólicas que contém como significado a relação entre conceitos; e o CRITÉRIO DE VALIDADE, como se prova o processo de generalização, varia desde casos particulares ao controle de provas conceituais. Para cada uma destas componentes foram definidos quatro níveis, visualmente representados como circunferências concêntricas conforme a figura:

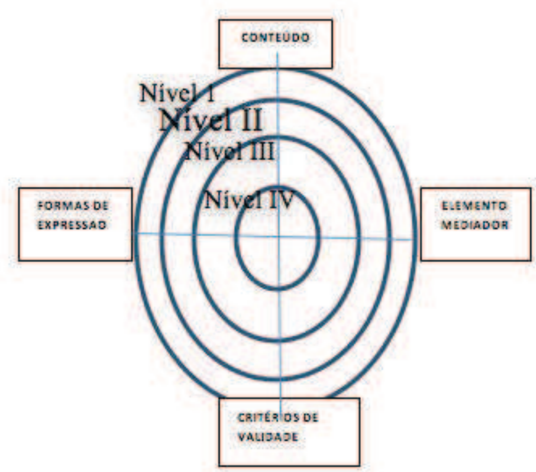

Figura 1. Modelo de análise da generalização em situações de ensino.

O primeiro nível, representado pela circunferência maior e com contorno mais externo, representa o nível I onde a generalização se atém ao que é sensível, palpável, objetos físicos e fenômenos aparentes. No nível II considera-se a generalização pelo estabelecimento de algumas relações entre os objetos e os fenômenos, que não são necessariamente as essenciais, no nível III identificam-se as relações essenciais e a generalização se processa sobre regras estabelecidas sobre estas relações, e no nível IV a generalização envolve as estruturas matemáticas complexas.

Optou-se no modelo por definir o nível I como sendo o mais externo, por ser também o mais disperso, e o nível IV representado pela esfera mais interna por concentrar nas estruturas matemáticas a essência do processo de generalização. Entende-se que os níveis I e II são caracterizados por concentrarem formas empíricas de pensamento, enquanto as formas teóricas se concentram nos níveis III e IV.

De forma sintética, os níveis de generalização se distribuem pelas componentes da seguinte forma:

	Conteúdo	Elemento Mediador	Expressão e Significado	Critérios de Validade
Nível I Experiência sensível	Percepção direta dos objetos concretos (empírico). Ex.: tamanho, cor, forma, quantidade, etc.	O elemento particular desconhecido. Ex.: a incógnita	Identificação direta signo-objeto. Ex.: associar a letra 'm' como 'uma maça'.	Valida através de casos particulares. Recorre a um exemplo para justificar a generalização.
Nível II Primeiras relações entre objetos e fenômenos	Abstrações iniciais e relações simples entre os objetos, atribuição de alguns significados. Ex.: correspondência entre a quantidade de dois conjuntos.	O elemento particular que representa o geral. Ex.: Identificar uma quantidade maior para expressar o movimento geral	Identificação operacional Signo/abstrações iniciais. Ex.: Historicamente, o uso da palavra 'aha' para expressar quantidades desconhecidas.	Valida através de premissas e argumentos. Ex.: o uso de tabelas com vários casos particulares
Nível III Regras estabelecida s sobre as relações	Objetivação de significados em conceitos. Relações estabelecidas. E: fórmulas de área ou perímetro.	O elemento genérico (permite as relações particular/geral/ particular).	Identificação conceitual Signo-conceito. Ex.: a palavra ou o símbolo que representa o conceito de perímetro	Valida através de provas conceituais. Ex.: demonstrações de teoremas, usando conceitos e propriedades.
Nível IV Estruturas matemáticas complexas	Relações estabelecidas sobre os conceitos. Em busca de um concreto que é síntese de múltiplas relações. Ex.: funções, área definida em função da dimensão do lado.	O elemento variável. Independe de que as grandezas sejam numéricas, geométricas, matriciais, vetoriais etc.	Identificação sistêmica Signo-sistema de conceitos. Ex.: Símbolos associados à composição de funções	Valida e controla as provas conceituais. Ex.: O próprio método algébrico, a possibilidade de axiomatizações.

O movimento de análise é representado por quadriláteros criados dentro das circunferências. Os lados do quadrilátero são segmentos de retas que ligam o nível de determinada componente ao nível de outra componente como será exemplificado no próximo item.

A Análise de uma Situação de Ensino Usando o Modelo

Para exemplificar, será realizada a análise usando o modelo sobre uma situação da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2009b), cujo enunciado é o seguinte: Cada figura da sequência de bolinhas a seguir está indicada por um número. Qual seria a fórmula para determinar o número de bolinhas da figura genérica 'n' dessa sequência?

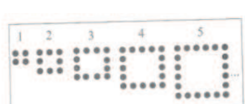

Figura 2

Pela análise do enunciado da situação, identificou-se que é esperado que o estudante relacione o número de pontos com a posição de cada figura e desta forma estabeleça uma relação simples entre os objetos (Conteúdo- Nível II). Espera-se ainda que a generalização seja realizada através de uma figura genérica, que estabelece o movimento entre os casos particulares e um caso geral (El. Mediador - nível III).

O símbolo ‘n’ representa a relação e expressa uma abstração relacionada a quantidade de pontos de cada figura mas não um conceito (Expressão e Significado- nível II). Não se identificam no enunciado elementos para validação da generalização (Validade - nível I). O quadrilátero formado está representado na figura 3 pela linha sólida.

