

DERIVADA Y APLICACIONES: LA TECNOLOGÍA EN EL AULA

María Elena Schivo, Natalia Sgreccia y Marta Caligaris

Universidad Tecnológica Nacional

Argentina

Universidad Nacional de Rosario

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

meschivo@arnet.com.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar, mcaligaris@frsn.utn.edu.ar

Resumen. Este trabajo forma parte de una tesis de Maestría en Docencia Universitaria en la que se ha propuesto realizar un estudio de caso inscripto en la enseñanza y el aprendizaje de Análisis Matemático I en dos especialidades de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás dependiente de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina: Ingeniería Electrónica e Ingeniería Mecánica. Se analiza si incide favorablemente en el aprendizaje de dicha asignatura la incorporación de la tecnología para una adecuada visualización de los contenidos involucrados. Para ello se han confeccionado 24 pantallas interactivas con el software GeoGebra para ser utilizadas en las clases teóricas correspondientes a la unidad didáctica de "Derivada y aplicaciones". Se investiga, además, si dicha incorporación modifica en los alumnos ciertas actitudes con respecto a la materia. En este reporte se presentan las conclusiones a las que se ha arribado con respecto a la visualización

Palabras clave: Derivada – Visualización – Tecnología – GeoGebra

Abstract. This work is part of a Master's thesis in University Teaching in which a case study in the teaching and learning in a first course of Calculus is proposed. Students of Mechanical and Electronic Engineering at Facultad Regional San Nicolás from the Universidad Tecnológica Nacional of Argentina were involved in the study. The impact on learning of this subject with the incorporation of technology, for a proper visualization of the involved contents, is analyzed. For this purpose 24 interactive interfaces were design with GeoGebra, to be used in lectures relating to the unit "Derivative and applications". Possible changes in students' attitudes, regarding the subject, are also investigated. This report presents the conclusions regarding visualization that have been reached

Key words: Derivative - Visualization - Technology - GeoGebra

Introducción

Este trabajo forma parte de una tesis de Maestría en Docencia Universitaria en la que se ha propuesto realizar un estudio de caso inscripto en la enseñanza y el aprendizaje de Análisis Matemático I en dos especialidades de Ingeniería de la Facultad Regional San Nicolás. Se analiza si incide favorablemente en el aprendizaje de dicha asignatura la incorporación de la tecnología para una adecuada visualización de los contenidos involucrados. Se investiga, además, si dicha incorporación modifica en los alumnos ciertas actitudes con respecto a la materia.

Se ha elegido Análisis Matemático I, asignatura en la que se enseña el Cálculo de una variable, como espacio curricular objeto de la investigación porque, desde la práctica docente, se puede observar que a los alumnos que la cursan les resulta diferente a las matemáticas estudiadas hasta el momento, porque es dinámico: estudia el cambio y el movimiento; trata cantidades que se aproximan a otras cantidades. Esto hace que su enseñanza y su aprendizaje se dificulten si sólo se utilizan imágenes estáticas por mejores que éstas sean. Sin embargo, en las prácticas educativas de

esta asignatura pareciera notarse una discrepancia importante entre el potencial que tiene la tecnología informática para contribuir en el aprendizaje significativo, en la generación de actitudes positivas de los estudiantes y en la facilitación de aprendizajes activos, y la utilización que se hace de dicho recurso en las clases habituales.

Por el motivo antes expuesto, en esta tesis se propone una revisión de procedimientos de enseñanza utilizando recursos didácticos diferentes a los tradicionalmente vigentes. Específicamente, se trata de la realización de una experiencia en la segunda unidad didáctica de la materia correspondiente a “Derivada y aplicaciones”. En el curso de Ingeniería Electrónica (grupo testigo) sus contenidos son desarrollados utilizando material didáctico interactivo de diseño propio, confeccionado con el software libre GeoGebra, disponible en español. En la especialidad Mecánica (grupo de control) se desarrollan estos contenidos en forma tradicional (sin uso de software).

En este trabajo se presentan parte de las conclusiones a las que se ha arribado.

Marco teórico

La concepción que orienta esta tesis con respecto a los procesos de enseñanza y de aprendizaje en general se apoya en la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel (1976, 2002), que entiende al aprendizaje como el proceso que se genera en la mente humana cuando subsume nuevas informaciones de manera no arbitraria y sustantiva. Requiere como condiciones la predisposición del alumno para aprender y que el material que se le presente sea potencialmente significativo. Esto implica significatividad lógica de dicho material y la presencia de ideas de anclaje en la estructura cognitiva del que aprende.

