

CONCEPCIONES DEL SENO Y COSENO PUESTAS DE MANIFIESTO POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Conceptions about sine and cosine as expressed by non-compulsory secondary school students

Enrique Martín-Fernández, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo identificamos e interpretamos las concepciones sobre las nociones del seno y coseno de un ángulo que expresan un grupo de estudiantes de Bachillerato cuando se les pide una explicación verbal. Las representaciones son fundamentales en la comprensión de la matemática cuyo objeto de estudio son ideas y conceptos. Por ello, para establecer las concepciones de estos estudiantes, les requerimos la verbalización del seno y del coseno de un ángulo, entre otros modos de representación. El análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre las distintas categorías. Además, mediante un estudio comparativo indagamos la complejidad relativa de la noción de seno respecto de la noción de coseno. Consideramos que la escasez de investigaciones relacionadas con el significado de las nociones de seno y coseno aporta un interés añadido al estudio.

Palabras clave: trigonometría, nociones de seno y de coseno, representaciones verbales, concepciones de los estudiantes de bachillerato.

Abstract

In this work we identify and interpret the ideas of the notions sine and cosine as expressed by a group of high school students when asked about them in two questionnaires. The representations are basic in the understanding of mathematics, given that their subjects of study are constructions of the mind. Thus, in order to establish the conceptions of these students, we require verbal representations of sine and cosine of an angle among other ways of representations used by non-compulsory secondary school students. The analysis has provided a categorization of responses, and relationships among the outputs of participants have emerged. Besides, by means of a quantitative analysis we study the higher or lower complexity of the notion sine with respect to cosine. We are interested in this idea for the scarcity of research in this field.

Keywords: trigonometry, notions of sine and cosine, meanings, verbal representations, conceptions of students in non-compulsory secondary school.

INTRODUCCIÓN

En el centro de las matemáticas en la enseñanza secundaria se encuentra un apasionante tópico, la trigonometría, la cual no ha sido resultado de la labor de un solo hombre, escuela o nación (Boyer, 1986). Maor (1998) indica que tres han sido los principales cambios que se han producido a lo largo de la historia en la trigonometría: la tabla de cuerdas de Ptolomeo, la cual transforma la trigonometría en una ciencia práctica; el teorema del Moivre y la fórmula de Euler, que combina la trigonometría con el álgebra y el análisis; y los teoremas de Fourier, que indicaban que cualquier función arbitraria de una variable real $y=f(x)$ puede ser representada por una serie trigonométrica.

La trigonometría es muy fecunda en conceptos y contiene no sólo diversas conexiones a otras nociones y estructuras matemáticas (Fi, 2003), sino también a otras disciplinas. La trigonometría además, tiene aplicación práctica en la ciencia y la tecnología. Así, la trigonometría se presenta en

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. (2014). Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 455-464). Salamanca: SEIEM.

multitud de fenómenos, entre los cuales destacan los siguientes: fenómenos de medida, fenómenos físicos y fenómenos interrelacionados con la propia matemática.

Sobre la base de su desarrollo, su importancia histórica y a sus aplicaciones, la trigonometría ha permanecido en el currículo de matemáticas para la enseñanza secundaria desde hace más de 50 años.

Así, la Mathematics Association of England (1950) ya afirmaba que la trigonometría proveía a los estudiantes con el conocimiento necesario para resolver cuestiones matemáticas relevantes y les suministraba una coherente visión de las matemáticas, necesaria para la resolución de multitud de problemas relacionados con las áreas científica y técnica.

