

ELEMENTOS DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICA. EL CASO DE LOS POLÍGONOS

Nuria Climent, Emma Carreño y C. Miguel Ribeiro

Universidad de Huelva.

Universidad de Piura.

Universidad de Algarve.

climent@uhu.es, emma.carreno@udep.pe, cmribeiro@ualg.pt

España

Perú

Portugal

Resumen. Partimos de que el conocimiento del profesor de matemática es especializado en su conjunto, tal como se señala en el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), propuesto por Carrillo y colaboradores (grupo SIDM). Considerando esa especialidad y especificidad, centramos la atención en los subdominios que se corresponden al dominio de conocimiento matemático (Mathematical Knowledge) para buscar evidencias de Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica de Matemática (KPM), en el abordaje que hace Martha, una estudiante para profesor sobre el contenido de Polígonos.

Palabras clave: conocimiento especializado, MTSK, formación inicial

Abstract. We assume that the mathematics teacher's knowledge is specialized as a whole, just as it is outlined in the model Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) proposed by Carrillo and collaborators (SIDM group). Considering that specialty and specificity, we focus on the subdomains that correspond to mathematical knowledge domain (mathematical Knowledge) to look for evidence of Knowledge of the Topics (KoT), Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) and Knowledge of the Practice of Math (KPM), in the approach that Martha makes. Martha is a student teacher on the content of Polygons.

Key words: specialized Knowledge, MTSK, initial training

Introducción

El conocimiento matemático ha sido y es uno de los focos más preocupantes y problemáticos en toda formación escolar y académica (refiriéndonos a una formación superior, técnica o universitaria). Los malos resultados evidenciados por los estudiantes en la matemática escolar, y su relación con el conocimiento del profesor llevan a plantearnos la influencia que ejerce, sobre esta realidad, la formación de los estudiantes para profesor (EPP), así como la formación continua de quienes ya son profesores.

Numerosas investigaciones han abordado la importancia que tiene que los profesores sepan lo que enseñan (Contreras & Blanco, 2001), coincidiendo en que el conocimiento del contenido es uno de los factores decisivos en un buen desempeño docente. No obstante, el conocimiento “puro” del contenido, en el sentido de conocimiento del tópico en sí mismo, es insuficiente para promover aprendizajes en los alumnos, por lo que se precisa además otro tipo de conocimiento, el que Shulman (1986) denominó conocimiento didáctico del contenido (PCK) (siglas de la denominación original Pedagogical Content Knowledge). El aporte de Shulman es relevante porque llama la atención sobre el foco de los planes de formación docente de aquella época, interpelando sobre la especificidad y las características (o estructura) del conocimiento del profesor.

Dado que su propuesta podía vincularse a cualquier área curricular, se precisaba investigaciones centradas en la matemática, razón por la cual la conceptualización del Mathematics Knowledge for Teaching (MKT) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) cobra importancia. Los trabajos del grupo de investigación de la Universidad de Michigan (liderado por Deborah Ball) han sido referentes para iniciar una reflexión profunda sobre el contenido y las características que ha de tener el conocimiento del profesor de matemática. Partir de que dicho conocimiento es especializado porque es específico del profesor de matemática, dado que le es necesario para enseñar, ha sido la mayor contribución del modelo. Junto a esto, la consideración de que el conocimiento matemático (MK) puede caracterizarse, según sus matices, en tres subdominios, al igual que el conocimiento didáctico del contenido (PCK), nos ha llevado a intentar aclarar la naturaleza de cada uno de los subdominios y a pensar el contenido que se incluye en cada uno cuando nos situamos en un tema en concreto.

