EL ROL DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR EN LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNFICADOS TRIGONOMÉTRICOS

Gisela Montiel Espinosa
Instituto Politécnico Nacional México
gmontiel@ipn.mx

Resumen. Presentamos una discusión sobre el carácter normativo del discurso Matemático Escolar, a propósito de un estudio realizado a las producciones de profesores mexicanos de nivel medio superior, en la resolución de una situación-problema de cálculo de distancias inaccesibles, para reconocer los significados trigonométricos que subyacen a sus acciones. El estudio incorporó el análisis de los libros de texto, con el propósito de identificar las posibles condiciones escolares relacionadas con estos significados, y que pudieran transmitirse (en un sentido didáctico) a los estudiantes. Resultado de este estudio pudimos identificar las bases de comunicación de la trigonometría escolar y su relación con los fenómenos didácticos identificados en la literatura.
Palabras clave: Discurso Matemático Escolar, Significados Trigonométricos
Abstract. We present a discussion of the normative character of the Mathematic Scholar discourse, regarding a research of Mexican high school teachers' productions, in the resolution of a problem-situation of in accessible distance calculation, in order to recognize the trigonometric meanings underlying their actions. The study included the analysis of textbooks, in order to identify potential school conditions related to these meanings, that could be transmitted (in a didactical sense) to students. As a result of this research we could identify *communication bases* for school trigonometry and its relationship to didactic phenomena, already identified in the literature.
Key words: Scholar Mathematic Discourse, Trigonometric Meanings

Introducción: El Estudio Referido

En la investigación de Jácome (2011) profesores mexicanos del nivel medio superior, en un contexto de actualización docente, llevaron a cabo una experiencia didáctica cuya intención fue trabajar relaciones de proporcionalidad en la construcción de modelos geométricos para resolver una situación-problema tradicional de 'cálculo de distancias inaccesibles'. El diseño de la situación-problema pone énfasis en la toma de medidas angulares y en la construcción de modelos geométricos a escala, a través de la experiencia y la manipulación. Es decir, no se les proporcionó una ilustración con medidas hipotéticas, sino que se les pidió localizar un objetivo (alto) en su entorno para calcular su altura.

En los reportes entregados por los profesores se pueden observar distintos fenómenos, entre los cuales se presentó uno (ver figura 1) que no se había reportado y, por lo tanto, atendido en la investigación sobre estos tópicos.

Los pasos que sigue el profesor para calcular la altura de un objetivo alto, tomando medidas a 1, 2 y 3 metros de distancia de él, son básicamente los de la tradición escolar. Asumir la relación entre el ángulo y el cateto adyacente como relación de (de)crecimiento constante, no afectó a la resolución de la situación problema, por lo que los profesores obtuvieron la altura de su objetivo.

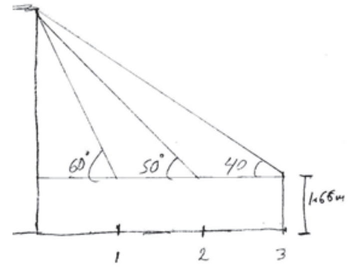


Figura 1. Ejemplo de significado lineal en la relación ángulo-distancia (cateto).

Surgió la inquietud inmediata por entender a qué se debe que el profesor no reconozca que esta relación no sólo no es posible, sino que de ser posible no serían necesarias las razones trigonométricas para resolver el problema. Podríamos decir entonces que quienes resuelven la situación-problema con la RTT estarían haciendo uso sin sentido de ella.

A partir de la experiencia de este estudio se han analizado los reportes de resolución de los profesores y algunos libros de texto, autorizados (en el periodo en el que se llevó a cabo la experiencia con los profesores) por la Secretaría de Educación Pública mexicana, en tanto distinguimos en la actividad y la producción del profesor de matemáticas, una expresión de su conocimiento del contenido escolar y de su didáctica como productos de su formación y su experiencia docente.

Es decir, nuestra perspectiva no se ocupa del sujeto cognoscente, sino del sujeto social que construye su conocimiento a partir de la interacción con su entorno inmediato: el profesor como un profesional formado en el mismo sistema educativo donde ahora ejerce una practica docente. Se analizan los libros de texto porque constituyen el mediador entre la práctica docente y el Programa de Estudios, y en ese sentido se convierte en la herramienta didáctica que “puede asegurar” al profesor estar siguiendo el enfoque didáctico que se le exige.