Sin embargo, la trigonometría es una parte de las matemáticas escolares difícil de entender por los estudiantes. Brown (2005) señala varios factores involucrados: su complejidad, la conexión con numerosos tipos de fenómenos, sus interconexiones con otras disciplinas, las diversas vías de expresar, entender y representar sus nociones básicas, los modos de aproximación a la misma, y nociones como la circunferencia goniométrica, los triángulos rectángulos, o las funciones trigonométricas. A pesar de todo esto, el conocimiento basado en investigación que poseemos sobre la complejidad didáctica que subyace en la trigonometría es limitado. Nuestro interés se centra en los significados de las nociones básicas de la trigonometría. Aunque hay diversas investigaciones sobre significados y representaciones en otras áreas como el álgebra, encontramos una escasez de estos estudios sobre trigonometría. Dentro de los que hemos localizado, podemos destacar estudios sobre la historia de la enseñanza de la trigonometría, los cuales subrayan las diferentes aproximaciones a la misma, el “ratio system”, donde las razones trigonométricas para ángulos entre 0 y 90° eran definidas como proporciones de lados de un triángulo y el “line system”, el cual define los conceptos principales de la trigonometría como segmentos en un círculo (Sickle, 2011). Por otro lado, algunos antecedentes de nuestro trabajo se pueden situar en las investigaciones llevadas a cabo por Brown (2005), quien afirmaba que las funciones seno y coseno son preferentemente representadas como coordenadas, distancias y cocientes, y por Weber (2008), quien indicaba dos formas principales en que se representaban las funciones trigonométricas: como cociente y como función.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Con objeto de avanzar y profundizar en la investigación didáctica sobre este tópico se sitúa nuestra investigación, que se inició en el curso 2010-2011 durante el Máster para Profesor de Educación Secundaria y Bachillerato, tuvo continuidad en el Máster de Investigación en Didáctica de la Matemática en el curso 2012-2013, y cuyo actual foco es explorar y describir las nociones, representaciones y concepciones que los estudiantes ponen de manifiesto cuando explican por escrito el significado de las razones trigonométricas mediante expresiones verbales, notaciones gráficas y simbólicas y sus relaciones. Este trabajo se centra principalmente en identificar categorías para organizar las respuestas que proporcionaron los alumnos al dar una explicación verbal sobre las razones trigonométricas seno y coseno. Un segundo objetivo de este trabajo es inferir significados que ponen de manifiesto los estudiantes sobre las nociones de seno y de coseno teniendo en cuenta sus respuestas ante las tareas planteadas. Finalmente, el tercer objetivo es indagar sobre la mayor o menor dificultad de la razón trigonométrica seno respecto a la del coseno.

NOCIÓN DE SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO

La noción de significado ha sido tema de debate desde tiempos antiguos. Un ejemplo de ello es que a lo largo de la tradición filosófica, lingüística y semiótica, se han considerado “equivalentes a significado todos estos términos: sentido, contenido, significado, significatio, significé, signified, meaning, bedeutung, denotación, connotación, intención, referencia, sense, sinn, denotatum, significatum” (Eco, 1990, p.75). Considerando esta dificultad en la definición de significado,

Ullman (1976) afirma que “el significado es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje” (p.62). En este estudio nos basamos en la propuesta expuesta por Rico (2012) que determina el significado de un concepto matemático escolar considerando tres componentes:

- Estructura conceptual, dada por los conceptos, relaciones, operaciones, propiedades, y proposiciones derivadas. La estructura conceptual establece el criterio de veracidad o falsedad para las proposiciones que se establecen; desempeña el papel de referencia.
- Sistemas de representación, definidos por las expresiones, signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros. Los sistemas de representación sistematizan conjuntos de signos apropiados para un concepto y, mediante sus reglas de transformación y de traducción, regulan pautas operativas de inferencia.
- Fenomenología, incluye aquellos contextos, situaciones y problemas que están en el origen de un concepto y le dan sentido. Los fenómenos y su análisis establecen la pluralidad de sentidos de un determinado concepto.

Este estudio pertenece a la tradición que considera la noción de representación desarrollada por Kaput (1987), que “da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas” (p.23). Así, las representaciones matemáticas son todas aquellas expresiones (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos (Rico, 2009). Es decir, los sistemas de representación permiten al alumnado comunicar, de forma visual, gestual, oral o escrita, las ideas matemáticas que quieren transmitir. En este trabajo vamos a indagar las representaciones verbales, con las cuales los estudiantes, recurriendo a expresiones escritas, describen y explican el concepto considerado. Ejemplos de esta metodología se encuentra en Castro-Rodriguez, Rico y Gómez (2012) y Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo (2012).

CONCEPCIÓN Y DEFINICIÓN

Entendemos como *concepción* cualquier tipo de respuesta (verbal, gestual, etc.) dada por un sujeto frente a un estímulo que le demanda una caracterización, descripción o definición de un determinado concepto (Fernández-Plaza y col. 2013). Las concepciones en general, expresan y reúnen componentes parciales del significado de un concepto.

