EL TRABAJO GEOMÉTRICO PERSONAL DE FUTUROS PROFESORES

Carolina Henríquez-Rivas
Universidad Católica de Valparaíso Chile
carohenriquezrivas@gmail.com

Resumen. El propósito de este escrito es mostrar avances en el marco de una investigación en Didáctica de la Matemática sobre el trabajo geométrico de profesores chilenos en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en la enseñanza secundaria. Se presenta el trabajo producido por dos estudiantes de Pedagogía en Matemática en su último año de formación, uno resuelve usando métodos sintéticos, el otro empleando métodos analíticos. El análisis se enmarca en la Teoría *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM). Los resultados sobre el ETM de profesores, permitirán profundizar en aspectos teóricos actualmente no abordados, así como la generación de propuestas de enseñanza.

Palabras clave: profesor, trabajo geométrico, paradigma geométrico

Abstract. The purpose of this paper is to show advances in the framework of a research in Didactics of Mathematics on the geometric work of Chilean teachers in the transit of the synthetic geometry to analytic geometry in the secondary education. We present the work produced by two students of Pedagogy in Mathematics in his final year of formation, one resolves using synthetic methods, the other using analytical methods. The analysis is based on the Theory *Mathematical Work Space (MWS)*. The results on the MWS of teachers, will allow to penetrate into theoretical aspects nowadays not approached, as well as the generation of proposed for teaching.

Key words: teacher, geometric work, geometric paradigm

Introducción: Contexto de la investigación

En este escrito se muestra parte de los avances y evidencias obtenidas relativos al trabajo geométrico de futuros profesores, lo cual forma parte de una investigación doctoral en Didáctica de la Matemática sobre el *trabajo geométrico de profesores chilenos en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en la enseñanza secundaria*. En general, se analiza el trabajo del docente desde distintos niveles: sus referentes matemáticos, cómo organiza y ejecuta la enseñanza y en un sentido personal, dadas sus propios conocimientos y creencias.

El tema de la enseñanza de la geometría y sobre las geometrías sintética y analítica en particular, es un asunto que ha sido abordado desde hace más de un siglo por diversos autores y en circunstancias diferentes. Por ejemplo, Klein (1908) en relación a las geometrías sintética y analítica distingue entre una y otra, señalando que en la geometría sintética se estudian las figuras en sí mismas sin intervención de fórmulas, mientras que en la analítica, estas se aplican mediante el uso de los sistemas de coordenadas, además, añade "En realidad, la diferencia entre ambas especies de Geometría es puramente cuantitativa: según predominen las fórmulas o las figuras, se tiene una u otra Geometría" (p. 74). En el *Programa de Erlangen* de Klein, las distintas geometrías son caracterizadas en términos de los grupos de transformaciones. Desde este punto de vista, una geometría sería el conjunto de propiedades invariantes mediante las transformaciones del grupo correspondiente, poniendo fin a las disputas entre las geometrías sintética y analítica (Hernández, 1995).

Específicamente sobre la enseñanza de la geometría en secundaria, Santaló (1980) se refiere a la falta de consenso respecto de los contenidos y metodologías. Sobre estudios realizados en el campo de la Didáctica de la Matemática, destacan los de Gascón (2002; 2003) quien da cuenta de la falta de *continuidad y complementariedad* entre la enseñanza de las geometrías sintética y analítica en la enseñanza secundaria y el bachillerato, señalando que se estudian como *"mundos separados"*. Gascón propone a través de cierto tipo de problemas, poner de manifiesto su complementariedad.

En este trabajo, a partir del contexto anteriormente expuesto y desde una perspectiva teórica que considera aspectos epistemológicos, filosóficos y cognitivos, se presenta el análisis al trabajo geométrico de dos futuros profesores en su último año de formación.

Marco Teórico

Este estudio se sustenta principalmente en la teoría *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (ETG) desarrollado inicialmente por de Houdement y Kuzniak (1996, 2006) y ampliada por Kuzniak (2011) al *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), que surge con la necesidad de profundizar en otros dominios de la matemática.