Fundamentación Teórica

Se constituyó un marco conceptual con dos planteamientos teóricos: la racionalidad práctica (Mesa y Herbst, 2011)y la construcción social de conocimiento trigonométrico (Montiel, 2011); asumiendo el significado como asociado a la actividad humana, que se identifica a partir de la intención (implícita) conectada a la acción (Kilpatrick, Hoyles, Skovsmose y Valero, 2005).De ahí que denominemos *significado lineal* a lo que subyace a la acción del profesor de plasmar una relación de (de)crecimiento constante en la relación ángulo-cateto adyacente en un triángulo rectángulo. Se eligen estos planteamientos teóricos por estar referidos específicamente al conocimiento trigonométrico.

Racionalidad Práctica del Profesor de Trigonometría

Herbst y Chazan (2011) caracterizan la racionalidad práctica como un contenedor de disposiciones, entendidas éstas en el sentido de Pierre Bourdieu como categorías de percepción y apreciación, que son viables en la enseñanza de las matemáticas para garantizar (o refutar) cursos de acción en ella. Con ello los autores se proponen caracterizar las bases donde el profesor justifica sus acciones. Estas disposiciones tienen incidencia en un colectivo y están presentes para cumplir tanto con las *normas* de una situación instruccional específica, como con las obligaciones profesionales de la enseñanza de las matemáticas.

Muy en particular, en una situación instruccional de "cálculo de valores de funciones trigonométricas" Mesa y Herbst (2011) identifican que la racionalidad práctica del profesor justifica al menos tres normas:

- ninguno, profesor o estudiante, se responsabiliza por justificar los pasos de solución en un ejemplo o por explicar por qué una respuesta tiene sentido.
- los estudiantes no tienen control sobre los pasos a seguir cuando el instructor resuelve ejemplos en el pizarrón; y.
- el instructor siempre proporciona suficiente información para resolver los problemas dados como ejemplo.

A partir del reconocimiento de estas normas, los autores identifican en la curricula del *community college* una percepción de la Trigonometría como proveedor de habilidades y conocimiento técnico para asignaturas más avanzadas, lo cual podría explicar por qué el profesor no invierte tiempo del curso en actividades distintas. Los autores consideran que esto influye para que las actividades didácticas tiendan a la repetición y a la modelación de procedimientos conocidos para que los estudiantes ganen familiaridad con el material, lo que eventualmente demostrará que han adquirido maestría con él.

Construcción Social de Conocimiento Trigonométrico

Montiel (2011) identifica, en escenarios históricos, a la anticipación como la práctica social que reguló las actividades asociadas a la matematización de la astronomía, ya sea para la predicción o la explicación de fenómenos celestes, era necesario que éste sucediera para estar en condiciones de comprobar el dato y a la vez el modelo; la matematización, numérica o geométrica, orientaba las decisiones prácticas de la agricultura, el comercio o la navegación, del mismo modo que guiaba a las explicaciones teóricas de la astronomía o la geografía. Esto es, se tenía la "necesidad" de anticipación al fenómeno. Este acto anticipatorio preconfigura la emergencia de un conocimiento y en consecuencia, de un saber institucional: la Trigonometría.

A partir de este análisis Montiel desarrolla una epistemología de prácticas que le permite explicar algunos fenómenos didácticos y fundamentar diseños didácticos cuya intencionalidad sea la de construir herramientas trigonométricas funcionales, es decir, importantes en sí mismas y para quien hace uso de ellas. En particular para la construcción social de las razones trigonométricas propone la reconstrucción de condiciones como:

- ❖ El paso de lo macro a lo micro. Uso de modelos a escala para representar realidades no manipulables.
- ❖ Uso de herramientas y lenguaje geométricos para el análisis de los modelos.

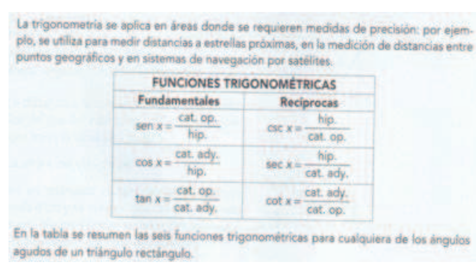
En ese sentido, se propone que desde su introducción las razones trigonométricas se identifiquen en el estudio de las cuerdas de un círculo, de tal suerte que el círculo unitario para transitar a las funciones no sea un "método didáctico", sino un contexto de significación.

