EXPERIENCIA DE ARTICULACIÓN ENTRE ASIGNATURAS DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA

Nora Ferreyra, María Eva Ascheri y Rubén Pizarro
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam Argentina
noraf@exactas.unlpam.edu.ar, mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. La formación inicial de futuros docentes de matemática debiera abordar un trabajo exploratorio y experimental como herramienta esencial para construir el conocimiento matemático y así poder desarrollar prácticas profesionales desde esa perspectiva. En este sentido, en la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), desde las asignaturas Taller de Resolución de Problemas y Cálculo Numérico de la carrera Profesorado en Matemática, se han implementado acciones tendientes a mejorar la articulación vertical, entre ellas, la resolución compartida de distintos problemas. Presentamos una experiencia áulica donde se plantea un problema, se generan fórmulas y se concluye desplegando nuevas técnicas y justificando procedimientos a partir de nuevos conocimientos
Palabras clave: profesorado en matemática, resolución de problemas, cálculo numérico
Abstract. The initial training of future teachers of mathematics requires exploratory and experimental work as an essential tool to build mathematical knowledge and professional practice in order to develop that perspective. In this sense, in the Problem Solving Workshop and Numerical Analysis, courses of Teacher of Mathematics career in National University of La Pampa (Argentina), have implemented actions to improve vertical articulation, including shared solving various problems. We present a classroom experience in which there is a problem, are generated formulas, develop new techniques and procedures are justified from new knowledge
Key words: teachers of mathematics, problem solving, numerical calculus

Introducción

En los últimos años, la enseñanza de la matemática ha puesto el acento en actividades que constituyen situaciones problemáticas cuya resolución requiere investigar, analizar, conjeturar, generalizar, producir explicaciones y validaciones, entre otras tareas específicas.

El Programa Epistemológico señala como objeto de estudio la matemática institucionalizada, la que se enseña y la que se pretende enseñar y propone desarrollar este tipo de actividades para hacer participar al estudiante en la construcción de su propio conocimiento.

En principio, con un trabajo exploratorio que permita reflexionar, establecer conjeturas, desarrollar nuevas técnicas y, posteriormente, en otra etapa de la actividad, con cuestionamientos acerca de la validez de las conclusiones y la necesidad de hallar explicaciones para el funcionamiento de determinados objetos.

La formación inicial de los futuros docentes de matemática debiera abordar un trabajo exploratorio y experimental como herramienta esencial para construir el conocimiento matemático y poder desarrollar sus prácticas profesionales desde esa perspectiva.

Por otra parte, un plan de estudios, conformado por asignaturas que funcionan de manera independiente, con diferentes docentes y con división entre clases teóricas y prácticas, origina cierta desarticulación y atomización del conocimiento que no contribuye a la formación de docentes con actitud de integración e investigación compartida.

La formación de Profesores en Matemática

La sociedad actual plantea un escenario de situaciones educativas cambiantes, las instituciones de enseñanza, en todos los niveles, requieren poder incorporar nuevas prácticas educativas que garanticen la formación de los estudiantes y que atiendan a la igualdad de oportunidades de los jóvenes en el acceso al saber.

El conocimiento matemático resulta esencial para el desarrollo de otras ciencias y la modelización de situaciones problemáticas, por lo cual su enseñanza adquiere también un carácter fundamental. En el ámbito de la Educación Matemática, se ha estudiado la Resolución de Problemas y reconocido su importancia en la construcción del sentido del conocimiento (Charnay, 1988; Bosch y Gascón, 2004).

Particularmente, se han caracterizado diferentes modelos de aprendizaje acorde a las relaciones que se establecen entre los tres polos principales identificados en una clase, es decir entre el docente, el alumno y el saber.

El/la Profesor/a de Matemática como profesional de la enseñanza requiere de una formación que le brinde conocimientos matemáticos tanto para administrar recursos que lo habiliten a resolver problemas y modelizar situaciones provenientes de otras ciencias como para desplegar niveles de formalización propios de la disciplina y ser capaces de abordar la construcción de significados matemáticos en contextos educativos. Desde los espacios de formación didáctica del profesorado se insiste en la importancia de la construcción del sentido en la enseñanza y el aprendizaje, sin embargo, en muchas asignaturas del plan de estudios se presentan los contenidos de manera desarticulada, sin establecer la necesidad o discutir las ventajas de contar con nuevas técnicas que aporten a la resolución del problema.