La referencia de un concepto es expresada, en general, mediante una definición. Las definiciones no sólo tienen un papel importante en la estructura axiomática que caracteriza a la matemática sino también en la educación escolar: en la resolución de problemas, y en la comprensión de las nociones matemáticas (Skemp, 1971; Vinner, 1991). Entendemos por definición matemática de un concepto dado, al conjunto de propiedades lógicamente consistente de un concepto matemático, a partir de las cuales se deducen otras propiedades del mismo, la veracidad o falsedad de afirmaciones acerca de dicho concepto, o se identifican ejemplos y contra-ejemplos del objeto matemático (Harel, Selden y Selden, 2006, p.151). Existen características de un concepto matemático que no son prefijadas por su definición, por ejemplo, la definición formal de razón trigonométrica no prefija aspectos como el de ser una herramienta, que los estudiantes si pueden asociarle. Las concepciones expresan los significados parciales que los estudiantes atribuyen a los conceptos; se basan en la selección de algunas propiedades, incluyen modos locales de uso y tipos de representación.

METODOLOGÍA

El trabajo se considera exploratorio y descriptivo al examinar las concepciones de los estudiantes de bachillerato cuando explican los conceptos de seno y de coseno. También es un estudio interpretativo ya que recoge información para describir estas nociones e interpretar propiedades y características que muestran los distintos significados –cómo lo entienden, utilizan e interpretan-

utilizados por los alumnos sobre las razones trigonométricas seno y coseno. Para el análisis en primer lugar se realiza una primera lectura y observación de las producciones de los alumnos identificando y recogiendo todas las representaciones, ideas y conceptos relevantes que se presentan en las mismas. De este modo, surgen de modo natural y sistemática unos primeros temas en las producciones de los estudiantes, que identifican unidades de información con las que se reducen y organizan la diversidad de respuestas obtenidas. A continuación, se organizan los temas en categorías y subcategorías, las cuales se construyen observando y comparando las distintas respuestas en cada uno de los temas y las propiedades relevantes que expresaban. El objetivo es obtener patrones que muestren la estructura de las respuestas e interpreten los temas y categorías previamente establecidas. Finalmente, se realiza un análisis cuantitativo básico evaluando las respuestas correctas en cada uno de los cuestionarios.

Informantes

En total 74 estudiantes que cursaban 1º de bachillerato de la modalidad científico tecnológica fueron escogidos intencionalmente por disponibilidad para participar en el estudio por el nivel educativo que cursaban. Los alumnos ya habían recibido instrucción previa sobre las nociones de trigonometría.

Se dividieron los participantes del estudio en dos subgrupos equivalentes, y se realizó una estratificación de la muestra en función de la nota media del alumno tras una consulta mantenida el día 27 de febrero de 2013 entre el equipo de investigación con un experto investigador en Didáctica de la Matemática, para planificar una distribución uniforme de los dos cuestionarios implementados, que permitiera obtener respuestas lo más representativas posibles en ambos.

Instrumento

La recogida de datos se realizó mediante la implementación de dos cuestionarios, elaborados tras un proceso de revisión de literatura científica y de libros de texto durante el cual se seleccionaron un conjunto de actividades las cuales se sometieron a un análisis, revisión y filtrado posterior. Los cuestionarios eran de respuesta abierta, uno sobre el seno y otro sobre el coseno, que constan de ocho ítems similares, uno de los cuales, el sexto, es el mismo en ambos y cuya inclusión se realizó para realizar una discriminación o diferenciación entre el seno y el coseno, abarcando así los ítems de los cuestionarios las cuatro categorías de Sierpinska (1990). Cada cuestionario, formado por ocho preguntas, y que sólo se diferenciaban en la razón trigonométrica a tratar, seno o coseno, fue aplicado a uno solo de los subgrupos, los cuales poseían características similares. Estos instrumentos fueron validados previamente mediante la realización de un estudio piloto (Martín-Fernández, 2013). Los datos obtenidos en este trabajo han sido extraídos de las respuestas de los estudiantes a dichos cuestionarios mediante la aplicación de un análisis de contenido. En concreto, en este trabajo consideramos una comparación general de las respuestas dadas a los dos cuestionarios y, singularmente, las respuestas relativas a los ítems número dos de ambos cuestionarios, que son los siguientes:

Q1. "Explica verbalmente qué entiendes por $\text{sen}(45^\circ)$ "

Q2. "Explica verbalmente qué entiendes por $\text{cos}(45^\circ)$ "

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis realizado es un análisis de contenido que tiene lugar en cuatro etapas: en la primera, surgen de manera natural y sistemática unos primeros temas en las producciones escritas de los estudiantes, que identifican las unidades de información; en la segunda, los temas se desarrollan en categorías; en la tercera, analizamos estas categorías: semejanzas, diferencias, vinculaciones, etc.; y finalmente, en la cuarta, interpretamos los datos mediante las categorías y mostramos los resultados inferidos.