Según Duval (1999), el aprendizaje de la Matemática constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas. Su particularidad reside en que estas actividades requieren de sistemas de expresión y de representación, distintos a los del lenguaje natural, como el lenguaje simbólico y el gráfico. Sostiene que es esencial la utilización de estas formas de representación, que denomina sistemas de representación semiótica. Según el autor, para la comprensión de conceptos matemáticos no basta trabajar las actividades dentro de un solo registro, sino que se deben realizar también las tareas de conversión de uno a otro, pues éstas son las que propician la construcción de los conceptos matemáticos.

Con respecto al registro gráfico, trabajos como el de Zimmermann y Cunningham (1991), por ejemplo, llamaron la atención de la comunidad matemática sobre aspectos diversos de la utilización de diagramas visuales. Estos autores definen a la visualización en Matemática como el proceso

de formar imágenes mentales -con lápiz y papel, o con la ayuda de la tecnología- y usar esas imágenes efectivamente para el descubrimiento y entendimiento matemático.

Cantoral y Montiel (2003) definen a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende.

Según Hitt (2003), uno de los problemas para el entendimiento de los conceptos del Cálculo es la falta de un acercamiento visual. En este sentido, Eisenberg y Dreyfus (1990, c.p. Hitt, 2003) manifiestan que, por lo general, se utilizan representaciones no visuales para comunicar ideas matemáticas. “Esta tendencia se fundamenta en la creencia de matemáticos, maestros y estudiantes que las matemáticas no son visuales” (p. 30).

Zimmermann (1990, c.p. Hitt, 2003) sostiene que conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del Cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema.

Para Artigue (2003), las tecnologías informáticas, si se usan apropiadamente, juegan un papel crucial en la promoción de conexiones flexibles entre representaciones semióticas y ayudan a las representaciones gráficas a convertirse en herramientas efectivas del trabajo matemático. La investigación también muestra que el uso efectivo de las tecnologías informáticas en la Universidad requiere del desarrollo de un conocimiento matemático específico, que no es un requisito fácilmente aceptado por la institución educativa, cuyos valores han sido tradicionalmente definidos con respecto a entornos de lápiz y papel.

En la actualidad se dispone de un instrumento extraordinariamente potente, la computadora, cuya influencia sobre el quehacer matemático se va haciendo sentir en muchos aspectos y uno de ellos es la visualización.

Dávila Araiza (2010), quien realiza una propuesta metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de problemas de optimización en un curso de Ingeniería expone las ventajas de trabajar con el software libre GeoGebra. En la unidad didáctica en la que se realiza la experiencia abundan las definiciones y teoremas que requieren de una representación dinámica para lograr una adecuada visualización. Por este motivo, para llevar adelante el trabajo de campo, se confeccionan pantallas dinámicas para enseñar los objetos que intervienen. Se pretende analizar si, con su presentación en el grupo testigo -usando como recurso didáctico la computadora, un cañón proyector y el software GeoGebra-, se pueden apreciar diferencias con respecto al grupo de control, tanto en ciertas actitudes como en el desempeño y la visualización de los conceptos por parte de los

estudiantes.

Metodología

Con respecto a la metodología, esta investigación se lleva adelante con un enfoque mixto, combinando, sin predominio de ninguno, de los dos tipos: cuantitativo y cualitativo. Es de alcance correlacional entre las variables y posee un diseño cuasi-experimental con pre-prueba, pos-prueba y grupo de control (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2003).

Como material didáctico se utilizan 24 pantallas interactivas realizadas con el software libre GeoGebra. A modo de ejemplo, se presenta en la Figura 1 la confeccionada para favorecer la visualización de la aproximación que permite el polinomio de Taylor. Esta pantalla muestra la aproximación local por medio de un polinomio de Taylor para la función exponencial $y = e^x$ alrededor de $x = 1$. La representación gráfica de los polinomios de distintos grados se logra mediante un deslizador que simboliza el grado del polinomio y la expresión algebraica correspondiente se obtiene a través de un texto dinámico. En la figura se exhibe dicha aproximación para un polinomio de grado 2.