Espacio de Trabajo Matemático

Desde esta perspectiva es posible observar cómo un sujeto que resuelve una tarea, reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y conocimientos, conformando su propio ETM. En el ETM se definen dos planos, uno cognitivo y el otro epistemológico, en relación directa con los contenidos matemáticos del dominio en juego. Cada plano contempla tres componentes; en el cognitivo están presentes los procesos de *visualización*, de *construcción* y de *prueba* y, en el plano epistemológico, el *representante*, los *artefactos* y el *referencial*. Las componentes de los planos, se articulan mediante tres génesis: *semiótica, instrumental y discursiva*. La génesis semiótica, asociada a las representaciones de los objetos matemáticos. La génesis instrumental, permite hacer operatorios los artefactos en el proceso constructivo. La génesis discursiva que da sentido al referencial teórico (definiciones, propiedades) para ponerlo al servicio del razonamiento matemático (Kuzniak, 2011). En la siguiente figura (1), se muestra el ETM y las génesis que permiten articular los planos.

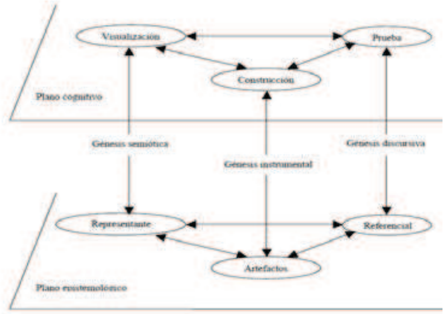

Figura 1. Espacio de Trabajo Matemático y sus génesis (Kuzniak, 2011).

La idea de *representante* está relacionada a la noción signo de Peirce (1974), tiene que ver con el objeto matemático bajo formas más o menos abstractas: íconos, índices y símbolos. Un signo remite a su objeto de alguna de estas tres formas, según el proceso semiótico –llamado aquí visualización– involucrado en función de las significaciones de su utilizador. En relación a los *artefactos*, estos no solo abarcan los de tipo material sino que los de tipo simbólico (no material), aludiendo a la distinción efectuada por Rabardel (1995).

El proceso de transformación efectuado por el sujeto de artefacto a instrumento se denomina génesis instrumental (Trouche, 2002) el cual favorece el proceso de construcción de configuraciones matemáticas. La componente *referencial* remite a la componente de índole teórico matemático del dominio en juego, las propiedades y definiciones involucradas en un razonamiento y cómo estas son explicitadas en un discurso para argumentar y convencer.

En los distintos ETM se identifican tres tipos, dependiendo de la reflexión del sujeto cuando se enfrenta a un problema: un referencial matemático definido de manera ideal solamente sobre criterios matemáticos (ETM de referencia), un espacio definido en términos didácticos en una institución dada con una función definida (ETM idóneo) y, un espacio propio de cada utilizador fruto de la reflexión entre sus conocimientos matemáticos y los que utiliza para resolver una tarea (ETM personal).

Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETM_G)

Para definir el ETM_G y los paradigmas geométricos, se deben considerar las particularidades de la geometría y, naturalmente, su desarrollo en términos epistemológicos. Así, para profundizar en las componentes de los planos cognitivo y epistemológico del ETM_G, se contemplan otros enfoques. Por ejemplo, sobre el proceso de *visualización y razonamiento* se considera lo desarrollado por Duval (1995, 2005), sobre los *artefactos* e *instrumentos* las concepciones de Rabardel (1995) y Trouche (2002) sobre génesis instrumental y los procesos de *prueba* según Balacheff (1987).

Sobre las génesis del ETM, específicamente la *génesis semiótica*, al considerar las particularidades del dominio geométrico, esta se denomina *génesis figural*, la cual permite describir el proceso semiótico que está asociado al pensamiento visual que opera en geometría. Si bien las *génesis instrumental* y *discursiva* no varían en su denominación, también se consideran las particularidades del dominio geométrico. El *espacio real y local* se presenta como componente particular del ETM_G (se trata del *representante* en el ETM) es el soporte material con un conjunto de objetos concretos y tangibles, basado en la concepción semiótica de Duval (1995, 2005); en este caso el proceso de *visualización,* asociado a los tratamientos sobre las figuras. Las formas de visualizar pueden funcionar de modo *icónico* o *no-icónico*, según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades (Duval, 2005).

