Visión Estudiantil de la Recta y Continuidad

Carlos García y Martha Alvarado
Instituto Tecnológico de Puebla
México
cgfranchini@yahoo.com, maraare@yahoo.com
Educación a Distancia – Nivel Superior

Resumen

Dentro del curso de *Cálculo Diferencial e Int*egral del nivel superior, correspondiente a Matemáticas I de Ingeniería y Matemáticas II de la carrera de Informática, se presenta en la primera unidad el estudio de los Números Reales. El objetivo de esta unidad, es comprender las propiedades axiomáticas de los números reales, para que desde ellas se pueda formalizar el estudio del cálculo. El presente estudio pretende estudiar como el estudiante "ve" a la recta, en el momento en que se axiomatiza a los números reales y se discute la "superdensidad de los reales". El problema específico es: "*determinar si las acciones didácticas con que pretendemos explicar la continuidad de los reales y su superdensidad implican la comprensión de estas mismas propiedades en la recta*".

Introducción y planteamiento del problema

Entender la naturaleza del *Límite* implica comprender cada uno de los elementos de la expresión:

$$\underset{x \to a}{lím} f(x) = L$$

Sí bien, no se está hablando de la definición estrictamente formal de límite, si no de la comprensión de los elementos que la componen, resulta que el primer elemento (supuestamente) ajeno a las estructuras cognitivas del estudiante –hasta ese momento– es la expresión $x \to a$; sin embargo, dicha expresión es traducida en los textos "tan cerca como se quiera", "aproximándose a '*a*' pero sin tocarla", etc.

Esta expresión $x \to a$ resulta ser la primera operación "dinámica" que se encuentra dentro de las matemáticas, ya que las expresiones estudiadas hasta ese momento –por el alumno– esencialmente son manipulaciones algebraicas, desde luego, la experiencia muestra que tal expresión "parece ser comprendida" y que implica poder recorrer a los números reales –es decir, la recta numérica– sin ningún tipo de restricción.

De esta manera el problema específico que se pretende abordar es: "*determinar si las acciones didácticas con que pretendemos explicar la conti
nuidad de los reales y su superdensidad implican la comprensión de estas mismas propiedades en la recta*".

Objetivo

El concepto de derivada e integral depende del concepto de infinitesimal, y el infinitesimal es visto a la manera de Cauchy (citado en Edwards, 1937) como un "*infiniment petit*", ya que implican que una cantidad $\varepsilon \to 0$, pero en el terreno de la discusión nos centramos a decir que "nunca es cero". Esto implica una dificultad al realizar cocientes en los cuales dicho infinitesimal divide a otra cantidad ¿pero como podemos estar seguros que $\varepsilon \rightarrow 0$ nunca toca al cero? Si este concepto se comprende habrá de ser más sencillo discutir en el resto del curso los elementos básicos del curso de Cálculo, como son el de: límite, recta tangente a un punto, continuidad de funciones en un punto, teorema del valor intermedio, teorema de Rolle, derivada, integral, puntos críticos en una función, entre otros.

De esto se desprende que el objetivo específico de esta investigación es responder a la pregunta: ***¿Es la actividad didáctica empleada en el curso de Cálculo Diferencial e Integral, efectiva para lograr que el estudiante comprenda el concepto de continuidad y superdensidad de la recta?***

Hipótesis

El supuesto básico que mueve esta investigación, se asocia a la creencia de que los estudiantes en esta etapa de su currículo, ya cuentan con un modelo de recta que responde a las propiedades de continuidad y superdensidad. De tal forma que dentro del curso de cálculo se parte de este supuesto y sobre él se centra toda la construcción de los procesos formales de esta rama de las Matemáticas.

