

# Determinación de Raíces de Ecuaciones utilizando la Calculadora Gráfica como Medio de Enseñanza y Aprendizaje

Esther Ansola y Eugenio Carlos

Instituto Superior Politécnico "José A. Echeverría"

Cuba

e\_hazday@yahoo.com, ecarlos48@yahoo.com

Tecnología avanzada – Nivel Superior

## Resumen

Obtener las raíces de una ecuación algebraica de primero, segundo y tercer grado es un problema muy simple que se resuelve utilizando fórmulas o descomposición en factores; para algunos casos de funciones polinómicas de mayor grado el problema puede resolverse todavía utilizando el método de Ruffini. Para funciones de este tipo con potencias mucho mayores de la variable y para funciones no algebraicas el problema se hace prácticamente imposible de resolver por método analíticos. El uso de la calculadora gráfica contribuye a dar solución a los problemas anteriores haciendo uso de técnicas numéricas, lo que permite establecer un adecuado control por operaciones en las primeras etapas del proceso de asimilación de los conocimientos como reclaman las modernas teorías de enseñanza (Talízina, 1988).

## Introducción

La Matemática Numérica constituye la rama de las Matemáticas donde más ha impactado el desarrollo impetuoso de la tecnología en los últimos años. Obviando experiencias anteriores, sólo el análisis de las experiencias en los métodos de enseñanza de la Matemática Numérica, desde el uso de las calculadoras electrónicas más elementales, hasta el uso actual de modernas computadoras, potentes softwares profesionales y calculadoras gráficas, nos muestra cómo el docente que enseña esta materia ha sido también impactado y cómo ha tenido que asimilar las nuevas tecnologías, evolucionando él mismo y sus métodos de enseñanza. En el presente trabajo se muestra una experiencia metodológica en el cual la calculadora gráfica CASIO ALGEBRA FX 2.0 no fue utilizada como un simple instrumento de cálculo sino como un recurso didáctico, sirviendo como un medio de enseñanza y aprendizaje.

Se utilizaron las potencialidades gráficas de la calculadora para la separación de las raíces de una ecuación por el método gráfico así como las posibilidades de programar dichos métodos utilizando las instrucciones que para estos fines están definidas en la misma. Las calculadoras gráficas posibilitan combinar su uso con otros medios permitiendo a los profesores mostrar al auditorio los resultados que se van obteniendo en la calculadora, y así poder trabajar conjuntamente con los estudiantes y establecer un adecuado control por operaciones en las primeras etapas del proceso de asimilación de los conocimientos como reclaman las modernas teorías de enseñanza (Talízina, 1988), restricción fuerte cuando se trata de organizar el proceso de enseñanza bajo las condiciones tradicionales y el trabajo con lápiz y papel (Delgado, 1998).

### La separación de las raíces.

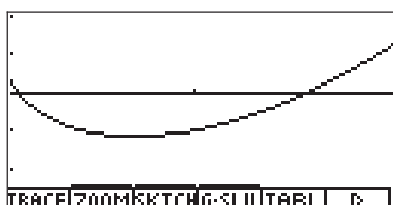
Aunque existen métodos analíticos para separar las raíces de ecuaciones polinómicas, en el caso de tener ecuaciones con funciones trascendentes el único método posible es la separación gráfica de las raíces. La calculadora gráfica es una herramienta de gran utilidad para estos casos. Veámoslo a través del siguiente ejemplo.

Separar raíces de la ecuación:  $x^2 - \ln x - 2 = 0$

La separación gráfica de las raíces de una ecuación  $f(x)=0$  consiste en dibujar la gráfica de la función  $f(x)$  y determinar los intervalos donde se encuentran cada uno de los interceptos de la gráfica con el eje de las  $x$ .