Este modelo também foi usado para analisar a interação de uma professora com os estudantes. A professora relata dificuldades em fazer com que os estudantes estabeleçam a relação entre a posição da figura e a quantidade de pontos (lei de posição). A relação acontece pela contagem dos pontos (“*todo mundo contou as bolinhas, colocaram o valor e eles perceberam que crescia de 4 em 4”)* caracterizado como uma lei de recorrência, presa a contagem dos objetos (Conteúdo – Nível I). A professora recorre a diferentes particulares para alcançar o geral: *“eu precisei fazer mais o que, fazer mais o 6, como seria o 6, o 7, o 8….32…o que vocês estão fazendo, ah multiplicando por 4…”*(El. Mediador – Nível II). *A* professora usa a letra ‘n’ para expressar a relação (Expressão e significado - nível II) e se atém a comprovar através de casos particulares (Validade - Nível I). O quadrilátero formado está representado na figura 4 pela linha pontilhada.

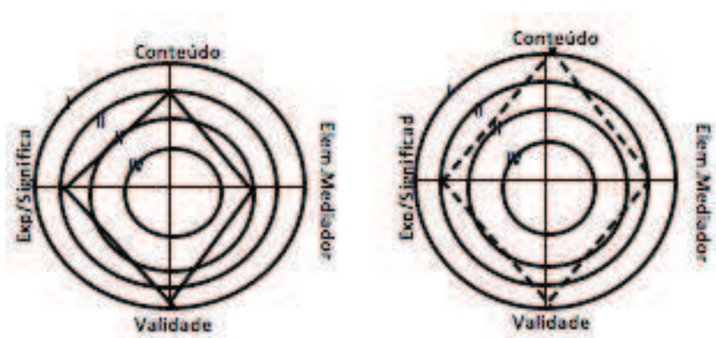

Figura 1: Análise da fala de uma professora

Figura 2: Análise do enunciado de uma situação

Uma comparação das análises realizadas pelo modelo permite que se identifique a ‘distância mediadora de aprendizagem’, entre o que se pretende pelo enunciado da situação e o que é possível alcançar na interação do professor com os estudantes.

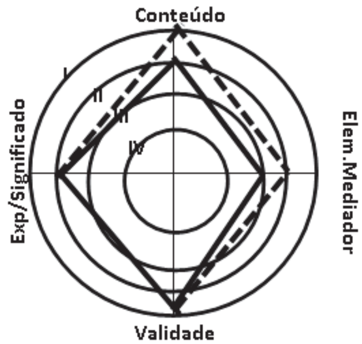

Figura 2. Representação no modelo da 'distância mediadora de aprendizagem'.

Considerações Finais

A partir dos estudos sobre os processos de generalização de Davydov (1982) e Radford (1996,2001) e com base nos fundamentos da teoria histórico-cultural (Vigotski,2001; Leontiev,1983), analisou-se a compreensão sobre generalização matemática nas situações de ensino apresentadas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo. A dificuldade em reconhecer os níveis de generalização em diferentes situações de ensino gerou a necessidade de constituição de um modelo de análise da generalização que foi aqui sucintamente apresentado.

Este modelo, que deve ser considerado como constantemente em construção, pretende realizar a análise sobre o processo de generalização algébrica em situações enunciadas de ensino para a faixa etária de 9 a 18 anos e também por meio da interação entre professores e estudantes. Estabelece níveis de generalização algébrica que poderiam ser esperados e alcançados ao longo do processo de ensino nesta faixa etária, mas não pretende indica-los como únicos, não se caracterizando desta forma como uma epistemologia do processo de generalização matemática.

Ainda assim, busca imprimir movimento entre as componentes definidas (conteúdo, formas de expressão e significado; elemento mediador; critérios de validade) e também entre os quatro níveis atribuídos a cada componente. Neste sentido estes níveis não devem ser compreendidos como etapas a serem superadas, mas como diferentes momentos do processo de generalização que podem ser encontrados em diferentes situações de ensino.

Potencialmente espera-se que sobre este modelo de análise da generalização matemática sejam acrescentadas componentes, alterando a mobilidade entre seus níveis, especificando cada vez mais o processo de generalização, permitindo aos professores conscientização de suas próprias ações, e clareza de objetivos em relação à aprendizagem dos estudantes.

Agradecimentos Esta pesquisa contou com auxílio da *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* (Fapesp).

Referências bibliográficas

Davýdov, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la ensenanza*. Havana: Pueblo y Educacion.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación matemática*, *19*(2). 95-128.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*, 237-284.

Leontiev, A. N. (1983). *Actividad, conciencia, personalidad*. Havana: Pueblo y Educación.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In Bednarz, N.; Kyeran, C.; Lee, L. *Approaches to Algebra*: Perspectives for research and teaching (pp. 107-111). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2001). Factual, contextual and symbolic generalizations in algebra. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 81-88.

Radford, L. (2010). The Anthropological turn in mathematics education and its implication on the meaning of mathematical activity and classroom practice. *Acta Didactica Universitatis Comenianae.Mathematics*, *10*, 103-120.

São Paulo (2008). Secretaria Estadual de Educação. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*: Matemática. São Paulo: SEE.

São Paulo (2009a). Secretaria Estadual de Educação. *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental – 6ª. Série*, v.4. São Paulo: SEE.

São Paulo. (2009b). Secretaria Estadual de Educação. *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental – 7ª. Série*, v. 2. São Paulo: SEE.

Vigotski, L. S. (2001). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.