Ese proceso de reflexión ha permitido vislumbrar solapamientos entre subdominios como Conocimiento común del contenido (Common Content Knowledge-CCK) y Conocimiento especializado del contenido (Specialized Content Knowledge-SCK), pertenecientes al dominio de MK e incluso, entre subdominios de dominios distintos tales como el SCK con el Conocimiento matemático y de los estudiantes (Knowledge of Content and Students-KCS), este último incluido en el PCK. Esta confusa delimitación nos ha llevado a plantear un nuevo modelo cuya premisa de partida es que el conocimiento del profesor de matemáticas es especializado en su conjunto y no solo un subdominio (Escudero, Flores, & Carrillo, 2012); (Carreño & Climent, en prensa).

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK)

El nombre del modelo procede de aquella especialidad y especificidad que se ha mencionado antes, y las siglas se toman de su traducción al inglés: Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. Otros aspectos que se consideran en el MTSK son: el referente desde el que se propone y analiza cada subdominio es la matemática y; las creencias en la matemática y en la enseñanza, y aprendizaje de la matemática; influyen en todo el proceso de adquisición y de análisis del MTSK que posee un profesor de matemáticas.

El MTSK se estructura en dos grandes dominios: el conocimiento matemático (mathematical knowledge-MK) y el conocimiento didáctico del contenido (pedagogical content knowledge-PCK). El primero está ligado a la matemática en sí misma, como disciplina que necesita conocer el profesor para enseñar un contenido determinado. Por su parte, el PCK conjuga aquel conocimiento disciplinar con los conocimientos pedagógicos, psicológicos y curriculares que se precisan para desarrollar las tareas de enseñanza. En el MK se incluyen los subdominios de

Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT), Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). En el PCK se sitúa el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, en prensa).

Dado que en este documento nos centraremos solo en los subdominios del MK, describiremos brevemente estos:

❖ Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT): Es el conocimiento de los conceptos, proposiciones (teoremas, corolarios, axiomas), propiedades, procedimientos, clasificaciones, fórmulas y algoritmos, con sus respectivos significados y demostraciones. También se incluye en este subdominio las conexiones intraconceptuales puesto que están vinculadas al conocimiento del significado de un elemento específico (Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñoz-Catalán, en prensa). Conjugar lo interior, es lo que permite señalar que el KoT tiene un carácter de avanzado (no básico), necesario para la enseñanza puesto que, considerando a Shulman (1986) “To think propely about content knowledge requires going beyond knowledge of the facts or concepts of a domain” (p. 9).

❖ Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM): Es el conocimiento de las principales ideas y estructuras de la matemática (Carrillo et al. (en prensa)). Si bien este subdominio se refiere al conocimiento matemático, se diferencia del KoT porque, se centra en la matemática como un sistema unificado, de allí que en él se conjuguen los conceptos de complejización (matemática elemental desde un punto de vista avanzado), simplificación (matemática avanzada de una perspectiva elemental); así como las conexiones interconceptuales (Fernández, Figueiras, Deulofeu, & Martínez, 2010).

❖ Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): el conocimiento de las prácticas de la matemática es por un lado, el conocimiento de cómo se hace matemática, lo que incluye cómo se elaboran definiciones o demostraciones, cómo se establecen las conexiones de las que se habló en los subdominios anteriores y por otro lado, cómo se establecen los convenios matemáticos y la respectiva justificación de los mismos. En palabras de Montes et al. (en prensa) es “la reflexión sobre la manera de hacer matemática”.

Método y Evidencias de Conocimiento Matemático

Los ejemplos que se muestran son extraídos de algunos ítems de un cuestionario que indaga sobre el conocimiento especializado de estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria, cuando abordan el tema de polígonos. En este documento solo emplearemos las respuestas de Martha,

una estudiante de 22 años que cursaba el último año de su formación inicial. Ella, aunque no había tenido un rendimiento académico brillante, mostró disposición para reflexionar sobre su propio conocimiento, al momento de completar el cuestionario. Además, contaba con cierta experiencia de enseñanza ya que dictaba clases particulares a estudiantes de primaria y secundaria.