Sobre la componente de los *artefactos* en el ETM_G, se considera la concepción cognitiva desarrollada por Rabardel (1995) sobre artefactos e instrumentos (antes mencionado en el caso general del ETM). En este enfoque, los instrumentos pasan a ser *entidades mixtas* formadas por el artefacto (regla, compás, un software, etc.) y componentes cognitivos relacionados con los esquemas de uso. Además, los instrumentos son considerados como *entidad mediadora* entre el sujeto (utilizador) y el objeto sobre el cual se relaciona la acción.

Sobre el ETM_G y su caracterización, es preciso señalar que interactúa el individuo frente a una tarea específica, que permite activar y construir el espacio de trabajo de cada *geómetra* –sujeto que resuelve la tarea geométrica. Desde esta perspectiva podemos observar cómo un geómetra reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y el conocimiento de distintos modelos geométricos cuando enfrenta a una tarea, es decir, el ETM_G puede variar, dependiendo del *paradigma geométrico* dominante.

En las investigaciones realizadas por Houdement y Kuzniak (1996, 2006) ellos identifican tres tipos de geometrías que coexisten en la enseñanza de la geometría, estos son: *Geometría Natural* (GI), es decir, la geometría sobre objetos reales, la importancia en las mediciones, el trabajo es de tipo material; *Geometría Axiomática Natural* (GII), los objetos geométricos descritos por una propiedad, su definición, al momento de validar, esto se hace dentro de un sistema axiomático local; *Geometría Axiomática Formal* (GIII), independencia de la geometría y la realidad, la axiomática explícita y completa. Esta noción de *paradigma geométrico* ha sido inspirada por la noción de paradigma introducida por Kuhn (1962) sobre las estructuras de las revoluciones científicas.

Es posible analizar las entradas en el ETM_G y cómo se articulan los planos mediante las génesis y, especificando, las componentes puestas en juego, es lo que se denomina *circulación* entre las componentes en el ETM_G. Los resultados obtenidos, respecto a las circulaciones entre las componentes en el ETM_G de profesores, permitirán profundizar en aspectos teóricos actualmente no abordados. Destacamos en este punto, el diseño de propuestas de enseñanza que consideren el tránsito y complementariedad entre los enfoques sintéticos y analíticos en la Enseñanza Secundaria, especialmente, aquellos que privilegian el paradigma geométrico GII, o bien, el tránsito de GI a GII.

Cabe señalar, que por no tratarse del objetivo principal de este reporte, no serán presentadas las propuestas de enseñanza antes mencionadas.

El ETM_G Personal de Futuros Profesores: Dos Casos

El objetivo de este estudio es analizar las circulaciones entre las componentes de los planos en el ETM_G *personal* de dos futuros docentes, cuando los métodos empleados son sintéticos o analíticos y, además, identificar el *paradigma geométrico* privilegiado en cada trabajo. Se trata de los casos de dos estudiantes chilenos en último año de formación en Pedagogía en Matemática, que han tenido al menos un semestre de práctica en el aula como docentes –práctica profesional. Los estudiantes pertenecen a la misma universidad y se encuentran en el mismo nivel, ambos cursaron asignaturas que involucran contenidos geométricos. Cabe señalar que se pidió explícitamente a los estudiantes resolver la tarea dada con uno u otro método, es decir, uno utilizó métodos sintéticos, el otro, analíticos, ambos usaron GeoGebra para construir o verificar las configuraciones geométricas y propiedades involucradas, además, seleccionaron una secuencia de imágenes que utilizaron para relatar (por escrito) su razonamiento.