Resultados

Se reconoce que el profesor juega el doble papel de estudiante-profesor (EP), pues atiende a las indicaciones del instructor para llevar a cabo la actividad al mismo tiempo que plasma en su reporte el dominio que tiene de los saberes en juego. En este sentido la situación-problema provoca una ruptura del contrato didáctico, pues no proporciona a EP toda la información para resolverla en papel y debe actuar sobre su entorno para obtenerla.

En principio, se asumió que el denominar a la tangente de distintas maneras (como razón, función, procedimiento, fórmula, etc.) era común en el profesor de nivel medio superior por la regularidad con la que él trabaja las funciones, aun cuando sólo esté utilizando una razón en la resolución de la situación-problema.

Sin embargo, esta misma indistinción se encontró en uno de los libros de textos (Figura 2), y Montiel y Buendía (2013) lo identificaron también en un programa de estudios; lo que señala una falta de claridad entre la naturaleza de una u otra noción matemática, provocada por el énfasis puesto en el procedimiento matemático más que en el concepto.



La trigonometría se aplica en áreas donde se requieren medidas de precisión: por ejemplo, se utiliza para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	
Fundamentales	Recíprocas
$\text{sen } x = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}}$	$\csc x = \frac{\text{hip.}}{\text{cat. op.}}$
$\cos x = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}}$	$\sec x = \frac{\text{hip.}}{\text{cat. ady.}}$
$\tan x = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}}$	$\cot x = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}}$

En la tabla se resumen las seis funciones trigonométricas para cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

Figura 2. Fuente: Filloy, Rojano, Ojeda, Zubieta y Figueras, (2009).

Este énfasis se identifica como la vía para adquirir habilidad con las técnicas, la cual se manifiesta cuando el estudiante logra resolver tareas similares a las resueltas por el profesor en clase.

Mesa y Herbst (2011) reconocen que es deber y prerrogativa del instructor decir que los estudiantes han aprendido un cierto objeto de conocimiento, pero para hacerlo el profesor necesita confiar en cierta evidencia de parte de los estudiantes (por ejemplo, completar una tarea). En la experiencia analizada, si bien la situación-problema no proporciona toda la información, el profesor la obtiene y da evidencia del cumplimiento de la tarea obteniendo “un valor”, es decir, “la” altura; lo cual explica que hayan promediado las tres alturas obtenidas (con las mediciones angulares a 1m, 2m y 3 m del objetivo) aunque explícitamente no se le solicitara.

Por su parte, algunos textos pasan de la expresión proporcional al cálculo de cocientes para establecer las razones trigonométricas (Figura 3).

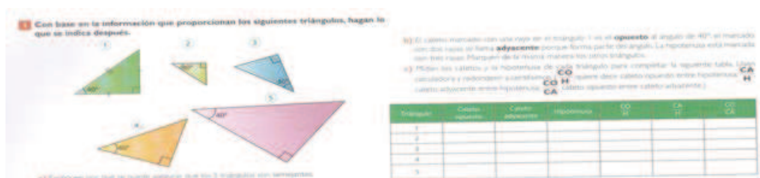


Figura 3. Fuente: García y Mendoza (2008)

Resulta entonces que la norma, identificada por Mesa y Herbst (2011), en la que el instructor proporciona al estudiante toda la información necesaria para resolver los problemas y obtener resultados con base en la repetición de un procedimiento, se puede identificar también en los libros de texto. La figura 4 muestra un ejemplo claro de esta norma, aunque también es evidente en los problemas de aplicación.

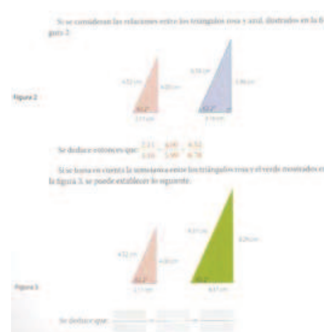


Figura 4. Fuente: Mancera (2008).

Otra ruptura del contrato identificada fue la que surge de solicitar un modelo a escala que represente la situación. Los modelos geométricos que hacen los profesores no constituían triángulos semejantes, cada razón trigonométrica se establecía en relación a un ángulo en particular. En cambio en los textos las razones trigonométricas siempre se establecen en relación a un mismo ángulo (ver por ejemplo las Figura 4 y 5), con base en lo cual adquiere sentido hablar de “razón”.

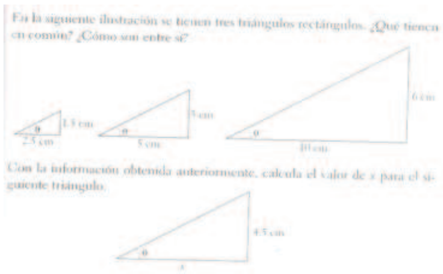


Figura 5. Fuente: Briseño, et al (2008).