La discusión de las evidencias se realiza a través de indicadores elaborados para el análisis del cuestionario. Estos emergieron, en algunos casos, de la revisión de la literatura y en otros, del mismo proceso de análisis. También, como resultado de las sesiones de trabajo del grupo SIDM para construir el MTSK, surgieron una serie de categorías que dotan de contenido y estructuran cada subdominio. Estas han sido vinculadas a los indicadores para describir las evidencias de conocimiento inferidas.

Los ejemplos que se muestran proceden de la situación I del cuestionario (este proponía 4). En ella se plantea que al iniciar el tema de Polígonos, en una clase de 2° de secundaria (13-14 años), la profesora pide a sus alumnos que piensen qué es un polígono y cómo lo definirían. Luego de unos minutos, ella copia en la pizarra cuatro de esas definiciones: i) Es un cuerpo geométrico que tiene lados y ángulos diferentes. Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares; ii) Un polígono es una figura geométrica que tiene lados y ángulos de medidas iguales; iii) Es una figura geométrica la cual posee más de dos lados y sus ángulos miden más de 180° , su fórmula sería $180^\circ(n-2)$; iv) Es una figura geométrica cerrada, compuesta por la unión de 3 o más puntos y que ocupa un lugar en el plano, los puntos no deben cruzarse.

Así, a partir de esta situación, se propone a los estudiantes para profesor distintas cuestiones, tales como: analizar las definiciones anteriores y valorarlas según los errores (E), conceptos confundidos (CC) e ideas válidas (IV) que se comunican en las definiciones (i, ii, iii y iv); identificar los subconceptos (SC) que a esos estudiantes de secundaria les hace falta aprender, antes de construir el concepto de polígono y finalmente, definir polígono y representar gráficamente polígonos y no polígonos. Las letras indicadas entre paréntesis constituyen el código de las unidades de información determinadas, según se extraigan de la definición dadas.

❖ Ejemplo I: Errores, conceptos confundidos e ideas válidas de las definiciones dadas

Del análisis y valoración que hace Martha de las definiciones (i) y (iii) (ver Tabla I) se extraen unidades de información que proporcionan indicios de KoT y KPM.

Definición dada por:	Errores de la definición	Conceptos que está confundiendo (interpretación del error)	Ideas válidas/ justificación de tal consideración
(i)	Tienen lados y ángulos diferentes (no siempre va a ser así.)	Pueden ser: cóncavos, convexos, regulares e irregulares. (Aquí (i) está confundiendo la clasificación por sus ángulos y por sus lados con la definición). Cuerpo geométrico.	Pueden ser cóncavos y convexos, así como regulares e irregulares. (Tiene la idea de cómo se pueden clasificar los polígonos).
(iii)	Sus ángulos miden más de 180° . Quiere decir que sus ángulos no pueden tomar menores valores de 180° . Es una figura geométrica ¿cerrada o abierta?	Su fórmula $180^\circ(n-2)$ (Está confundiendo la fórmula, con la definición de polígonos).	Es una figura geométrica que posee más de dos lados (...) (Hasta aquí está bien la afirmación pero faltaría complementarla con más información para que tenga la definición de polígono)

Tabla I. Respuestas de Martha al valorar las definiciones dadas de Polígono.

Las unidades de información muestran que el conocimiento de Martha está centrado predominantemente en el KoT, asociado a las categorías “propiedades” y “clasificación”. Así, por ejemplo, al indicar como error: Tiene lados y ángulos diferentes (no siempre va a ser así) [E-i] hace pensar que este es parcial, sobre todo por la acotación final que hace. De igual forma, parece suceder al señalar: Sus ángulos miden más de 180° (Quiere decir que sus ángulos no pueden tomar menores valores que 180°) [E-iii] pues, lo último lleva a pensar que conoce que los ángulos también pueden medir menos de 180° . Otras evidencias de que Martha **conoce las propiedades o características de los polígonos** aparecen cuando determina como concepto confundido: Cuerpo geométrico [CC-i], aunque no indica con qué concepto puede estarse confundiendo (i); y también, al señalar como idea válida: Es una figura geométrica que posee más de dos lados [IV-iii]. Por otro lado, Martha evidencia que **conoce los criterios para clasificar los polígonos** y también **conoce las clases o tipos de polígono**, al indicar: (Aquí (i) está confundiendo la clasificación por sus ángulos y por sus lados con la definición) [CC-i], así como al señalar: Pueden