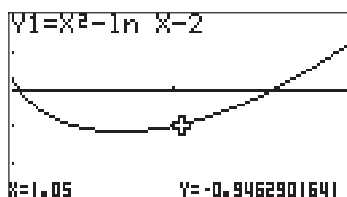
En el menú principal de la calculadora vamos a la ventana GRPH-TBL y presionamos F3 (TYPE)

para seleccionar  $y =$ , escribiendo la función  $x^2 - \ln x - 2$ . Para una mejor visualización de la gráfica vamos a v-window y definimos  $x_{min}=0.1$ ,  $x_{max}=2$ ,  $y_{min}=-3$  y  $y_{max}=2$ . Presionando F5 (DRAW) se obtiene la gráfica deseada, donde se observa que la ecuación tiene dos raíces.

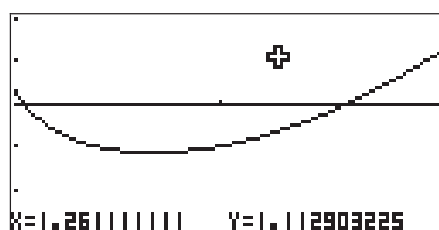
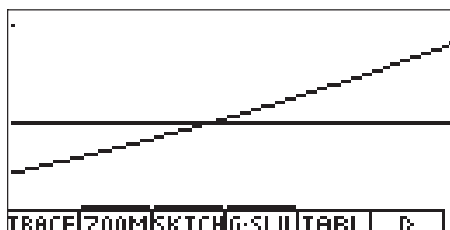


Para determinar los intervalos en que se encuentran cada una de las raíces, existen dos opciones:

1. Presionando F1 (TRACE) es posible mover el cursor sobre la gráfica, observando la variación de la abscisa y la ordenada.



2. Presionando F2 (ZOOM) podemos acercarnos a cada intercepto de diferentes formas, una variante adecuada es seleccionar BOX y mover el cursor para seleccionar un intervalo adecuado o hacer el zoom seleccionado y tomar los valores  $x_{min}$  y  $x_{max}$  de la ventana v-window.



Se obtiene para la menor raíz el intervalo [0.1, 0.281] y para la mayor [1.537, 1.588]. Se observa que los intervalos se pueden tomar tan pequeño como se desee.

### La determinación de las raíces. Método de bisección.

Mostraremos solamente el método de Bisección por ser el más sencillo. Conocido el método desde el punto de vista teórico, su interpretación geométrica y el cálculo del error cometido, se procede a mostrar un programa para la calculadora, que permite observar los resultados que se obtienen para la raíz aproximada y el error cometido, en cada iteración, para una ecuación del tipo  $f(x)=0$ , en un intervalo  $[a, b]$  dado. Seleccionando la ventana PRGM en el menú principal y oprimiendo F3 (NEW) se introduce el nombre del programa y luego, cada instrucción del programa.

En el programa BISEC1 no se introduce como dato un valor para la tolerancia del error, en su lugar el criterio de parada se puede escoger arbitrariamente. Por ejemplo si se desea calcular el valor aproximado de la menor de las raíces de la ecuación  $x^2 - \ln x - 2 = 0$  en el intervalo [0.1, 0.281] con 3 cifras decimales exactas, o sea con un error absoluto máximo de  $0.5 \times 10^{-3}$ , este valor se obtiene en la iteración 9, con un error de  $0,353515625 \times 10^{-3}$ .

```

FUNCION?
X2-ln X-2
A?
0.1
B?
0.281
    
```

```

RAIZ APROXIMADA
      0.1378261719
ERROR
      3.53515625E-04
ITERACIONES
                        9
- DISP -
    
```

La calculadora permite utilizar también lazos de programación, mediante las instrucciones For, Do y While. El programa BISEC2 utiliza el método de Bisección para determinar las raíces de una ecuación del tipo  $f(x)=0$ , conociendo la función, el intervalo  $[a,b]$  y una cota de error, dando como resultado el valor aproximado de la raíz, el error cometido y el número de iteraciones, utilizando la instrucción While-While End.

```

X2-ln X-2
A?
0.1
B?
0.281
COTA DEL ERROR?
0.0005
    
```

```

RAIZ APROXIMADA
      0.1378261719
ERROR
      3.53515625E-04
ITERACIONES
                        9
                        Done
    
```