Comparación de los resultados de los dos cuestionarios

Avanzamos la consecución del tercero de los objetivos enunciados. Para ello, se procedió a la evaluación de las respuestas correctas en cada uno de los cuestionarios, motivado por la posibilidad de que una de las dos razones trigonométricas estudiadas tuviese mayor dificultad que la otra, por motivo de su rendimiento. Así, en general, aunque los rendimientos son algo inferiores en el coseno que en el seno, tras un análisis de varianza, se observan que estas diferencias no son significativas entre pares de preguntas homólogas de los cuestionarios, salvo en el caso de dos preguntas, que son la nº 2 de ambos cuestionarios, y que vamos a tratar en este informe.

Tabla 1. Análisis cuantitativo estudio definitivo

	Cuestionario A		Cuestionario B	
	<i>Fr</i>	%	<i>Fr</i>	%
Ítem 2	22	59,46	14	37,84

Explicaciones dadas por los estudiantes a la segunda cuestión

Una vez identificados los términos clave en las respuestas, se localizaron los temas principales: razón, valor, segmento, medida, y herramienta (sólo seno), cada uno de los cuales atribuye distintos sentidos para $\text{sen}(45^\circ)$ o $\text{cos}(45^\circ)$. Es necesario mencionar que la producción de un mismo alumno puede presentar varios temas, debido a que en algunos casos su respuesta está formada por varias oraciones.

Tabla 2. Frecuencia de temas entre las producciones al ítem 2 en ambos cuestionarios

	Frecuencia	Porcentajes
	<i>Fr</i>	%
Razón	44	46,32
Valor	16	16,84
Segmento	21	22,11
Medida	6	6,32
Herramienta	2	2,11

De los datos se infiere que los conceptos de seno y coseno se interpretan principalmente como razón. Se han observado diferentes modos de expresar el cociente: mediante una fórmula, mediante formas del verbo dividir: “divide”, “división”, “dividido”, mediante formas del verbo partir, “partido”, y mediante “entre”. El tema de valor se ha considerado cuando se incluye: el valor numérico propiamente dicho, por ejemplo: “0,7”, “ $\sqrt{2}/2$ ” y cuando se indica que el valor es un número o cuando se indica que es un “valor”. En relación a “segmento”, éste se considera cuando se habla de lados, catetos, “altura” y “base”. Respecto al tema medida, éste surge en expresiones como “la mitad del radio”, en las cuales se indican la unidad (radio) y la medida (mitad). Finalmente existen dos respuestas que muestran el uso de la razón trigonométrica, por lo que se ha considerado un último tema, “herramienta”.

Análisis de contenido de la pregunta número 2

A continuación elaboramos un mapa conceptual (figura 6) que relaciona los temas localizados en las respuestas a estas preguntas de los dos cuestionarios con los contenidos escogidos para explicar la razón trigonométrica, según los casos. Estas relaciones permiten identificar los diferentes sentidos utilizados por los estudiantes. Establecemos así una semántica a partir de las respuestas a la segunda pregunta de los cuestionarios A y B, con indicación de las particularidades de cada uno de ellos, ya que para cada uno de estos temas los alumnos han escogido diferentes contenidos, conceptuales, hechos y conceptos.

Las producciones muestran que en el tema “razón” se manejan tres contenidos para explicarla: la circunferencia, el triángulo rectángulo y el triángulo no rectángulo. Semánticamente distinguimos tres sentidos diferentes del tema “razón”, un sentido de cociente, propiamente dicho, y otros dos que añaden una mayor precisión a la producción que son el de razón trigonométrica y el de proporción. Estos dos últimos se presentan minoritariamente y siempre relacionados con el triángulo rectángulo. A continuación se incluyen cinco respuestas de los alumnos, relacionadas con el tema “razón”.