Para identificar la razón constante en relación a un ángulo en particular se utiliza un lenguaje geométrico-proporcional, sin embargo, los triángulos no se construyen sino que se le proporcionan al estudiante para que sean medidos, en el mejor de los casos, o se identifiquen las medidas correspondientes al ángulo, los catetos y la hipotenusa.

Es decir, mientras que en la costumbre escolar se relacionan triángulos con triángulos (semejantes) en el papel, la situación-problema requería relacionar la realidad con el triángulo construido. De ahí que, en los textos, triángulos de distintos tamaños puedan representar una misma realidad porque son semejantes, no así los triángulos como los que se presentaron en el reporte R16 (Figuras 6, 7 y 8), en donde se puede identificar una influencia de las distancias a las que debe situarse el profesor del objetivo a medir (a 3m, 2m y 1m) para trazar la base de los triángulos.

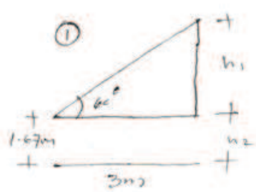


Figura 6. Modelo del cálculo de alturas a 3m del objetivo.

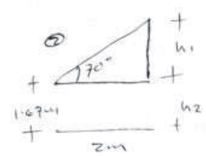


Figura 7. Modelo del cálculo de alturas a 2m del objetivo.

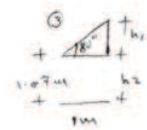


Figura 8. Modelo del cálculo de alturas a 1m del objetivo.

Al realizarlos el profesor no cuida el que, sin importar la posición a la que se encuentre, la altura del objetivo y por lo tanto la de los triángulos, debe ser la misma.

Es cierto que las medidas angulares son aproximaciones poco precisas por que fueron hechas con un pequeño tubo de cartón y un transportador, pero también es cierto que de haber construido 'modelos a escala' como lo pedía la situación-problema, habría sido evidente la imposibilidad de hacerlos con esas medidas. Ésta habría sido, quizá, la ruptura del contrato que más detonara una discusión respecto de la concepción que tienen los profesores sobre lo trigonométrico en el triángulo rectángulo.

En general, el uso de ilustraciones representativas se identifica como una costumbre escolar que no resulta problemática en la resolución de lo que se consideran "tareas trigonométricas", de hecho puede prescindirse de ellas porque no son una construcción geométrica mediadora entre el problema y la solución. Esto explica por qué no hay modelos a escala, aunque así los llamen, en las producciones del profesor.

En los problemas de aplicación los textos inducen al uso ilustrativo de los triángulos.La Figura9 es un dibujo alusivo a un problema de aplicación incluido en un libro de texto, donde se sobreponen los trazos y las medidas necesarias para convertirlo en un problema de "resolución de triángulo", igual a los resueltos previamente en el tema

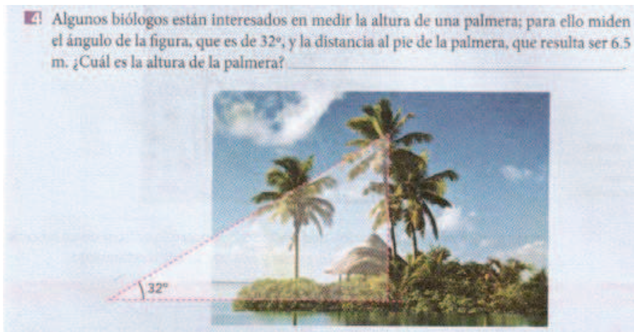


Figura 9. Fuente: Filloy et al (2009).

No es necesario que el estudiante haga el trazo, calcule medidas y obtenga una solución por otra vía; y en ese sentido el estudiante no tiene el control de lo que hace, no justifica, ni comprueba que su procedimiento sea el apropiado para dar respuesta al problema; con lo que se manifestarían dos de las normas identificadas por Mesa y Herbst (2011).

Tanto en este tipo de ilustraciones como en las figuras geométricas los libros utilizan, frecuentemente, medidas que no son reales; lo que las convierte sólo en información necesaria para sustituir en la fórmula que resuelve el problema.