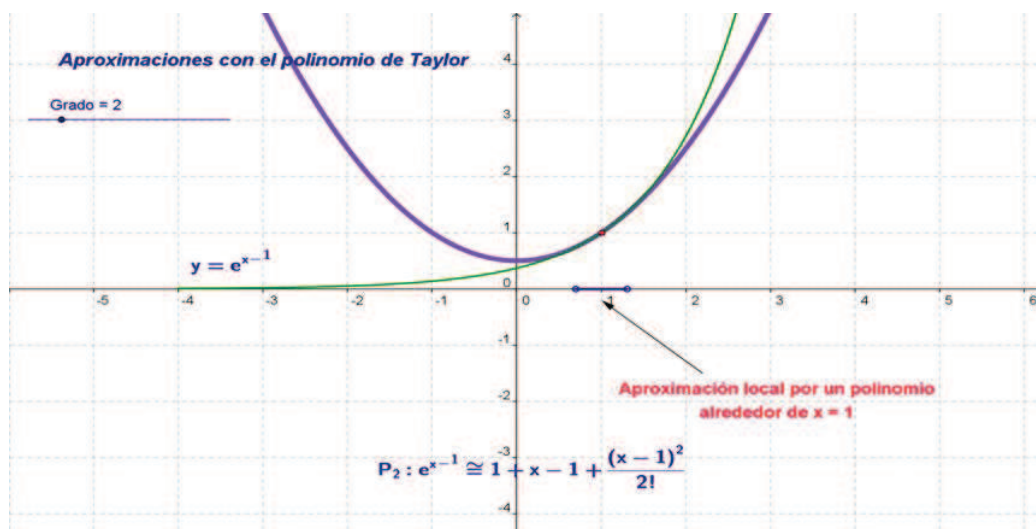


Figura 1. Aproximaciones con el polinomio de Taylor.

Para mostrar gráficamente las causas por las cuales una función continua en un punto puede no ser derivable en el mismo, se confecciona una ventana interactiva que se presenta en la Figura 2. En esta pantalla se muestra animadamente el caso de un punto anguloso con recta tangente vertical, otro que no admite recta tangente y un punto de inflexión con tangente vertical. Los tres casos se eligen mediante casillas de control que permiten seleccionar de a una por vez. La animación se logra mediante un deslizador que, en todos los casos, representa el incremento de la variable

tendiendo a cero por ambos lados.

Para mostrar la gráfica de la función derivada primera y segunda, luego de definir derivada de diversos órdenes, se prepara una pantalla interactiva que permite ver una función y cómo se van generando sus correspondientes funciones derivadas primera y segunda, que se seleccionan mediante dos casilleros de control según se quiera exponer una u otra. Al elegir el casillero correspondiente a la derivada primera, aparece en la pantalla la función $y = f(x)$ y un deslizador que representa los distintos puntos x_0 de un intervalo. Al mover este deslizador, se dibuja la recta tangente en x_0 , la función derivada primera hasta el x_0 y también se van marcando los intervalos donde la derivada es positiva, negativa o nula. Al seleccionar el casillero correspondiente a la derivada segunda, aparece nuevamente el deslizador que representa a los distintos puntos x_0 del intervalo. Al mover este deslizador, se produce la representación gráfica de la función derivada primera y segunda hasta el x_0 y además se van resaltando los intervalos en los que la derivada segunda es positiva, negativa o nula. En la Figura 3 se muestra esta opción para el valor final del deslizador.

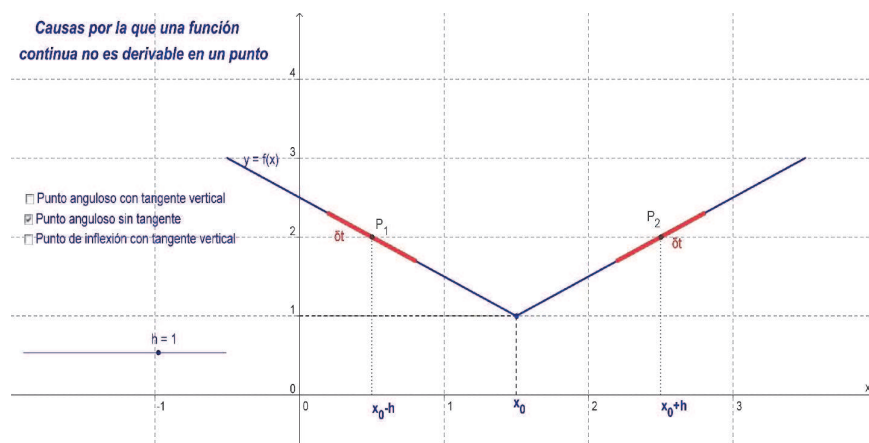


Figura 2. Causas por las que una función continua no es derivable en un punto.