De estos hechos observados desprendemos nuestra hipótesis de trabajo: *"La actividad didáctica de un curso tradicional de Cálculo Diferencial e Integral,* ***no logra*** *que el estudiante comprenda el concepto de densidad de la recta numérica".*

Es importante aclarar que en este trabajo entendemos como "*la actividad didáctica de un curso tradicional*", al contenido y las sugerencias didácticas que se establecen en los programas oficiales de Matemáticas del SNIT (Sistema Nacional de Institutos Tecnológicos), por lo que el presente trabajo se circunscribe exclusivamente a este contexto.

Marco de Referencia

El marco de referencia se da desde dos ópticas: el de la óptica matemática y el de la didáctica y las teorías del aprendizaje. Según las Matemáticas: el concepto de continuidad fue en la antigüedad más asociado al de contigüidad, y fue Bolzano el que dio una primera precisa definición de continuidad (citado en Edwards, C. H., 1937), cuando probó analíticamente la propuesta a su teorema, hoy denominado teorema de Bolzano, sobre los signos opuestos de los valores funcionales alrededor de una raíz de una función. Más tarde Cauchy, Dedekind, Cantor y Riemman a finales de siglo XIX establecieron las construcciones formales del cálculo centradas en la definición de continuidad que prácticamente hoy empleamos, pero que comenzaron con los procesos definidos por Eudoxus, estudiante de Platón, 300 años antes de cristo, quien formalizó el método de "exhausión" para el cálculo de áreas. Si bien fue Dedekind, por medio de sus cortaduras quien estableció definitivamente la continuidad de los reales y por tanto la existencia de los números irracionales, que llenaron los huecos dejados por los racionales, finalmente cerró el ciclo de la gran formalización que le dio al Cálculo, Leonhard Euler a finales del siglo XVIII. Esta parte de la historia de las Matemáticas, muestra el tiempo que tardó la humanidad para poder establecer una característica esencial de los números que desencadena la formalización del Cálculo, fortalecida ya en el siglo pasado por Henry Lebesgue y Abraham Robinson, quienes finalmente le dieron cohesión y sustento a muchas de las técnicas con infinitesimales empleadas durante los siglos XVII y XVIII. Por tanto, desde el punto de vista de diversos teóricos de la matemática educativa, si la formalización de la continuidad llevó tanto tiempo y grandes discusiones, entonces tal concepto presenta dificultades epistemológicas que cada estudioso habrá de resolver en su propia historia de aprendizaje.

Por otro lado, para establecer las estrategias didácticas se considera el paradigma cognitivista, desde donde según Piaget (Ginsburg y Opper,1977) los estudiantes de este nivel de la educación se encuentran en la etapa de las operaciones formales, por lo que en esta etapa se está en capacidad de abstraer y realizar las más complejas actividades de razonamiento. Adicionalmente, Ausubel (Ausubel, Novak y Hanessian, 1983) mediante el enfoque constructivista de las teorías cognitivas, establece que para lograr la interiorización satisfactoria de los conceptos, el aprendizaje debe ser significativo y con ello, se modificarán las estructuras cognitivas, dando cabida a la construcción y asimilación de nuevos conceptos, siempre que los cambios en las estructuras cognitivas se fundamenten en un adecuado empleo de lo que el estudiante ya sabe, por lo que de acuerdo a sus conceptos, se deben presentar situaciones que permitan abstraer la citada propiedad bajo estudio y que esencialmente dependerá de los conceptos que el estudiante ya ha interiorizado previamente. Paralelamente se emplean los aspectos citados por Lev S. Vygotsky (Schunk, 1997) en su teoría sociocultural, en la que establece que el cambio cognitivo es el resultado de emplear los instrumentos culturales y las interrelaciones sociales y de internalizarlas y transformarlas mentalmente, su postura es de un constructivismo dialéctico porque recalca la interacción de los individuos y su entorno, uno de sus conceptos que más impacta en las acciones educativas es el de la Zona de Desarrollo Próximo, misma que Onrubia (Coll y col., 1993) estudia como intervenir en ella y propiciar el aprendizaje significativo, por eso en las actividades desarrolladas dentro del curso se espera que los estudiantes socialicen sus ideas para que de manera individual y grupal se internalicen los conceptos.