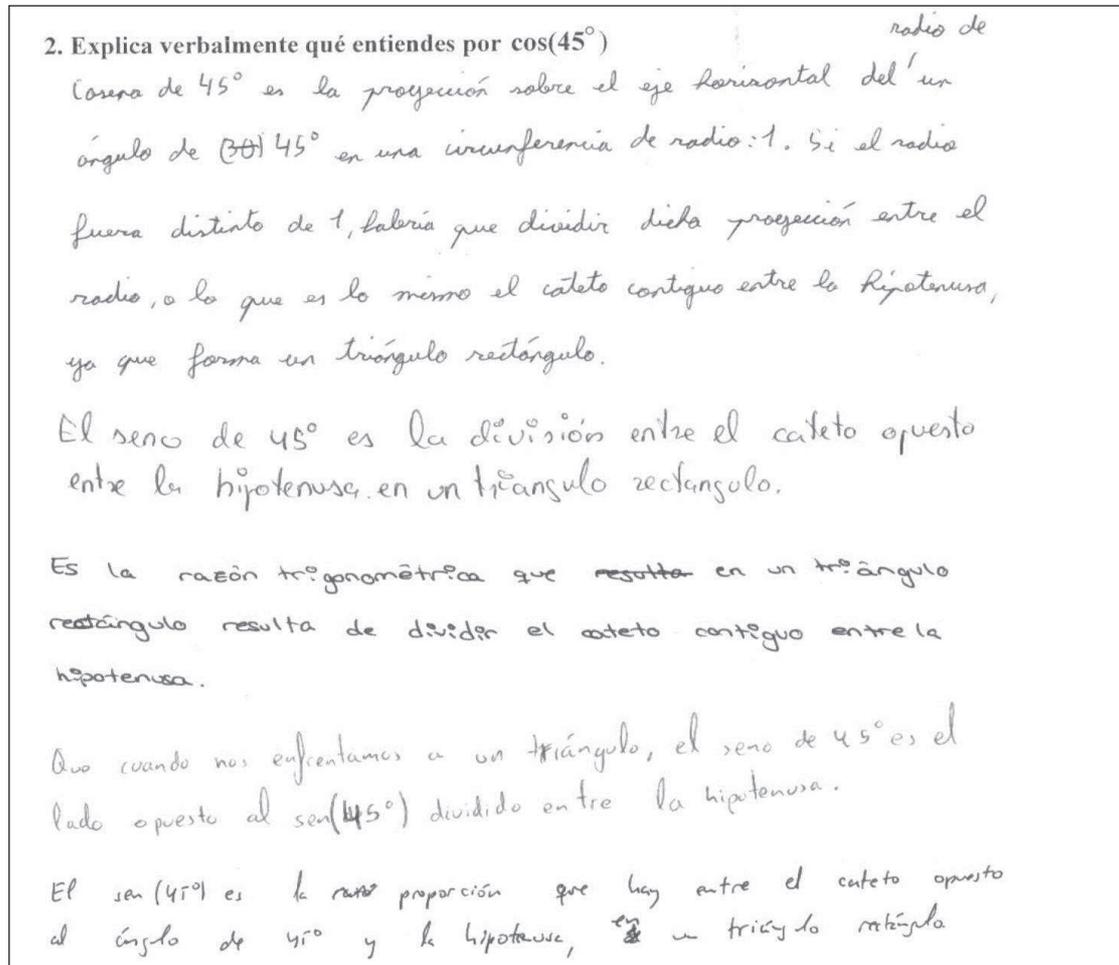


Figura 1. Cinco respuestas asociadas al tema “razón”

En relación al tema “valor” identificamos dos formas de expresarlo: mediante el valor numérico y mediante los términos “valor”, “número” o “resultado”. Además, se manifiestan dos sentidos relacionados con este tema, los cuales especifican, o no, si el valor “es siempre el mismo”. La doble flecha que aparece en el mapa conceptual entre invariante y proporción es debida a que cuando se indica que el valor es invariante y se justifica, se utiliza la proporcionalidad o viceversa. Más abajo se muestran dos ejemplos de respuestas asociadas con el tema “valor”.

En una circunferencia de radio 1, el $\text{sen } 45^\circ$ sera $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En un triángulo rectángulo, el coseno de 45° es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ un número que sale como resultado de dividir la hipotenusa del triángulo por el cateto contiguo al ángulo. Ese número siempre es el mismo, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, y solo en el caso de 45° el coseno coincide con el seno, ya que los dos catetos son iguales.