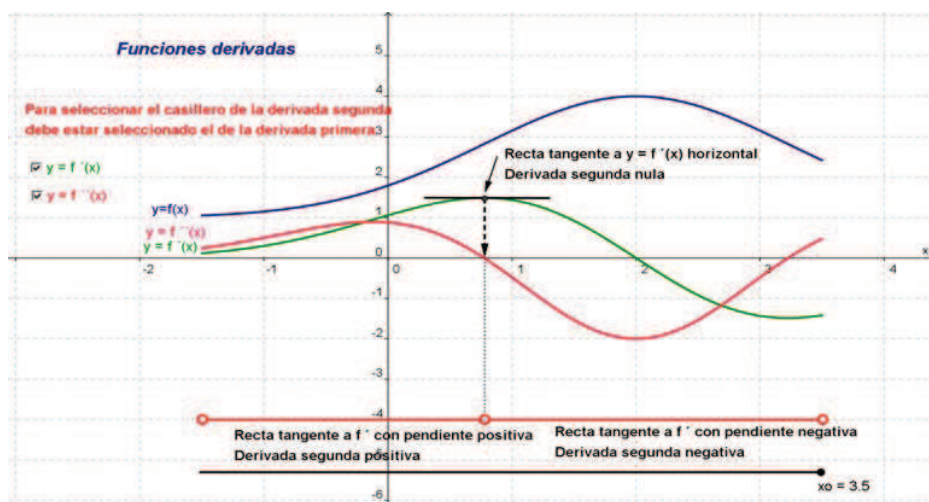


Figura 3. Funciones derivadas primera y segunda.

Los datos de los desempeños estudiantiles son recabados mediante dos parciales y dos trabajos prácticos. El primer parcial corresponde a la etapa de pre-prueba y el segundo a la de pos-prueba. En cuanto a los trabajos prácticos, uno se lleva a cabo durante el desarrollo de la experiencia y el otro al finalizar la misma. Éstos últimos constan de 10 ítems que involucran la visualización de los conceptos desarrollados. Se consideran aprobados los alumnos que responden correctamente a seis de los 10 ítems.

En el primer examen parcial, para las dos especialidades se consideran tres ítems relacionados -a través del registro gráfico- con la visualización de los conceptos de la unidad correspondiente a “Funciones, límite y continuidad”. El segundo parcial consta de cuatro consignas que sirven para evaluar aspectos clásicos de operatoria y una quinta consigna con cinco ítems (idéntica para las dos especialidades) con los que se pretende indagar qué diferencias en el aprendizaje y desempeño de los alumnos de cada uno de los grupos en estudio se pueden identificar, fundamentalmente en lo referido a los procesos de visualización involucrados.

Resultados

Con respecto a los resultados obtenidos, en la etapa de pre-prueba se llega a la conclusión que el desempeño de los dos grupos es similar. Esto, entre otros indicadores, les da el atributo de grupos comparables entre sí.

Durante la experiencia se evalúa a los alumnos mediante el trabajo práctico N°3 que involucra la visualización de los conceptos de la primera parte de la unidad donde el tema central es el de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y función derivada.

En la Tabla I se muestra, para las dos especialidades, una síntesis de la cantidad de alumnos

aprobados, desaprobados y ausentes así como los porcentajes respectivos. La cantidad de alumnos aprobados se subdivide según la cantidad de ítems (N) que responden correctamente.

Con los ítems del trabajo práctico N°4 se evalúan los contenidos que involucran la visualización de los conceptos de la segunda parte de la unidad didáctica donde el tema central es el de teoremas de Rolle, Lagrange y relación entre el signo de las derivadas sucesivas y la variación de las funciones. En la Tabla 2 se muestra, para las dos especialidades, una síntesis de la cantidad de estudiantes aprobados, desaprobados y ausentes, así como los porcentajes respectivos. La cantidad de alumnos aprobados se subdivide según la cantidad de ítems (N) que responden correctamente.