Metodología

El estudio realizado corresponde a una *investigación cualitativa de alcance exploratorio* con una población bajo estudio compuesta de 40 estudiantes de ingeniería y 22 de informática integrantes de dos grupos que cursan su correspondiente asignatura de Matemáticas I y Matemáticas II, dentro del Instituto Tecnológico de Puebla. Para generar la información que requiere la investigación se emplea el material del "Concepto 1: Números Reales" de "Un libro de Cálculo Diferencial e Integral para su empleo en las carreras del SNIT por medio de Internet" (Alvarado, M. ,2002). Este material está disponible en Internet (http://www.itpuebla.edu.mx) y de manera complementaria se les entrega a los estudiantes en un CD. El momento didáctico en que se presenta el tema de continuidad de la recta como modelo equivalente al conjunto de los números reales, está ubicada en la unidad I del curso de Matemáticas, aunque no señalado específicamente como tema "la recta numérica", por lo que previamente a este concepto únicamente se ha dado la introducción al curso y los axiomas de los reales, dentro de los cuales se discute brevemente sobre las características globales de los números reales como conjunto y se habla de su densidad y del problema, ya citado, de encontrar el mínimo en el intervalo abierto (a,b).

Paralelamente a las sesiones presenciales del curso, dentro del libro de Cálculo, el estudiante ya ha resuelto las acciones del "Concepto cero: Introducción" (Alvarado M., 2002) y en el "Concepto 1: Números Reales" la focalización se presenta en la sección 3 que específicamente presenta el siguiente texto en las acciones 1.3.1 y 1.3.2 cuyos contenidos, base de esta investigación, son los siguientes:

Números Reales	***Acción 1.3.1***

Imagina la recta numérica y adicionalmente un lente de aumento muy poderoso enfocado a la recta, ¿qué verías?

- ¿A los puntos amarrados uno a uno como cuentas en un rosario?
- ¿Puntos acomodados como piedras para pasar un arroyo?
- ¿Bolitas muy apretaditas unas junto a otras?
- ¿Lo mismo que sin el lente?

Enfoca con más aumento lo que estás viendo e imagina un pequeñísimo insecto –del tamaño de un punto– caminado sobre la recta, que ves ahora:

- El insecto salta de punto en punto cuidando de no pisar entre los huecos.
- El insecto camina despreocupado, y pide que hasta le cubras los millones de ojos que tiene ya que está seguro que donde pise habrá un punto.
- No veo al insecto, creo que ya se cayó. –no sea payaso, esta opción no es válida–

¿Cuantos puntos tiene un segmento de recta de 1 cm de largo? ¿y de un metro de largo? ...¿y de 1 kilómetro? Puedes probar tu afirmación.

Ahora observa a tu alrededor y podrás identificar algunos segmentos de recta en las cosas materiales. Si la materia se compone de átomos, ¿la recta tiene átomos? ... la materia sí tiene huecos entre los átomos y ¿la recta?

Comparte tus apreciaciones con tus compañeros y con tu facilitador de ser necesario.

Números Reales	***Acción 1.3.2***

Los números enteros poseen la cualidad de que cada uno tiene un antecedente y un consecuente, es decir un número único que está *justamente* antes y otro que está *justamente* después (porque hay infinitos antes e infinitos después de cada número ¿o no?), es fácil encontrarlos porque su diferencia es uno, esto es: para el número **n**, su antecedente es ***n-1*** y su consecuente es ***n+1***.

Ahora si tomo la recta de los reales y me fijo en el 1 ¿cuál es su siguiente número? o ¿el anterior? No lo puedo encontrar ya que si supongo que lo encontré se puede representar por $1+\delta$, pero automáticamente $1+\delta/2$ está más cerca del uno y el número no puede ser el que dije. ¡Luego los números reales no tienen antecedente ni consecuente! Están tan "pegaditos que se confunden".