Figura 2. Dos producciones relacionadas con el tema “valor”

Respecto al tema “segmento”, se indican los diferentes hechos que se utilizan para expresarlo: el ángulo, la circunferencia y el triángulo rectángulo. En la mayoría de las ocasiones que se refieren a la circunferencia y la asocian a algún elemento del triángulo: lado, cateto, altura, base, etc., esto lo expresamos mediante un trazo discontinuo de la flecha que une “circunferencia” y “triángulo”. A continuación se muestran tres ejemplos relacionados con este tema.

Es la altura del triángulo rectángulo que se forma en la circunferencia goniométrica con el ángulo 45° o 135°

El $\text{sen } 45^\circ$ es el lado opuesto que forma un ángulo de 45° .

El $\text{cos } 45^\circ$ \rightarrow situándonos en un triángulo de 45° el cual este ángulo se encuentra en el vértice inferior izquierdo sería la ~~línea~~ línea que el coseno sería la línea que está situada en la parte inferior del ángulo o también llamada base.

Figura 3. Tres respuestas asociadas al tema “segmento”

Finalmente, el tema “herramienta” se incluye porque hay alumnos que consideran las razones trigonométricas como una técnica para algo, resaltando que también tienen carácter procedimental, lo cual aporta nuevos sentidos. Se incluye un ejemplo de producción asociada a este tema.

Es un número que utilizamos para facilitar la resolución de triángulos rectángulos.

Figura 4. Producción relacionada con el tema “herramienta”

Finalmente, el tema “medida” aparece de incidentalmente. Una de las cuales se muestra a continuación.

El cos (45°) está en el primer cuadrante y es exactamente la mitad del radio de la circunferencia.

Figura 5. Respuesta asociada al tema “medida”

Como síntesis del análisis realizado elaboramos un mapa conceptual que resume las distintas concepciones manifestadas por los estudiantes en sus explicaciones sobre el seno y el coseno de un ángulo de 45°.

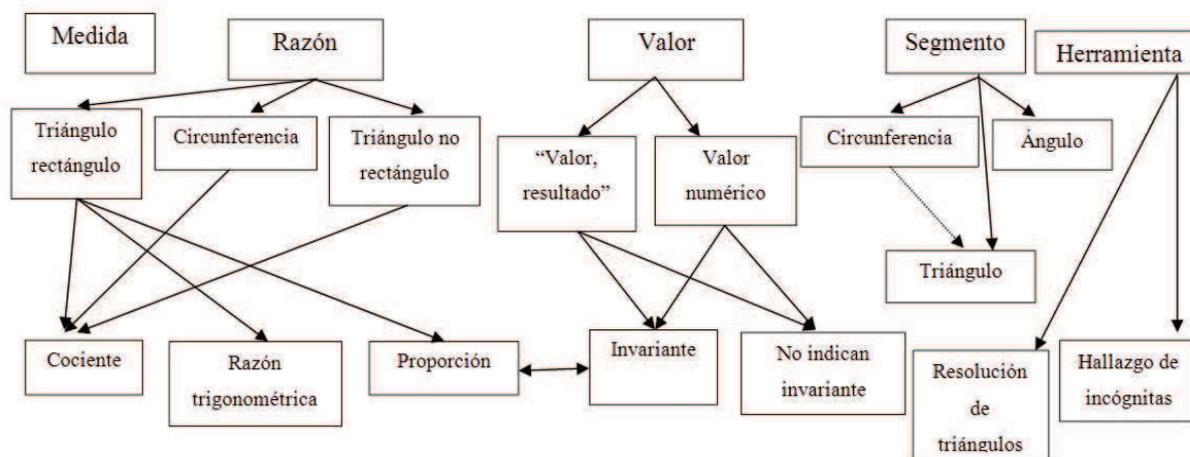


Figura 6. Concepciones a partir de los temas verbales

Algunas diferencias encontradas entre los temas y sentidos de las dos razones trigonométricas, seno y coseno, son las siguientes:

- La interpretación del coseno como razón está asociada a la circunferencia. En el seno no se presenta dicha relación.
- Para el coseno no se relaciona el sentido de invariante con la indicación de “valor, resultado”, algo que sí ocurre en el seno. La categoría “valor, resultado” en el seno es considerado siempre un valor invariante.
- La flecha bidireccional entre invariante y proporción indica que cuando se expresa que es una proporción inmediatamente se añade que es un invariante y cuando se indica que es un invariante este se justifica mediante una proporción.

