

## ANÁLISIS SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LOS OBSTÁCULOS ASOCIADOS A LA DIVISIÓN POR CERO

Daniela Veiga

Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”

Argentina

veigadaniela@yahoo.com.ar

**Resumen.** Frecuentemente, al iniciar el estudio de conceptos básicos del análisis matemático, nos encontramos con dificultades y errores relacionados con la división por cero. La necesidad de dar respuesta a esta problemática, da origen a este trabajo que retoma las respuestas dadas por un grupo de alumnos de la escuela media que constituyen las evidencias sobre las cuales se inicia el proceso de investigación que se encuentra en su primera etapa de realización y cuyos resultados parciales se exponen aquí. Se enmarca la tarea en la perspectiva socioepistemológica indagando en los orígenes y evolución de este conocimiento, analizando los alcances y efectos del discurso matemático escolar vigente en la educación media y contemplando las concepciones de los alumnos acerca del cero y la división construidas en ambientes escolarizados y no escolarizados.

**Palabras clave:** División por cero, obstáculos, socioepistemología

**Abstract.** Frequently, at the beginning of the study of basic concepts of mathematical analysis, we find difficulties and mistakes related to the division by zero. The need to act in response to this problem originated this paper, which recovers the responses of a group of middle school students as evidence upon which the research process is faced; currently being on its first stage with partial results reported here. The task is framed in the socioepistemological perspective, inquiring into the origins and evolution of this knowledge, analyzing the scope and effects of the current school mathematical discourse in high school and observing the students' conceptions about zero and division both of them constructed inside and out of scholastic environments.

**Key words:** dividing by zero, obstacles, socioepistemology

### Introducción

De todas las cifras que componen nuestro sistema de numeración, sin lugar a dudas, el cero es el único que puede despertar las más diversas apreciaciones. Por un lado, es la representación matemática de la nada y el vacío ideas que, según D'Amore (2007), son simples de entender hasta por un niño de cinco años.

Sin embargo, detrás de esa “aparente” simplicidad se esconden siglos de búsquedas, explicaciones, ideas controvertidas que dan cuenta de una multiplicidad de dificultades asociadas a este concepto.

En el caso particular de la división por cero, es posible detectar varias dificultades en distintas instancias escolares. Lo llamativo es que a pesar de las diversas explicaciones brindadas por los docentes, los errores persisten y lejos de superarse, parecen afianzarse con el correr de los años hasta que finalmente, los docentes quedamos con

la sensación de que los alumnos responden mecánicamente buscando dar con la respuesta esperada por su profesor. (Veiga, 2013, p. 3)

Este trabajo de investigación surge frente a la necesidad de dar respuesta a diversas problemáticas detectadas en la clase de matemática relacionada con la división por cero. Si bien el concepto de división se aborda desde los primeros años de la escolaridad y el cero no constituye, en principio, un obstáculo cabe preguntarse ¿porqué persisten los errores de intentar dividir por cero?, ¿qué influencia ejerce el algoritmo de la división entera en la construcción de este concepto?, ¿qué relación existe entre la división aritmética y su paso al límite?, ¿cómo influyen las respuestas de los docentes frente a esta dificultad?, ¿qué respuesta dan los libros de texto que usamos en las aulas de matemática?... Estas son sólo algunas de las preguntas que guiaron investigación y a las cuales se busca dar respuesta.

### Marco teórico

La presente investigación se sustenta en la socioepistemología como marco teórico de referencia. Se buscará dar respuesta desde un enfoque sistémico de sus cuatro componentes, a saber: epistemológica, social, cognitiva y didáctica.

Las cuatro componentes socioepistemológicas permiten analizar los fenómenos didácticos relacionados con la problemática de la división por cero, abarcando no sólo las estructuras cognitivas de quien aprende y los métodos empleados en la enseñanza, sino que profundiza el análisis incluyendo la componente epistemológica inherente al conocimiento matemático como una de las características indispensables para explicar, predecir y superar las dificultades y obstáculos que emergen de las prácticas escolares.

El escenario sociocultural influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando, de cierta manera, sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente. Todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural, y por lo tanto, representativo de la sociedad en que se gesta. (Crespo Crespo, 2012, p. 96 – 97)

Desde el punto de vista didáctico, es posible advertir que las intervenciones de los docentes frente a los obstáculos relacionados con la división por cero constituyen un elemento más de análisis que pone en evidencia la necesidad de revisar el discurso matemático escolar. La división por cero se manifiesta en tres escenarios diferentes: aritmético, algebraico y analítico. En cada uno de estos escenarios, la naturaleza de la división por cero es completamente diferente. Sin embargo, se observa que en el discurso matemático escolar no existe tal distinción. Por el contrario, se torna en un concepto obvio y transparente.