ser cóncavos y convexos, regulares e irregulares (Tiene la idea de cómo se pueden clasificar los polígonos) [IV-i], respectivamente.

También, aunque en menor proporción, se ha notado indicios de KPM, concretamente de la categoría denominada “modos de proceder en matemática”, ya que por sus respuestas, Martha evidencia que **conoce las formas de crear o producir matemática**, concretamente, sabe que es una definición matemática y por ende, repara en lo que es definir (Aquí (i) está confundiendo la clasificación (por sus lados y por sus ángulos) con la definición [CC-i], Su fórmula $180^\circ (n-2)$ Está confundiendo la fórmula con la definición de polígono [CC-iii]); en las imprecisiones (Es una figura ¿cerrada o abierta? [E-iii]) u omisiones (Es una figura geométrica que posee más de dos lados. (Hasta aquí está bien la afirmación pero faltaría complementarla con más información para que tenga la definición de polígono) [IV-iii]) que presentan las definiciones dadas.

❖ **Ejemplo 2:** Subconceptos que hace falta trabajar con los alumnos (i, ii, iii y iv) para construir una definición correcta.

Tomando como referencia el trabajo de Contreras y Blanco (2001), entendemos como subconceptos los conceptos que son necesarios construir antes para comprender el concepto de polígono. Esta noción se proporcionó en el cuestionario mismo, pero pese a ello, este ítem resultó ser difícil de comprender, de allí que en la categoría de conexiones matemáticas se observe un conocimiento bastante elemental, asociado con “conceptos que permiten refutar o aclarar errores o conceptos confundidos” (¿Qué es un cuerpo geométrico? ¿Hay alguna diferencia entre cuerpo geométrica y figura geométrica? ¿Es lo mismo cuerpo y figura geométrica? [SC-i]); “conceptos que se involucran en la definición dada” (Se debería trabajar conceptos de ángulos y lados según se medida. [SC-ii].) y, “conceptos que precisan o permiten discriminar lo que es un objeto (Para trabajar bien la definición se necesitaría tener un concepto más, región interior de una figura geométrica [SC-iv]).

❖ **Ejemplo 3:** Definición de polígono y representación gráfica de polígonos y no polígonos.

Luego de que Martha realiza las tareas de los ítems anteriores, se le pide construir una definición adecuada para 2° de secundaria (asumiendo ella el rol de profesora) y además, ejemplificarla trazando 3 dibujos de polígonos y 3 de no polígonos. Su respuesta es la siguiente:

“Un polígono es una figura geométrica plana cerrada que posee una región poligonal y está compuesta por la unión de tres o más puntos no colineales”.



Figura. 1. Polígonos y no polígonos dibujados por Martha

Lo anterior, permite ver que, aún cuando tiene idea de que una definición matemática ha de ser precisa y breve, al explicitar qué es un polígono omite características que sí muestra en sus dibujos, haciendo pensar que su imagen conceptual de polígono es más restrictiva que la definición verbal que construye. Este conocimiento lo asociamos a las siguientes categorías e indicadores.