Los dos programas, BISEC1 y BISEC2, se muestran a continuación:

#### Programa Bisec1

“FUNCION”? → Y1 ↵

```

0 → I ↓
“A”? → A ↓
“B”? → ©B ↓
Llb 0 ∧
0.5 (A+B) → M ↓
0.5 (B-A) → E ↓
M → X ↓
Y1 → F ↓
If F=0 ↓
Then I+1 → I ∧
“RAIZ EXACTA”: M ↯
“ITERACIONES”: I ↯
Goto 1 ↓
Else A → X ↓
Y1 → C ↓
If (C*F) < 0 ↓
Then M → B ↓
Else M → A ↓
IfEnd ↓
IfEnd ↓
I+1 © I ∧
“RAIZ APROXIMADA”: M ↯
“ERROR”: E ↯
“ITERACIONES”: I ↯
Goto 0
Lbl 1 ↓
    
```

### Programa Bisec2

```

“FUNCION”? → Y1 ↓
0 → I ↓
“A”? → A ↓
“B”? → B ↓
“COTA DEL ERROR”? → T ↓
1 → E ↓
While E > T •
0.5 (A+B) → M ↓
0.5 (B-A) → E ↓
M → X ↓
Y1 → F ↓
If F=0 ↓
Then I+1 → I ∧
“RAIZ EXACTA”: M ↯
“ITERACIONES”: I ↯
Goto 1 ↓
Else A → X ↓
Y1 → C ↓
If (C*F) < 0 ↓
Then M → B ↓
Else M → A ↓
IfEnd ↓
IfEnd ↓
I+1 © I ∧
WhileEnd ∧
“RAIZ APROXIMADA”: M ↯
“ERROR”: E ↯
“ITERACIONES”: I ↯
Lbl 1 ∧
    
```

### Conclusiones:

Las posibilidades gráficas de la calculadora constituyen una valiosa herramienta para mostrar el método gráfico de separación de raíces de una ecuación del tipo  $f(x)=0$ , mientras que las posibilidades de programación permiten desarrollar programas, que en el aprendizaje de algoritmos numéricos resultan ser una herramienta de un valor incalculable, puesto que contribuyen al desarrollo del pensamiento algorítmico del estudiante, al mismo tiempo que facilitan el aprendizaje del algoritmo numérico.

La calculadora se utiliza en este caso como un recurso didáctico, como medio de enseñanza-aprendizaje, no como una simple herramienta de cálculo.

El impacto tecnológico en los ámbitos educativos es un hecho irreversible y caracterizará el quehacer pedagógico en un futuro cercano, planteando retos a los docentes, a los investigadores en Educación Matemática y a toda la estructura de dirección que toma las decisiones en cuanto a la introducción de equipos y softwares en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Los ritmos de desarrollo y la presencia en toda la vida humana de los recursos informáticos obligan a las instituciones a tenerlos en cuenta y tener que transformar la propia concepción educacional (Delgado, 1998).

### **Referencias Bibliográficas**

- Álvarez, M., Gómez, A., Guerra, A. y Laura, R. (1998). *Matemática Numérica*. Cuba: Editorial Félix Varela.
- Castro, A. (2001). Incorporación de tecnología en la enseñanza de la Matemática”.Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 14. Grupo Editorial Iberoamérica, (pp. 277)
- Delgado, R (1998). *La enseñanza de la Matemática en el umbral del Siglo XXI*. Argentina: Homo Sapiens Ediciones.
- Pérez, O. (en prensa). *El arte de enseñar las Ciencias Básicas Matemáticas Manual de trabajo*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Preiss, R. (2002). *Modelos del Cálculo Diferencial. Programación y Proyectos con Calculadora CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS*. Santiago de Chile: Colección Textos de Docencia Universitaria, Universidad Diego Portales.
- Rodríguez, F. (2002). Tecnología y visualización en los procesos recursivos. Revista *C+1*, CASIO Académico. México.
- Talízina, N. (1988). *Sicología de la Enseñanza*. URSS: Editorial Progreso.