Desde el punto de vista epistemológico, un recorrido por el devenir histórico este concepto pone en evidencia que el cero constituye en sí mismo un obstáculo epistemológico que requiere de una atención particular. En el caso de la división por cero, se mostrará qué confluyen distintas ideas que tienden a empañar este concepto.

Desde punto de vista cognitivo, las concepciones previas de los alumnos pone en evidencia la asociación del cero al concepto de nada o vacío. Esto sumado a la ausencia del tratamiento en los diseños curriculares y libros de texto trae como consecuencia una serie de errores y dificultades que se manifiestan en la división por cero.

Incorporamos a esta investigación el análisis y clasificación de los obstáculos según su origen ya que, debido a la naturaleza del cero, este concepto deriva en una serie de obstáculos cuya categorización puede ser útil para el análisis, anticipación y tratamiento de los mismos.

Artigue (1990) menciona varias características que tienen los obstáculos. En una de ellas se refiere a la resistencia del mismo evidenciando que la división por cero constituye un obstáculo en el aprendizaje de la matemática:

Este conocimiento resiste a las contradicciones a las cuales se lo confronta y el establecimiento de un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca. Es pues indispensable identificar e incorporar su rechazo en el nuevo saber [...] Después de tomar conciencia de su inexactitud, el conocimiento continúa manifestándose de modo intempestivo y obstinado. (p. 254)

### Antecedentes de la división por cero

Luego de realizar una exhaustiva investigación se encontraron innumerables trabajos que abordan el origen y evolución del cero en distintas civilizaciones. No obstante, son muy pocas las que abordan específicamente la problemática de la división por cero. Cataño Barrera (2007) observa que en las clases de matemática y en distintas situaciones se da por entendido que el cero constituye un caso particular, pero no se abordan en profundidad ninguna de esas particularidades quedando a cargo del alumno realizar el proceso necesario para su comprensión y asimilación.

Realizan un recorrido histórico, es fácil advertir que varias civilizaciones incluyeron al cero en su sistema de numeración. Sin embargo, fue la cultura India la que desarrolló el concepto del número cero, tal como lo conocemos actualmente.

Esta civilización incorpora con naturalidad, el uso del cero y el nombre sánscrito utilizado para nombrarlo es: *shunya* (vacío). No obstante, en la filosofía india, se desarrollaron una gran cantidad de conceptos relacionados con la Nada que abrieron paso al cero matemático. (Veiga, 2013, p. 53)

Algunos de los matemáticos indios que realizaron mayores aportes y, de alguna manera, se refirieron al uso del número cero son: Brahamagupta (598 – 670); Mahavira (800 – 870) y Bhaskara (1114 – 1185).

Brahamagupta, postuló la división por cero de la siguiente manera:

- 1) Cero dividido por cero es cero.
- 2) Cero dividido por negativo o los números positivos son o cero o se expresa como una fracción con cero como numerador y la cantidad finita como denominador.
- 3) Números positivos o negativos cuando son divididos por cero, son una fracción con el cero como denominador.

(Pinedo, 2001; Cataño Barrera, 2007; D'Amore, 2007; Sánchez Risco, 2010; Danoso y Castro, sf)

Por su parte, Mahavira afirma que “un número permanece inalterado cuando es dividido por cero” (Pinedo, 2001, p. 11; Danoso y Castro, sf, p. 5)

Finalmente, Bhaskara postula que “una cantidad dividida por cero se torna en una fracción con el denominador igual a cero. Esta fracción determina una cantidad infinita. En esta cantidad en la cual cero es el divisor, no hay alteración aunque se sumen o se resten muchos”. (Pinedo, 2001, p. 11; D’Amore, 2007, p. 434; Guimarães, 2008, p. 54; Danoso y Castro, sf, p. 5)

Estos intentos por definir la división aritmética por cero, ponen en evidencia la naturaleza epistemológica de este concepto que trae aparejados una serie de obstáculos que se manifiestan en la división y como tales, resultan muy difíciles de erradicar. Por esta razón, es importante considerar este análisis histórico para poder interpretar las respuestas dadas por los alumnos en las clases de matemática.