La tarea que debían resolver es la siguiente: *"Probar que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo"*. El análisis a priori de la tarea, contempla el uso de artefactos materiales tradicionales e informáticos (dada su extensión no se expone este desarrollo).

Se utilizará la notación ETM_{GS} cuando el trabajo se realiza usando métodos sintéticos y ETM_{GC} cuando son analíticos provenientes del sistema de coordenadas cartesianas. FP_1, FP2 para referirse a futuro profesor 1 y 2, respectivamente. Para analizar las circulaciones entre las componentes de los planos de cada ETM_G, se utilizarán las claves: para el plano cognitivo, visualización [A], construcción [B], prueba [C] y, para el plano epistemológico, espacio local y real [1], artefactos [2], referencial [3].

Primer Caso: ETM_{GS} de FP_1

Evidencias

A continuación, extractos del ETM_{GS} realizado por el FP_I. Primero, una secuencia de imágenes (1, 2 y 3) y los tratamientos realizados. Luego, extractos del relato realizado por el geómetra de forma escrita.

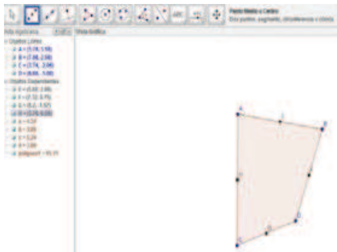

Imagen 1

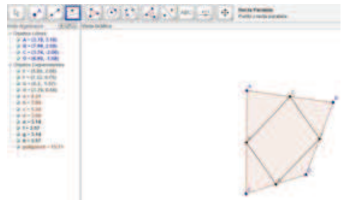

Imagen 2

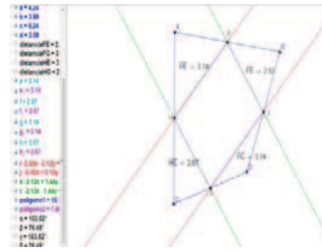

Imagen 3

[Relato de FP_I]:

1) Dibujar el cuadrilátero […].

2) Utilizar herramienta punto medio y luego unir los puntos.

3) Utilizar herramienta que mide distancia o longitud, herramienta de ángulo, para comprobar que es un paralelogramo.

4) Comprobar que el cuadrilátero que se forma cumple con las propiedades del paralelogramo.

5) Luego deslicé uno de los vértices del cuadrilátero, […], entonces, comprobé que se cumplen las propiedades.

6) Traté de hacer la demostración "formal" […], pero no pude.

En lo que sigue, se analizarán las evidencias sobre el ETM_{GS} realizado por FP_I.

Circulación entre las Componentes y Paradigma Geométrico

De acuerdo a lo analizado en relación a la tarea dada, la circulación entre las componentes del ETM_{GS} de FP_I, se describe como sigue: en primer lugar, el trabajo se activa por la génesis instrumental, pues utiliza el software [2] que le permite realizar las construcciones [B] de las configuraciones geométricas [1]; cuadrilátero, punto medio, y las potencialidades propias del software son usadas [2] activando nuevamente la génesis instrumental en coordinación con un trabajo de visualización [A] que permite "ver y validar" que se cumplen ciertas propiedades [3] ya conocidas por FP_I para un número reducido de casos, mediante los deslizamientos de los vértices [C]. En resumen, la circulación entre las componentes en este caso es: [2] [B] [1] [2] [A] [3] [C].

Con respecto al paradigma geométrico que se basa el trabajo, este se encuentra en GI, pues está directamente relacionado con la realidad; la validación empírica usando un artefacto material y mediciones para probar unos pocos casos. Si bien hay un trabajo de orden discursivo, este se presenta debilitado, pues no se trata de un *razonamiento deductivo* –o demostración, en alusión al razonamiento definido por Duval (1995) – lo cual incluso es declarado por FP_1.

Segundo Caso: ETM_{GC}

Evidencias

A continuación, se muestran extractos del ETM_{GC} realizado por FP_2. Primero, la secuencia de imágenes (4, 5 y 6) realizadas con sistema de coordenadas cartesianas y, posteriormente, se presenta el relatado del geómetra de la tarea realizada.