CONCLUSIONES

De acuerdo al objetivo planteado, presentamos las siguientes conclusiones.

Los sujetos muestran una diversidad de concepciones cuando interpretan verbalmente el seno y coseno de un ángulo, ya que lo explican mediante las nociones de razón o cociente, valor, segmento, medida y herramienta. La mayoría de los participantes describen las razones trigonométricas seno y coseno como cociente (46,32%). Más de la mitad de las producciones asociadas a esta interpretación se relacionan con términos derivados del verbo dividir.

Este alumnado no identifica las razones trigonométricas con la noción de proporción. La idea de proporción aparece de modo incidental tanto en el seno como en el coseno.

Se ponen de manifiesto conexiones incorrectas entre los sistemas “line system” y “ratio system”. Aunque las nociones trigonométricas de seno y coseno como segmentos están asociadas al “line system” y deberían surgir únicamente del tema circunferencia, también surgen del tema triángulo.

Los datos muestran escasa conexión de la trigonometría con el mundo real. Es mínimo el número de sujetos que reconocen el carácter procedimental de la razón trigonométrica y expresan la idea de que la razón trigonométrica es una técnica con utilidad práctica.

Los sujetos tienen un conocimiento correcto del rango de valores del seno y coseno del ángulo 45° . En ningún caso los valores dados por el alumnado han sido superiores o inferiores a uno.

A partir de los rendimientos de los alumnos en este estudio (tabla 1), podemos aceptar que las nociones trigonométricas de coseno y seno tienen una dificultad similar para el alumnado.

Además, se confirman algunas concepciones documentadas por investigaciones anteriores, tales como su interpretación como cociente (Weber, 2005); distancias horizontales y verticales respecto a unos ejes; y, también, como cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo (Brown, 2006). Sin embargo, detectamos nuevas concepciones como son las de medida, valor numérico y herramienta.

El análisis ha puesto de manifiesto que los alumnos manejan una amplia gama de expresiones verbales y consideran una diversidad de sentidos no triviales para estas dos nociones, los cuales muestran la pluralidad de significados –estructuras, representaciones y fenómenos- con los que estos estudiantes abordan e interpretan las nociones básicas de la trigonometría del plano

Finalmente, se quiere subrayar la conveniencia de indagar, con un número mayor de sujetos, las diferencias entre los significados del seno y del coseno, junto con las diferencias en dificultad de un concepto respecto del otro.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación del proyecto “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICINN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Referencias

- Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connections: Students' understanding of sine and cosine*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.
- Castro-Rodríguez, E., Rico, L. y Gómez, P. (2012). La fenomenología de las fracciones. Un estudio con maestros en formación. En M. Marín-Rodríguez, N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 241-250). Ciudad Real: SEIEM
- Eco, U. (1990). *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Barcelona: Lumen
- Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. Unpublished doctoral dissertation, University of Iowa, Iowa, IA.
- Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J.F., (2012). The Concept of Finite Limit of a Function at one Point as Explained by Students of Non-compulsory Secondary Education. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2)*, (pp. 235-242). Taipei, Taiwan: PME.
- Fernández-Plaza, J.A., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Castro, E. (2013). Variación de las concepciones individuales sobre límite finito de una función en un punto. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 253-261). Bilbao: SEIEM.

- Harel, G., Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking: Some PME Perspectives. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 147-172). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Kaput, J.J. (1987). Representational systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ. USA: Lawrence Erlbaum.
- Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio*. Documento no publicado. Universidad de Granada: Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Enrique_Martin_.pdf
- Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Mathematics Association of England. (1950). *The teaching of trigonometry in schools: A report prepared for the Mathematical Association*. London: G. Bell y Sons, Ltd.
- Rico, L. (2007). *Sistemas de significados de un concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Universidad de Granada: Granada.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4, 1, 1–14.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(1), 39-63.
- Sickle, J. V. (2011). *A history of trigonometry Education in the United States 1776-1990*. Unpublished doctoral dissertation, Columbia University, Nueva York, NY.
- Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understandings in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24-36.
- Skemp, R.R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Penguin: Harmondsworth.
- Ulmann, S. (1976). *Semiótica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning mathematics. En Tall, D.(Ed.) *Advanced mathematical thinking*. (pp. 65-81) Dordrecht: Kluwer.
- Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher*, 102, 2, 144–147.