Ahora si tomo un pedacito de la recta, digamos el que está entre 1 y 5, se debe de tomar la decisión:

¿me llevo al 1 o no? ¿me llevo al 5 o no?
Si identifico el pedacito que tomé por sus extremos y además, con un paréntesis cuadrado "si me lo llevo" y con paréntesis circular si "no me lo llevo", se pueden generar 4 casos:

a. (1,5) b. (1,5] c. [1,5) d. [1,5]

¿Cuáles casos tiene elemento menor? y ¿cuáles elemento mayor? Explica porqué.
Ahora:

- Si tu tienes (2,7] y regalas (3,5) ¿con que te quedas?
- Si tienes (-1,1) y (3,10]; pero te regalan [0,11), ¿qué tienes ahora?
- ¿qué quiere decir [1,1]?
- Es cierto que [5,5) es una barbaridad, ¿porqué?

Cuando tomas de la recta todo lo que queda a un lado se emplea el símbolo ∞ para identificar el lado derecho de la recta que no termina o bien -∞ si es a la izquierda. Por lo que toda la recta será (-∞,∞).
Con esta notación que quiere decir:

- [5, ∞)
- (-∞,67)

Muchos dicen que esto tiene un error tú que opinas y porqué:

- [-2, ∞]
- [2,-4)
- [-∞,5)
- (5,- ∞)
- (8,2)

Ahora imagínate un insecto del tamaño de un punto y le pides que –con los miles de ojos que tiene vendados– camine a ciegas sobre los pedazos de recta de tu propiedad definidos por [2,5) y (5,7). Lo pones sobre el 2, lo orientas hacia el 7, y tú lo esperas con los brazos abiertos en el 7. ¿Legará o no llegará?

Comparte tus apreciaciones con tus compañeros y con tu facilitador de ser necesario.

Fin de Acción 1.3.2

Con estos elementos se establece la siguiente metodología:

1. Se realiza la sesión presencial sobre Axiomas de los reales, que corresponde a las secciones 1 y 2 del Libro virtual. Dentro de estas sesiones se discute la continuidad de los reales.
2. Se asocia el modelo de los números reales con la recta y se discute el traslado de las propiedades axiomáticas a la naturaleza geométrica de la recta. Ya que un curso tradicional así lo espera, en este punto no se hace un refuerzo sobre la superdensidad de los reales, únicamente sobre su continuidad y con estos elementos se pide responder a las acciones 1.3.1 y 1.3.2 aquí citadas.
3. La información de los ensayos sobre las acciones 1.3.1 y 1.3.2 se reciben por internet.
4. La información recibida de los alumnos de analiza y se concluye.

Resultados

Los resultados a las dos acciones representaron una diversidad no esperada, potenciando la libre expresión, en lo general se esperaba que los resultados únicamente marcaran que opción les parecía más adecuada a la que ellos creían.

- Respecto de la *Acción 1.3.1* se obtuvieron los siguientes resultados:
  a) ¿A los puntos amarrados uno a uno como cuentas en un rosario?
  b) ¿Puntos acomodados como piedras para pasar un arroyo?
  c) ¿Bolitas muy apretaditas unas junto a otras?
  d) ¿Lo mismo que sin el lente?

De 62 estudiantes: Sólo 9 respondieron (d) que sería la respuesta esperada. 15 respondieron (a), (b) y (c) simultáneamente, 4 dijeron que todas son válidas, 12 respondieron (a) y (c) son validas y 32 respondieron (c).

- A la siguiente pregunta, se tuvo la siguiente respuesta:
  a) El insecto salta de punto en punto cuidando de no pisar entre los huecos.
  b) El insecto camina despreocupado, y pide que hasta le cubras los millones de ojos que tiene ya que está seguro que donde pise habrá un punto.
  c) No veo al insecto, creo que ya se cayó. –no sea payaso, esta opción no es válida–

De 62 estudiantes: 49 respondieron (a), y solamente 13 (b), algunos hicieron comentarios divertidos sobre (c).