La formación inicial de grado de los profesores universitarios debiera prever la participación en diversos ámbitos de producción cultural, científica y social, en distintos contextos sociales, de manera que, a partir de una correcta articulación entre teoría y práctica, los graduados puedan impulsar prácticas pedagógicas transformadoras basadas en una sólida formación general, pedagógica y específica.

En este sentido, en la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), desde las asignaturas Taller de Resolución de Problemas y Cálculo Numérico incluidas en el plan de estudios de la carrera Profesorado en Matemática, se han implementado diversas acciones tendientes a mejorar la articulación vertical, entre ellas, la resolución compartida de distintos problemas que comienzan a explorarse en un cuatrimestre, en el cual se obtienen algunos resultados y se generan fórmulas, para concluir la resolución en otro cuatrimestre, desplegando nuevas técnicas y comprometiéndose en la justificación de procedimientos a partir de nuevos conocimientos y revisión de los anteriores.

El Taller de Resolución de Problemas se desarrolla en el segundo año de la carrera Profesorado en Matemática, en él se fomenta el estudio de situaciones particulares, la elaboración de conjeturas y la búsqueda y producción de modelos matemáticos adecuados a determinadas situaciones. En el cuatrimestre siguiente los estudiantes cursan Cálculo Numérico, cuyo principal objetivo es estudiar métodos numéricos para resolver problemas y ponerlos en práctica utilizando la computadora como herramienta de trabajo.

La mayoría de las situaciones planteadas en el transcurso de las asignaturas iniciales de la carrera, se caracterizan por tener, generalmente, una única solución a la cual se arriba a través de la resolución de alguna ecuación o sistema de ecuaciones, por métodos directos y usando la calculadora. La búsqueda de soluciones a partir de buenas aproximaciones está ausente en los primeros años de formación de los estudiantes, y las actividades realizadas parecen indicar que siempre es posible obtener soluciones exactas con métodos algebraicos.

Al momento de iniciar el cursado de la asignatura Cálculo Numérico, pocas veces los estudiantes se han enfrentado con problemas en los que se plantee una necesidad genuina de disponer de ese conocimiento.

Experiencia

Con el doble objetivo de resolver una situación problemática en el ámbito de la geometría por un lado y por el otro, generar en los estudiantes la necesidad de obtener soluciones mediante métodos numéricos utilizando la computadora como herramienta de cálculo, se desarrolló con 10 estudiantes de segundo año de Profesorado en Matemática de la UNLPam la siguiente tarea basada en las propuestas de actividades de Berté (1999).

En la misma, identificamos uno de los modelos presentados por Charnay (1988), denominado "aproximativo" y centrado en la construcción del saber por el alumno. En este modelo el docente propone las distintas situaciones, organiza las etapas en la clase (investigación, formulación, validación, institucionalización), ordena la comunicación y propone elementos convencionales del saber (notación, terminología). El alumno, por su parte, indaga, explora, propone soluciones, las compara con las de sus compañeros, las defiende o las discute.

Consigna N° 1:

Con los papeles disponibles, utilizando tijera y cinta, construir conos, cuya base se ubique en la mesa y sin superponer capas de papel.

La actividad inicial giró en torno al desarrollo plano de un cono, se hicieron conjeturas acerca de la figura a recortar inicialmente, para poder plegar, pegar y finalmente obtener el cuerpo pedido.

En general, los estudiantes intentaron la construcción a partir de un triángulo isósceles y, al ver que no cumplía la condición, "retocaron" la figura inicial y concluyeron en la necesidad de comenzar a partir de un semicírculo o bien de un sector circular.

Se obtuvieron así los primeros conos con distintas características y se discutió acerca de las razones de estas diferencias de tamaño y/o forma.

Se analizó la posibilidad de tener conos con igual base y altura o viceversa y los requisitos para ello.