Sub-dominio	Categoría	Indicador	Conclusión extraída del ejemplo
KoT	Definiciones	Conoce una idea o definición verbal de polígono.	Los polígonos son figuras cerradas y convexas.
	Registros	Conoce las características críticas de los polígonos.	Figura geométrica cerrada. Posee una región poligonal. Compuesta por la unión de 3 o más puntos no colineales.
KPM	Modos de proceder en matemática	Conoce las formas de crear o producir matemática	Centrándonos en qué es una definición matemática, Martha repara poco en la precisión de su definición pues cae en redundancias (figura geométrica plana); añade características accesorias (posee una región poligonal), aunque por sus dibujos, es posible que esta característica le permite diferenciar un polígono de un no polígono y por ende, excluir a los de lados cruzados; y no explicita si los ángulos pueden ser cóncavos (ya que antes había dejado ver que solo podían ser convexas).
KSM	Conexiones	Conoce los conceptos matemáticos que se conectan.	Al definir conecta: figura plana, región interior, puntos no colineales.

Tabla 2. Evidencias de KoT, KPM y KSM.

Comentarios Finales

El MTSK parte de la consideración de que el conocimiento del profesor de matemáticas es específico de él, de allí su carácter especializado; se caracteriza por involucrar varias dimensiones

(disciplinar, didáctica y curricular) pero no como compartimento estancos, sino como un todo integrado. Es posible que haya conocimientos que comparta con otros profesionales pero, eso no es interés del modelo pues lo realmente importante es indagar sobre el conocimiento, en y desde sus distintas dimensiones, que pone en juego un profesor de matemática cuando enseña esta ciencia.

Los subdominios que integran el modelo son caracterizados y diferenciados entre sí, en un primer nivel, a través de categorías, tales como: propiedades, clasificaciones, definiciones y registros (entre otras) para el KoT; modos de proceder en matemática para el KPM y conexiones matemáticas para el KSM. En un segundo nivel, estas categorías se concretizan más a través de indicadores. En el KoT se tienen algunas como: conoce las propiedades o características de los polígonos (propiedades), conoce los criterios para clasificar los polígonos y conoce las clases o tipos de polígonos (clasificaciones), conoce una idea o definición verbal de polígono y conoce las características críticas de los polígonos (definiciones), conoce las representaciones gráficas de los polígonos y sus elementos (registros). Al KPM se ha asociado: conoce las formas de crear o producir matemática (modos de proceder en matemática) mientras que, al KSM se ha vinculado: conoce los conceptos matemáticos que se conectan (conexiones matemáticas).

Finalmente, del conocimiento evidenciado por Martha, puede decir que ha predominado el KoT. Así pues es claro que tiene idea sobre los polígonos y conoce varias de sus características. Esto le permite trazar representaciones gráficas, que aunque sean poco variadas o en algunos casos restrictivas, por lo general se corresponden con lo que se entiende por ese objeto. La mayor evidencia del KPM es el reparo en qué es una definición matemática y por ende, en los aspectos que hay que cuidar, aunque estos no se expliciten. Del KSM, apenas puede inferirse unas conexiones elementales entre conceptos que definen lo que es un polígono (figura plana, región interior, puntos no colineales).

Agradecimientos Los autores son miembros del proyecto de investigación “Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento” (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.

Referencias bibliográficas

- Ball, D. L., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* (59), 389-407.
- Carreño, E. R., y Climent, N. (en prensa). Specialized and horizon content knowledge- Discussing prospective teachers knowledge on polygons. *Proceedings of the Eighth Congress European of Mathematics Education*.

- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., y Muñoz-Catalán, M. (en prensa). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. *Proceedings of Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*.
- Contreras, L., y Blanco, L. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *XXI. Revista de educación*(3), 211-220.
- Escudero, D., Flores, E., y Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. In L. Sosa, E. Aparicio, y F. Rodríguez (Ed.), *Memorias de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 35-42). México, D.F.
- Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J., y Martínez, M. (2010). Redefining HCK to approach transition. In M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Ed.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2610-2649). Poland: University of Rzeszów.
- Montes, M. Á., Aguilar, Á., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. C. (en prensa). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. *Proceedings of the Eighth Congress European of Mathematics Education*.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.