- A la pregunta:

¿Cuantos puntos tiene un segmento de recta de 1 cm de largo? ¿y de un metro de largo? ...¿y de 1 kilómetro?
15 respondieron que infinitos puntos, el resto supuso que eran diferentes dependiendo de la longitud o de que tan grandes fueran los puntos.

- A la pregunta:

Si la materia se compone de átomos, ¿la recta tiene átomos? ... la materia sí tiene huecos entre los átomos y ¿la recta?
23 respondieron que depende de donde se dibuje la recta, 5 afirmaron que sí tiene átomos y finalmente 34 dijeron que no porque es "ideal".

- Respecto de la Acción 1.3.2 la última pregunta:

"Ahora imagínate un insecto del tamaño de un punto y le pides que –con los miles de ojos que tiene vendados– camine a ciegas sobre los pedazos de recta de tu propiedad definidos por [2,5) y (5,7). Lo pones sobre el 2, lo orientas hacia el 7, y tú lo esperas con los brazos abiertos en el 7. ¿Legará o no llegará?"

La respuesta fue no llegará en el 100% de los casos.

Conclusiones y Recomendaciones

En cuanto al tipo de respuestas no hubo diferencia entre los estudiantes del área de Ingeniería e Informática, la proporción de los tipos de respuesta fue aproximadamente la misma, este resultado no se pretendía averiguar. De igual forma la presentación de los reportes es más colorido y más creativo en cuanto a los estudiantes de informática, lo que muestra más experiencia en el uso de la computadora, adicionalmente su lenguaje es más ingenuo. Respecto de la pregunta de investigación se encontró solamente que 9 de 62, respondieron a lo esperado, lo cual representa una proporción muy baja, la visión estudiantil de la recta se asocia más a "bolitas muy pegaditas unas a otras" lo que permite inferir una conceptualización material de "punto". Adicionalmente muchas de sus respuestas son contradictorias, ya que se comenta "que los puntos son de diferentes tamaños" ó "ya que el espacio entre los puntos se llena por otros más *pequeñitos*"; y definitivamente a la pregunta fundamental sobre la cantidad de puntos en un segmento solamente 15 concluyeron que son infinitos. Resulta interesante la concepción inmaterial de la recta, a la cual respondieron 34 sobre el ideal que representa y el resto lo asoció al dibujo y por tanto a la materia. Sin embargo, la respuesta generalizada a la última pregunta de la acción 1.3.2, muestra que el concepto de continuidad en un punto si es interiorizado, por lo que consideramos que el concepto de continuidad resulta ser independiente del concepto de recta y que por tanto, al estar más definido su preconcepto, se debe de emplear como andamiaje para soportar los conceptos más importantes del cálculo.

Referencias Bibliográficas

Alvarado, A. M. y González, M. E. (2002). *Un libro electrónico de Cálculo Diferencial e Integral para su empleo en las carreras del SNIT por medio de Internet*. Tesis de maestría no publicada, CIIDET, México.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* (2a. ed.). Mexico: Trillas.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. y Zabala, A. (1993). *El constructivismo en el aula.* (1a. ed.) España: Graó.

Edwards, C.H., Jr. (1979). *The historical development of the Calculus*. USA: Springer-Verlag. (Trabajo original publicado en 1937)

García, A.L. (2001). *La educación a distancia – De la teoría a la práctica.* España: Ariel Educación.

Ginsburg, H. y Opper, S. (1977). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual.* México: Prentice- Hall Internacional.

Good, L. y Brophy, J. (1996). *Psicología educativa contemporánea.* (5a. ed.). México: McGraw-Hill/Interamericana editores.

Pérez, M. y López, E. (2000). *Aprendizaje y currículo. Diseños curriculares aplicados.* Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Schunk, D.H. (1997). *Teorías del Aprendizaje.* (2a. ed.) México: Prentice-Hall Hispanoamericana.