Puesto que las condiciones iniciales eran muy disímiles como para sacar conclusiones (ver Figura 1), con el fin de estudiar las variables que intervienen en el modelo de llegada, se propuso la siguiente tarea a partir de círculos de cartulina, todos del mismo tamaño, que se pusieron a disposición de los estudiantes.

Figura

Consigna N° 2:

Realizar sólo dos cortes rectos en cada uno de los círculos dados y pegar sin superponer cartulina para obtener conos cuya base se ubique en la mesa.

La variedad de casos particulares presentados permitió avanzar. La idea medular de la situación, se concentra en la necesidad de establecer una relación entre el ángulo central de corte en el plano y el "tamaño" del cono obtenido. En este caso, se profundiza en las características particulares del cuerpo, esto es, altura, radio y superficie de la base, volumen, generatriz, discutiendo las variaciones de unas y otras y las distintas posibilidades (ver Figura 2).

Se plantean, entre otras, las siguientes cuestiones:

- ¿de qué depende la altura del cono?, ¿qué valores máximo y mínimo puede tomar la altura del cono?
- ¿qué altura tendrá el cono si se descarta un corte cuyo ángulo central mide un ángulo recto?
- ¿cuál es el ángulo central del sector circular que se debe cortar para obtener un cono con una determinada altura?
- Si el radio del círculo original es 1, ¿qué volumen se obtiene al cortar un ángulo recto?
- ¿qué volumen se obtiene al cortar un ángulo central dado θ?
- ¿cuál es el ángulo central del sector circular que se debe cortar para obtener un cono de un determinado volumen?

Se discute sobre la posibilidad de obtener, a partir de un solo círculo y un corte, dos conos diferentes, con lo cual, posteriormente derivan otras conjeturas y análisis.

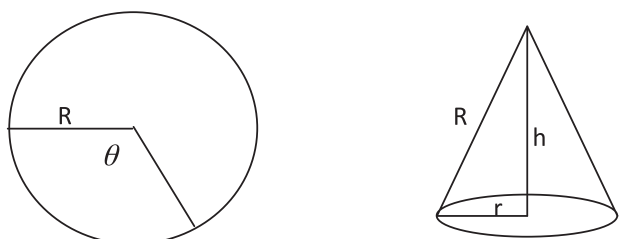


Figura 2

En el desarrollo del trabajo se obtiene, sin demasiadas dificultades, la fórmula que permite calcular el volumen del cono a partir del ángulo de corte, pero no es inmediato calcular el ángulo a partir del volumen.

Algunos plantearon tomando como variable el ángulo cortado y descartado (θ), otros, directamente el ángulo que queda determinado en el desarrollo plano del cono (α), obteniendo de esta manera diferentes fórmulas.

Para calcular el volumen en función de θ o de α, resolvieron $V = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ con *r* radio de la base del cono y *h* su altura.

Según la variable considerada, en la clase se obtuvieron dos expresiones tanto para *r* como para *h*,

$$r = \frac{(2\pi - \theta)\cdot R}{2\pi} \quad \text{y} \quad h = \frac{R\sqrt{(4\pi - \theta)\theta}}{2\pi} \quad \text{o bien} \quad r = \frac{\alpha \cdot R}{2\pi} \quad \text{y} \quad h = \frac{R\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi}$$

respectivamente, con R radio del círculo original.

Posteriormente trabajaron, cada uno con la variable que venía trabajando, en la fórmula para obtener el volumen.

$$V = \frac{R^3\sqrt{(-\theta^6 + 12\pi\theta^5 - 56\pi^2\theta^4 + 128\pi^3\theta^3 - 144\pi^4\theta^2 + 64\pi^5\theta)}}{24\pi^2} \quad \text{(a)}$$

$$V = \frac{R^3\left(4\pi^2\alpha^4 - \alpha^6\right)}{24\pi^2} \quad \text{(b)}$$

A partir de estos resultados los estudiantes pudieron responder muchas de las preguntas formuladas, sin embargo, como hemos dicho, las respuestas a algunas cuestiones se presentan más complejas, por ejemplo, *si el radio R es 15 cm, ¿qué ángulo debo cortar para obtener un volumen de 750cm*^{3}*?*

Con este nuevo interrogante y a partir de las fórmulas (a) y (b) para obtener el volumen, los estudiantes se encuentran ante la imposibilidad de resolver analíticamente las ecuaciones polinómicas de grado 6.