Del mismo modo, haciendo una revisión histórica de la aparición de la división por cero en el cálculo infinitesimal nos remontamos a los trabajos de Newton y Leibniz y sus cantidades infinitamente pequeñas, casi nulas. La falta de rigurosidad en sus argumentaciones fue lo que hizo que a muchos de los matemáticos de su época, les resultara muy complejo comprender sus explicaciones y fue objeto de varias críticas. En particular, se les objetaba la posibilidad de dividir por cero cuando en realidad la división se realizaba entre infinitesimales. Se recuerda al lector que en este periodo histórico aún no estaba formalizada la definición de límite y por lo tanto, el concepto de infinitesimal.

### El cero en el discurso matemático escolar

A fin de analizar los efectos del discurso matemático escolar en relación al cero y la división por cero, y comprender el origen de los obstáculos asociados a este conocimiento, se realiza una revisión de las propuestas que figuran en los diseños curriculares para escuela media en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (Argentina) y se examina el discurso matemático presente en algunos libros de texto, contemplando, en todo los casos, los elementos cognitivos, epistemológicos, didácticos y socioculturales que permiten explicar los fenómenos didácticos vinculados a este concepto.

Dentro de los diseños curriculares, el trabajo particular de la división por cero, aparece explicitado en segundo y tercer año del secundario, en el marco de la resolución de ecuaciones lineales. En estos años, se propone trabajar con problemas que se modelicen con ecuaciones lineales con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas que admitan, en cada caso, una, ninguna o infinitas soluciones; del mismo modo, se aconseja naturalizar el trabajo con ecuaciones que no tengan solución o que tengan infinitas.

Por otro lado, a partir del análisis del discurso matemático en cinco libros de texto, se arriban a las siguientes conclusiones:

- ❖ En los textos analizados, se recurren a algoritmos y procedimientos que evitan la aparición de la división por cero en la resolución de ecuaciones y sistemas.
- ❖ En general, la claridad y orden en los desarrollos que justifican las soluciones determinadas en una ecuación, se pierden por completo cuando se intentan dar las razones por las cuales una ecuación puede llegar a tener infinitas soluciones o ninguna.
- ❖ Algunos libros de texto, prefieren restringir el estudio de las ecuaciones y sistemas a aquellas que tengan una solución y ésta sea única.
- ❖ Los libros que presentan todas las posibilidades respecto a la cantidad de soluciones de una ecuación o sistema, no suelen retomar estas ideas en la enseñanza de otros conceptos y por lo tanto, es un conocimiento que queda planteado como un caso particular, completamente aislado del resto de los conceptos.

### **Dificultades y obstáculos asociados a la división por cero**

A partir de la experimentación que se realizó en tres cursos del quinto año de la escuela secundaria, la misma consistió en la resolución de cuatro actividades que involucran la división por cero en tres contextos diferentes: resolución de ecuaciones incompatibles e indeterminadas, cálculo de límites indeterminados y división aritmética por cero. Los errores cometidos por los alumnos en esta parte de la experimentación permiten ilustrar, a modo de ejemplo, los puntos de partida de nuestro análisis de las dificultades y obstáculos asociados.

Este tratamiento, trae aparejadas las respuestas mecánicas de los alumnos que suelen olvidar mucho más rápidamente de lo que suponemos. De esta manera, frente a una división por cero las respuestas suelen variar entre infinito, nada, cero, math ERROR, etc. Lo que es peor, la incertidumbre es tan grande, que se traslada a otras divisiones donde el cero es el dividendo, y a operaciones como la radicación, donde suelen responder que no se puede calcular la raíz cuadrada de cero. (Veiga, 2013, p. 68)

A continuación, se presenta una categorización de los obstáculos y dificultades asociadas a la división por cero que no pretende ser rígida y estructurada sino que tiene la finalidad de una organización que facilite su análisis.