Discusión

En la experiencia con los profesores el triángulo, como modelo geométrico, no es una construcción geométrica, en tanto no guarda una relación proporcional con la realidad modelada. De haber sido así, el profesor encontraría imposible utilizar las medidas de 60°, 50° y 40° para los ángulos indicados. Esta relación entre el ángulo y la distancia no es lineal, no es cuadrática, no es logarítmica, ni exponencial. Es aquí donde reconocemos *lo trigonométrico* de la construcción del modelo y la necesidad de utilizar la semejanza entre triángulos para estudiar la naturaleza de estas relaciones particulares.

Sin embargo, en los textos la semejanza resulta ser una condición inicial sobre la que se desarrolla el tema y en consecuencia todo lo que sigue a ella la cumple, no hay necesidad de corroborarla. Es decir, la construcción geométrica es innecesaria y se concentra la actividad matemática en la operación aritmética para la obtención del valor faltante, lo que aunado a la falta de atención y/o reconocimiento de lo que es trigonométrico en la relación ángulo-lado del triángulo es lo que identificamos como el fenómeno de la *aritmetización trigonométrica*.

Con base en lo anterior no podemos declarar que el profesor no domina los conceptos o tiene concepciones erróneas, sino que hay significados de lo trigonométrico que subyacen a su quehacer: significado lineal, significado como división de longitudes, significado como técnica para obtener un valor; porque subyacen también a la Trigonometría escolar y en consecuencia a todo aquello que la transmite con intencionalidad didáctica.

En ese sentido hablar sólo de los conocimientos del profesor o de los desempeños del estudiante nos es insuficiente para entender por qué suceden los fenómenos didácticos, ya que ambos actores están sujetos a diversos factores y a su vez, dichos factores, a un valor epistémico de la matemática en juego. Proponemos entonces la noción de *discurso Matemático Escolar* como articulador de la racionalidad práctica y la construcción social de conocimiento, para ampliar la explicación del porqué el docente actúa con base en normas, sujetas a lo que es Trigonometría en su entorno.

El discurso matemático escolar subyace a lo inmediatamente visible. Tal como señalan Cantoral, et al (2006, p.86) la estructuración de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos matemáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de *bases de comunicación* para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos.

El dME refleja una ideología sobre la forma de presentar y tratar (didácticamente) los objetos matemáticos en clase (Castañeda, et al, 2010), y naturalmente se manifiesta y transmite en lo inmediatamente visible: Planes y Programas de Estudio, libros de texto, exposición de clase, o, como se ha identificado en estudios especializados, en las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general. En consecuencia es importante reconocer aquello que subyace a estas manifestaciones concretas del dME y permanece invariante aun con la innovación didáctica, debido a que en el fondo ésta no modifica lo que se está enseñando, sino sólo cómo se está enseñando.

Con base en la fundamentación teórica expuesta en el presente documento y la evidencia empírica del estudio referido reconocemos que el fenómeno estudiado es un efecto de la *pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico*, donde las razones trigonométricas (como planteamiento del dME) se convierten en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, lo cual, además, se manifiesta de manera clara en la estructuración del discurso escolar. En ese sentido, el dME como lo que subyace y ha permanecido invariante aun en el transcurso de varias reformas educativas es que *lo trigonométrico está en las razones trigonométricas, en la técnica para calcular un valor*.

Referencias bibliográficas

Briseño, L., Carrasco, G., Martínez, P., Palmas, O., Struck, F. y Verdugo, J. (2008). *Matemáticas 3*. México: Santillana Integral.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(4), 27–46.

Castañeda, A., Rosas, A. y Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en los libros de texto. *Premisa, 12*(44), 3-18.

Filloy, E., Rojano, T., Ojeda, A., Zubieta, G. y Figueras, O. (2009). *Matemáticas 3º*. México: Ediciones Pedagógicas/McGraw-Hill.

García, S. y Mendoza, T. (2008). *Fractal 3*. México: Ediciones SM.

Herbst, P. y Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: studying the justification of actions in mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 405-462.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica*. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional. Tesis para obtener el grado de maestro en ciencias en matemática educativa. CICATA-IPN, México

Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O. y Valero, P. (2005). *Meanings of meaning of mathematics*. En J. Kilpatrick, C., Hoyles, O. Skovsmose, y P. Valero, P. (Eds), Meaning in Mathematics Education, 9-16. NY, USA: Springer.

Mancera, E. (2008). *Matemáticas 3*. México: Santillana Ateneo.

Mesa, V. y Herbst, P. (2011). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. *ZDM Mathematics Education*, *43*(1), 41-52.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico.* Un estudio socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico. En M. Ferrari, G. Martínez y G. Buendía (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*, 169-205. México: Ediciones Díaz de Santos.