Se convoca a los profesores de Cálculo Numérico para introducir el estudio de métodos de resolución alternativos. Surge así la necesidad de utilizar algún método numérico acorde a la situación problemática planteada y se presenta, a los estudiantes, el software educativo **Secaη** (http://secanu.exactas.unlpam.edu.ar/) elaborado por el grupo de investigación de Cálculo Numérico (Ascheri, Pizarro, Garcia, Astudillo y Culla, 2012).

Considerando la fórmula (a) y realizando las operaciones necesarias obtenemos la siguiente expresión, considerando que $V=750$.

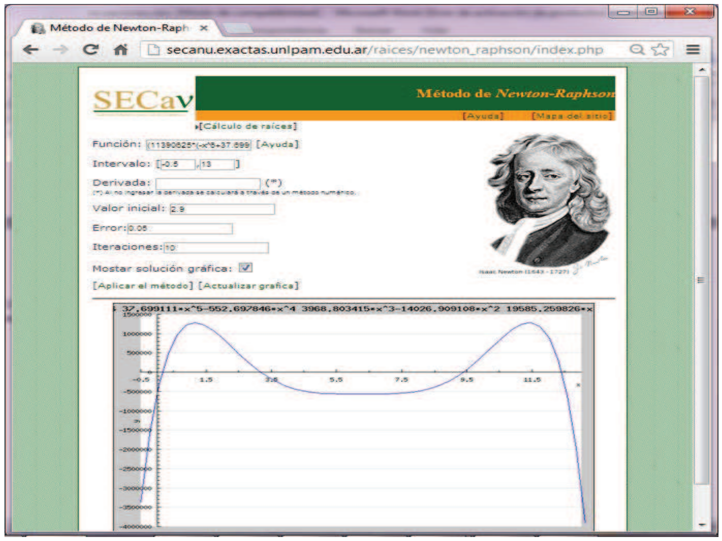
$$750 = \sqrt{\frac{R^6(-\theta^6 + 12\pi\theta^5 - 56\pi^2\theta^4 + 128\pi^3\theta^3 - 144\pi^4\theta^2 + 64\pi^5\theta)}{576\pi^4}}$$

Dado que el software realiza cálculos con valores Reales y no con Complejos, en lugar de calcular las raíces de V calcularemos las raíces de V^2. Remplazando R por 15cm y realizando los cálculos obtenemos la siguiente expresión:

$$750^2 = \frac{11390625(-x^6 + 37.699111x^5 - 552.697846x^4 + 3968.803415x^3 - 14026.909108x^2 + 19585.259826x)}{576\pi^4}$$

0= *(11390625*(-x^6+37.699111*x^5-552.697846*x^4+3968.803415*x^3-14026.909108*x^2 + 19585.259826 * x))/(56107.6364)-562500*

Utilizando el software en Cálculo Numérico, y específicamente el método de Newton Raphson, se obtiene una primera aproximación de la gráfica de la función que se muestra en la Figura 3.



Figura

A partir de esta gráfica obtenemos que las raíces de la función están próximas a 0, 3, 9 y 12. Tomando luego estos valores como valores iniciales y aplicando el método de Newton Raphson se obtienen las siguientes raíces con un error menor a 0.0001 (ver Tabla 1)

Valor inicial	Raíz aproximada	Cantidad de iteraciones
0	0.158721	4
3	3.179059	3
9	9.387330	4
12	12.407633	5