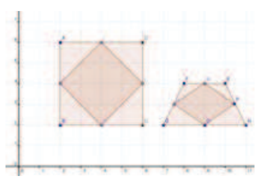
Imagen 4

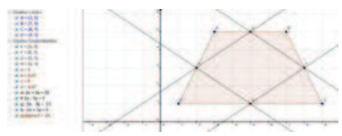
Imagen 5

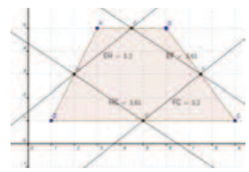
Imagen 6

[Relato de FP2]:

1) Se tiene un cuadrilátero ABCD. Se determinan los puntos medios.

2) Se trazan las rectas e, f, g, h. *Al mover los vértices A, B, C, D y crear otros cuadriláteros, se pueden observar paralelogramos […], donde se cumplen las propiedades del paralelogramo.*

3) Luego volviendo al cuadrilátero creado originalmente, podemos ver que las rectas e, g *tienen igual pendiente, por lo tanto son paralelas, lo mismo se puede realizar con las rectas f y h.*

4) *También podemos verificar algunas propiedades del paralelogramo, utilizando herramientas de GeoGebra, como medir la distancia entre dos puntos*

En lo que sigue, se analizarán las evidencias sobre el ETM_{GC} realizado por FP_2.

Circulación entre las Componentes y Paradigma Geométrico

De acuerdo a las evidencias desarrolladas a partir de la tarea dada, la circulación entre las componentes del ETM_{GC} del FP_2 es: inicialmente, el trabajo se aborda sin considerar el sistema de coordenadas, es similar a lo realizado por FP_1, lo cual queda en evidencia en las imágenes del FP_2. Hasta los argumentos expuestos en el punto 2) del relato, la circulación se activa por la componente artefactos [2] que, conocidas sus potencialidades, permite construir las configuraciones geométricas [B]; cuadriláteros, puntos, rectas [1], que al manipular el artefacto [2] en coordinación con el proceso de visualización [A] permite verificar empíricamente por medio de ciertas propiedades [3], que el cuadrilátero formado es un paralelogramo [C]. Hasta este momento, no hay indicios de un trabajo que considera el sistema de coordenadas cartesianas ni las representaciones algebraicas que provienen del trabajo en este sub-dominio (a pesar de las imágenes en el plano cartesiano). Es en el punto 3) del relato, que efectúa un trabajo en el sub-dominio analítico, pues usando un teorema de las pendientes [3] y las representaciones algebraicas de las rectas [1], proporcionadas en la *vista algebraica* del software, "ve" que el cuadrilátero es efectivamente un paralelogramo [A]. Finalmente, vuelve a lo realizado en el punto 2), la circulación se repite en [3] y [C]. En resumen, la circulación entre las componentes es: [2] [B] [1] [2] [A] [3] [C] [3] [1] [A] [3] [C].

Según lo examinado, el paradigma que predomina en el ETM_{GC} de FP_2 es GI, pues si se considera el momento del trabajo en que alude al sistema de coordenadas, representaciones algebraicas y propiedades que provienen de este sub-dominio, se trata de un trabajo para un número reducido de casos específicos. En este caso, las configuraciones en el sistema de coordenadas, tiene una posición específica (local), la visualización se relaciona a lo que se ve usando la *vista algebraica* del software y herramientas de medición.

Análisis Global: Aspectos Comunes sobre las Génesis de los ETM_G

Si bien la intensión es analizar el ETM_G de dos FP al emplear métodos geométricos distintos, se han detectado aspectos relativos a las génesis comunes en ambos casos. Con respecto a la *génesis instrumental*, el trabajo se activa por medio de esta génesis, se observa en ambos casos cierto manejo del software y de sus potencialidades, es decir, se movilizan los procesos de instrumentalización e instrumentación (Trouche, 2002). En ambos casos, los deslizamientos que permite efectuar el software son fundamentales para probar de forma empírica para un número reducido de casos, lo dinámico no es aprovechado en todo su potencial. No es explícita la presencia de artefactos no-materiales (simbólicos), específicamente en el trabajo de FP_2.