- ❖ Dificultades asociadas al concepto de división aritmética: la idea arraigada de que la división es un reparto equitativo y que debe tener un resultado.
- ❖ Dificultades asociadas al concepto de infinito: los alumnos conciben al infinito como número y realizar operaciones con él. Otros, en cambio, asocian la expresión del infinito como equivalente a algo que no tiene solución cómo se puede ver en la figura 1.

$$\begin{aligned}
 3x + 2x + 2 &= 5 + 5x \\
 3x + 2x - 5x &= 5 - 2 \\
 0x &= 3 \\
 x &= 3: 0 - \text{no se puede} \\
 x &= \infty
 \end{aligned}$$

Figura 1. Resolución de una ecuación incompatible

- ❖ Dificultades asociadas al concepto de ecuación: en general, no admiten la posibilidad de que una ecuación pueda no tener solución o infinitas como se puede ver en la figura 2.

$$\begin{aligned}
 3x + 2(x+1) &= 5(1+x) \\
 3x + 2x + 2 &= 5 + 5x \\
 5x - 5x &= 5 - 2 \\
 \text{NO SE PUEDE RESOLVER}
 \end{aligned}$$

Figura 2. Respuesta dada en la resolución de una ecuación incompatible

- ❖ Dificultades asociadas al concepto de función. Ausencia de la noción de infinitesimal: en general, considera el cálculo de límites y de imágenes, conceptos equivalentes.
- ❖ Dificultades asociadas a las características de las situaciones planteadas: en general, no diferencian la naturaleza la división por cero planteada en un contexto aritmético, algebraico o analítico. Los trabajan como situaciones equivalentes.

Del análisis de las dificultades detectadas durante la etapa de la experimentación, puede deducirse que la división por cero encierra múltiples obstáculos íntimamente relacionados entre sí, a saber:

- ❖ Obstáculos didácticos: originado por ausencia de un tratamiento específico de la división por cero a lo largo de toda la escolaridad. Las características del trabajo que se realiza con funciones en los contextos escolares, oculta el carácter dinámico de las mismas lo que dificulta el abordaje de nociones de cálculo que involucran el concepto de infinitesimal.
- ❖ Obstáculos epistemológicos: se refleja en la concepción que tienen acerca de la división por cero, del infinito y las funciones.
- ❖ Obstáculos ontogenéticos: se manifiestan en la imposibilidad de concebir el carácter dinámico de los infinitesimales que los diferencia de la división aritmética. Por otro lado, la búsqueda permanente de generalizaciones asociadas a la división por cero dejan entrever la dificultad que este concepto encierra.

## Conclusiones

Considerando los antecedentes históricos, el análisis realizado del discurso matemático presente los diseños curriculares y libros de texto y contemplando las dificultades y obstáculos observados en experimentación es posible arribar a las siguientes conclusiones:

- ❖ El tratamiento que recibe la división por cero en la resolución de ecuaciones indeterminadas e incompatibles resulta escaso.
- ❖ Los alumnos no advierten la diferencia entre la división aritmética por cero (que no está definida), la resolución de ecuaciones determinadas e incompatibles y el cálculo de límites en los que no se divide por cero, sino por infinitesimales.

- ❖ Los obstáculos que dan origen a las dificultades de los alumnos no son contemplados ni en los diseños curriculares, ni en los libros de texto que suelen usar los docentes en sus clases de matemática.

A partir de esta realidad, es de esperar que el alumno tenga dificultades en admitir la imposibilidad de la división aritmética por cero y su diferenciación en el ámbito algebraico y analítico.

### Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1990). Epistemologic et Didactique. *Recherchez en Didactique des Mathématiques* 10 (2), 241-286.
- Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente [CD-ROM]. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática* (tema Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas). Blumenau, Brazil: Universidad Regional de Blumenau.
- Cataño Barrera, A. (2007). *Estudio didáctico del cero*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. México.
- Crespo Crespo, C. (2012). Socioepistemología. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comp.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 91–114). Buenos Aires: Edivim y Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Donoso, P. y Castro, E. (sf). *Necesidades, representaciones y usos del cero a través de la historia*. Recuperado el 7 de mayo de 2012 de <http://www.ugr.es/~jmcontreras/thales/1/ComunicacionesPDF/Cero.pdf>
- Guimarães, F. (2008). *Sentidos do zero*. Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.
- Pinedo, C. (2001). *El cero a través del tiempo*. Recuperado el 23 de octubre de 2012 de <http://br.geocities.com/christianjqp/publicacoes1.htm>.
- Sánchez Risco, J. (2010). *La matemática en la India (500 d.c. a 1200 d.c.)*. España: Universidad de Castilla-La Mancha.
- Veiga, D. (2013). *Estudio socioepistemológico del cero. El caso de la división*. Tesina para obtener el grado de Diplomatura no publicada. Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”. Buenos Aires, Argentina.