Tabla 1

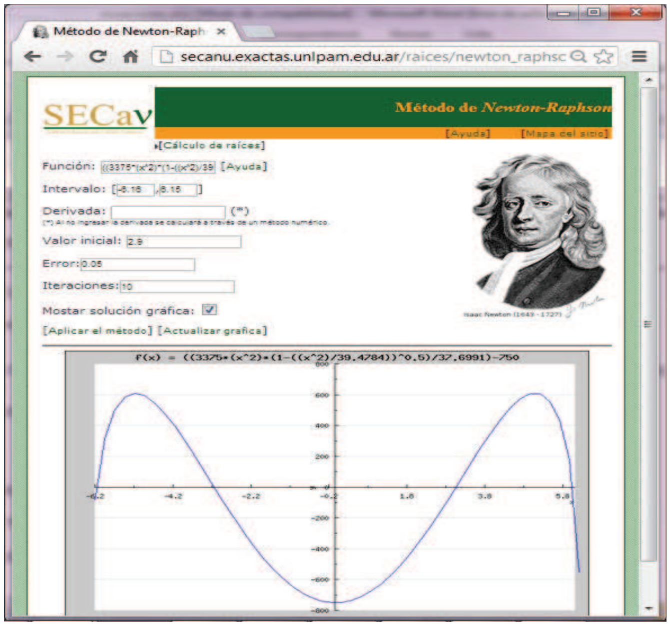
Trabajando ahora con la fórmula (b) se obtiene la siguiente ecuación,

$$V = \frac{R^3\alpha^2\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4\pi^2}}}{12\pi} \rightarrow V = \frac{3375x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{39.4784}}}{37.6991} \rightarrow$$

V= (3375(x^2)*(1-((x^2) / 39.4784))^0.5)/37.6991* →

0 = ((3375(x^2)*(1-((x^2)/39.4784))^0.5)/37.6991) - 750*

que nuevamente resolveremos utilizando el software de Cálculo Numérico, y específicamente el método de Newton Raphson, se obtiene una primera aproximación de la gráfica de la función que se muestra en la Figura 4.



Figura

A partir de esta gráfica, descartando los valores negativos, se obtiene que las raíces de la función están próximas a 3 y 6. Tomando luego estos valores como valores iniciales y aplicando el método de Newton Raphson se obtienen las siguientes raíces con un error menor a 0.0001 (ver Tabla 2).

Valor inicial	Raíz aproximada	Cantidad de iteraciones
3	3.104124	3
6	6.124462	4

Tabla 2

Luego de analizar los resultados obtenidos a partir del uso del software, con las oportunas explicaciones de los responsables de la asignatura Cálculo Numérico, los estudiantes pudieron comparar soluciones y reinterpretar los resultados en el contexto del problema original.

Conclusiones

En nuestra opinión, la combinación de elementos de Cálculo Numérico con los tradicionales utilizados en Taller I, es una buena alternativa para introducir a los estudiantes en el estudio de los métodos numéricos con el uso de la computadora. El hecho de disponer de los contenidos temáticos desarrollados en Taller I, a través de las presentaciones usuales, en combinación con el uso de métodos numéricos y la computadora como herramienta de cálculo, provocó en los estudiantes un mayor compromiso con el trabajo investigativo, se logró una mayor participación y mejor asimilación de los contenidos curriculares involucrados.

Al concluir la experiencia los participantes valoraron positivamente la posibilidad de trabajar, cada uno, a partir de sus propios razonamientos y discutir, en grupo, el sentido de los resultados hallados. También mencionaron la importancia de adquirir un conocimiento en el momento en que surge la necesidad de disponer de él, con lo cual, creemos haber aportado elementos a su formación pedagógica. Finalmente, consideramos que la mejora en el proceso de construcción del conocimiento no depende de la utilización de métodos numéricos y la computadora, sino de su adecuada integración curricular, es decir, del entorno educativo diseñado conjuntamente por los docentes de ambos espacios.

Referencias bibliográficas

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A. (2008). *Cálculo Numérico*. Santa Rosa: EdUNLPam.

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A., García, P., Astudillo, G. J. y Culla, M. E. (2012). Software educativo Secaη. Disponible en: http://secanu.exactas.unlpam.edu.ar/ http://es.wikipedia.org/wiki/Software_matem%C3%A1tico

Berté, A. (1999). *Matemática de EGB 3 al Polimodal*. Buenos Aires: A-Z Editora.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm.

Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra y Saiz (comps), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-63). Buenos Aires: Paidós.