La *génesis figural,* en ambos casos permite articular los objetos (figuras) con el proceso de visualización, el cual según la clasificación de Duval (2005) es de tipo *icónico*, pues las configuraciones son lo que representan visualmente y no se obtienen por construcción geométrica o descomposición dimensional. Si bien se utilizan propiedades, estas permiten verificar para unos pocos casos, trabajo que luego no se formaliza.

Es posible afirmar que en el trabajo solicitado por la tarea, se privilegia en ambos casos el proceso de visualización. Finalmente, sobre la *génesis discursiva*, predominan las pruebas de tipo pragmática, en alusión a las tipologías propuestas por Balacheff (1987). Si bien los relatos dan cuenta del conocimiento de ciertas propiedades del paralelogramo para probar, se trata de la génesis mas debilitada, incluso esto fue declarado por los propios estudiantes (llamados futuros profesores).

Conclusiones y Reflexiones

Este y otros análisis realizados (en el marco de la investigación doctoral) a los distintos tipos de ETM_G (personal, idóneo, de referencia), más estudios de carácter epistemológico, han permitido profundizar en aspectos no abordados del ETM, específicamente en el sub-dominio de geometría analítica (GC). Lo anterior, se traduce en el estudio de distintos ETM_G y una aproximación a la formulación de los paradigmas geométricos en el sub-dominio de GC.

Los estudios realizados sobre el ETM_G de los docentes, así como la profundización y ampliación teórica, han permitido constatar la necesidad de centrar la atención en *tareas* que activan un determinado trabajo, es decir diseñar a nivel de ETM_G-idóneo, *tareas de referencia* que provoquen ciertas circulaciones. Se consideran dos tipos de tareas de referencia: con dificultad de resolución en GS y que se puedan resolver en GC y, otras, con modificación de enunciados. Como se menciona en el punto 2.2, son de interés para los efectos de la investigación en curso, aquellas tareas que privilegian el paradigma geométrico GII, o bien, el tránsito entre GI y GII.

Con respecto al trabajo realizado por cada FP y el paradigma privilegiado en cada caso, en los respectivos sub-dominios, ambos se basan en el paradigma GI. Al respecto, es preciso señalar que a priori se pensaba que privilegiarían GII en ambos casos. Llamó la atención, por ejemplo, la manera de visualización privilegiada por ambos geómetras analizados, de tipo *icónica* (Duval, 2005), además, las pruebas del tipo *pragmática* (Balacheff, 1987), donde la génesis discursiva es débilmente explotada. En ambos casos, no se aprovechó el potencial del entorno tecnológico utilizado. Es evidente que en este asunto se debe considerar para el diseño de tareas de referencia que favorezcan el tránsito entre las geometrías y el trabajo en las tres génesis del ETM.

Reconocimiento

Financiamiento parcial a través del Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) 1110988, Chile.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Developpement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de luers Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10*, 5-53.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, *39*, 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma, 44*, 25-34.

Hernández, J. (1995). Las estructuras matemáticas y Nicolás Bourbaki. *Seminario Orotava de historia de la ciencia, año IV,* 55-78.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(3), 289-321.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Klein, F. (1908). *Matemática elemental: Desde un punto de vista superior. Volumen II. Geometría.* Traducción de R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática.

Kuhn T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Traducción de Solís Santos. México: Fondo de Cultura Económica (Breviarios; 213).

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9-24.

Peirce, C. S. (1974). *La ciencia de la semiótica.* Buenos Aires: Nueva Visión.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Francia: Armand Colin.

Santaló, L. (1980). Situación de la enseñanza de la geometría frente a las nuevas tendencias de la educación matemática. *Revista de Bachillerato,* suplemento del n° 13, 23-28.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin et L. Trouche (Eds.). *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil du travail informatique*: un problème didactique *(pp.187-214).*Grenoble: La Pensée Sauvage.