Tabla 1. Niveles de aprobación por parte de los estudiantes del trabajo práctico N°3 de la unidad didáctica de “Derivadas y aplicaciones”

		Ingeniería Electrónica		Ingeniería Mecánica	
	Cantidad de ítems	Cantidad de alumnos	Porcentaje respectivo	Cantidad de alumnos	Porcentaje respectivo
Aprobados	$10 \leq N \leq 8$	11	39,29%	8	21,63%
	$7 \leq N \leq 6$	9	32,14%	12	32,43%
Desaprobados		3	10,71%	16	43,24%
Ausentes		5	17,86%	1	2,70%
Totales		28	100%	37	100%

Tabla 2. Niveles de aprobación por parte de los estudiantes del trabajo práctico N°4 de la unidad didáctica “Derivadas y aplicaciones”

		Ingeniería Electrónica		Ingeniería Mecánica	
	Cantidad de ítems	Cantidad de alumnos	Porcentaje respectivo	Cantidad de alumnos	Porcentaje respectivo
Aprobados	$10 \leq N \leq 8$	12	42,85%	3	8,11%
	$7 \leq N \leq 6$	8	28,57%	5	13,51%
Desaprobados		4	14,29%	24	64,87%
Ausentes		4	14,29%	5	13,51%
Totales		28	100%	37	100%

En ambos trabajos prácticos se realiza además un análisis cualitativo de las respuestas de los alumnos que arroja diferencias notorias entre los dos grupos, en cuanto a la visualización de los distintos conceptos evaluados, a favor del grupo testigo.

En el examen parcial correspondiente a la etapa de pos-prueba se evalúan, mediante cuatro consignas, aspectos clásicos de operatoria de los contenidos de la unidad didáctica de “Derivada y aplicaciones”. Además hay una quinta consigna con cinco ítems para evaluar la visualización de los distintos conceptos.

El desempeño de los alumnos en este parcial es similar en las dos especialidades, con una leve diferencia a favor de Electrónica. El 75% de los alumnos de Ingeniería Electrónica y el 70,26% de los estudiantes de Ingeniería Mecánica aprueban el segundo parcial. La diferencia a favor de la especialidad Electrónica se observa en el rango de notas entre 7 y 10 puntos, y no en el rango entre 4 y 7 puntos. Además se puede observar que hay una gran diferencia a favor de Ingeniería Electrónica en los porcentajes de alumnos que obtienen desempeños satisfactorios en los ítems relacionados con la visualización de los conceptos. De acuerdo con los porcentajes obtenidos, menos del 20% de los alumnos de Electrónica obtiene un puntaje no satisfactorio mientras que en la especialidad Mecánica este porcentaje supera el 50%.

Conclusiones

En todas las evaluaciones realizadas durante la experiencia y la pos-prueba referidas a la visualización, el desempeño de Electrónica (grupo testigo) es superior al de Mecánica (grupo de control). En cuanto a los trabajos prácticos, la mayoría de los estudiantes de esta última especialidad demuestra tener problemas en el reconocimiento de la gráfica de la derivada primera o segunda dada la gráfica de la función y en la visualización del concepto de punto crítico, del signo de la derivada primera según el crecimiento o decrecimiento y del signo de la derivada segunda según la concavidad o convexidad de la función.

Estos hallazgos reafirman la idea de Zimmermann y Cunningham (1991) sobre los beneficios de favorecer la visualización a fin de conseguir una mayor comprensión. También se condicen con Hitt (2003), quien sostiene que el desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática favorece en los estudiantes una comprensión más amplia de los objetos del Cálculo. En cambio, la disminución en el desempeño de los alumnos de Mecánica puede deberse a la falta de un acercamiento visual adecuado.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 117-134. Recuperado el 15 de octubre de 2010 de <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf>.
- Ausubel, D.P. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Ausubel, D.P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa, 16(2), 694-701. Recuperado el 7 de mayo de 2011 de http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2016_2.pdf.

Dávila Araiza, M. (2010). *La derivada a partir de problemas de optimización en ambientes dinámicos creados con GeoGebra*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemáticas de la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora. Hermosillo, México. Recuperado el 18 de noviembre de 2011 de <https://docs.google.com/file/d/0B9mJWnHPjDPwMWEyMWMzYjQtN2FhNi00ZWlxlTljNWetMGFmNTc1Y2RmZTM1/edit?hl=en&pli=1>.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3° ed.). México: Mc Graw Hill.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Morelia. Recuperado: 20/11/2011 de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2005/133188_1.pdf.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). Editors introduction: What is mathematical visualization? Visualization in Teaching and Learning Mathematics. En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.). *Notes and Reports Series*, 19. Washington: The Mathematical Association of America.