¿LA CERTEZA IMPLICA COMPRENSIÓN?

Does certitude imply understanding?

Benjamín Martínez, Mirela Rigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

Resumen

En el documento se examinan cualitativamente algunos aspectos de las relaciones entre la certeza que experimentan agentes de clase en torno a hechos de las matemáticas, y su comprensión; los sujetos que intervienen en el estudio participan en un diplomado de enseñanza de las matemáticas en línea. Para el análisis se ha tenido que diseñar un marco interpretativo en el que se proponen diversos instrumentos de interpretación, el cual aquí se expone. En la comunicación se argumenta que la certeza no siempre implica la comprensión, lo que resulta imprescindible que el docente tome en cuenta, ya que muchas de sus decisiones de clase las basa en lo que él interpreta como muestras de certeza de sus alumnos.

Palabras clave: *certeza y presunción o duda, comprensión, justificación, foro virtual*

Abstract

This paper examines qualitatively some aspects of the relationship between certainty and understanding of mathematics facts by agents in the classroom. The subjects of the study were participants in an online teaching diploma course. An interpretive framework was designed for the analysis, for which various interpretive tools, described in the paper, are proposed. The paper argues that certainty does not always imply understanding; it is essential that teachers take this into account, since many of their decisions in the classroom are based on displays of what they interpret as the students' certainty.

Keywords: *certitude and presumption or doubt, understanding, justification, online teaching.*

ANTECEDENTES

La investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen se centra en el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas (los que se representan a través de afirmaciones de contenido matemático) que vivencian agentes de clase, específicamente, estudiantes-asesores (i.e., asesores en formación) que participan en un foro virtual. En particular, en la investigación se analizan las relaciones entre la comprensión y esos estados internos, que aquí se les denominan 'estados epistémicos'. En un primer reporte se mostró el caso de una estudiante-asesora que acompañaba y retro-alimentaba su certeza en los hechos de las matemáticas con su comprensión conceptual. Se podría esperar que todos los alumnos presentaran relaciones epistémicas semejantes. En este documento se muestra que no siempre sucede así; se aportan evidencias de que la certeza, o estados altos de presunción, pueden también ir de la mano de la comprensión procedimental, o que incluso pueden ir asociados a la casi total ausencia de comprensión conceptual.

Investigaciones sobre los estados epistémicos se han orientado hacia el ámbito del profesional de las matemáticas como al de su instrucción. Para el matemático, el convencimiento y la certeza son motores que impulsan su actividad en las etapas de desarrollo heurístico, y una guía para certificar sus resultados durante los procesos de prueba (Tymoczko, 1986). La comunidad de educación matemática ha realizado diversos estudios que implícitamente parten del supuesto de que, a semejanza de lo que sucede con los matemáticos, la certeza también importa en la construcción del

Martínez, B., Rigo, M. (2014). ¿La certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca: SEIEM.

conocimiento matemático en el aula. Algunos de esos trabajos se han recreado en ambientes extra-clase y se han focalizado ya sea en los estudiantes (e.g., el de Balacheff, 2000) o bien en los profesores (e.g., el de Harel & Sowder, 2007); otros, desarrollados en ambientes intervenidos de clase, se han centralizado básicamente en alumnos (e.g., el de Krummheuer, 1995). A diferencia de esos estudios, en el presente se analizan específicamente los estados epistémicos que experimentan los participantes en un foro virtual y se examinan sus relaciones con sus niveles de comprensión.

MARCO INTERPRETATIVO

Los esquemas epistémicos

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos. Rigo (2009 & 2013) ha propuesto una taxonomía de estos recursos de sustentación a los que llama "esquemas epistémicos"; ella sugiere que algunos de esos esquemas se organizan y orientan en torno a razones matemáticas, como los que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e. g., ejemplos genéricos o las instanciaciones, v. Balacheff, 2000), o los que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e. g., a partir del análisis de casos particulares). En otros casos -continúa Rigo (2013)-, los esquemas que una persona construye para sustentar la verdad de un enunciado matemático responden a consideraciones extra-matemáticas haciéndose a un lado el contenido disciplinar del enunciado, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad ("es más fácil resolverlo así"), o a la autoridad del profesor ("porque me lo dijo la maestra"), en cuyo caso se está soportando la verdad de las aseveraciones en esquemas epistémicos basados en razones prácticas y en la autoridad, respectivamente. Otro tipo de esquemas basados en consideraciones extra-matemáticas son los que se basan en la familiaridad, mismos que son resultado de la repetición, la memorización y las costumbres. Los esquemas que se basan en la repetición pueden provenir de reiterar sistemáticamente algún enunciado o hecho de las matemáticas, mientras que otros esquemas pueden proceder de costumbres institucionales en torno a lo que deben ser las tareas matemáticas que deben resolver los niños en la clase, como cuando los estudiantes sustentan la validez de un algoritmo por ser habitual o por su facilidad. En lo que sigue se describen algunos esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas-distintos a los que ha reportado Rigo en sus trabajos- que han sido identificados en el marco de esta investigación; estos esquemas permiten explicar comportamientos de los agentes de clase relacionados con el argumento que aquí se pretende defender, y posibilitan de paso ampliar esa taxonomía.

Definiciones de nuevos esquemas epistémicos

- *Esquema basado en la autoridad entre pares*. Se activa este esquema cuando el sujeto que escucha una afirmación matemática soporta su veracidad en la autoridad que para él tiene la persona que la enuncia, persona que comparte valores similares, pertenece al mismo grupo social o tiene experiencias previas de cooperación con el que oye. Se trata de un esquema activado por la confianza que se suele tener entre pares.

- *Esquema basado en afirmaciones incontestables ajenas al argumento*. Se moviliza este esquema cuando la verdad de un enunciado o justificación matemática se basa en una afirmación cuya veracidad resulta incuestionable pero no es de carácter matemático o aunque lo sea, su contenido no está directamente relacionado con lo que se arguye.

- *Esquema para evitar consecuencias inesperadas*. Este esquema se aplica cuando se sostiene una afirmación porque de otras opciones se desprenden consecuencias o resultados inesperados o incluso temidos (como un número negativo, el cero, un número imaginario, procesos actualmente infinitos, etc.).

- *Esquemas para evitar estados de incertidumbre*. Este esquema se pone en juego cuando los agentes de clase sostienen la verdad de una afirmación matemática con la idea de que así adquirirán certeza.

Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza, presunción o duda.

En la investigación se considera siguiendo a Villoro (2009) que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados Rigo (2013) les llama "estados epistémicos", como se dijo. Para fijar ideas, en la investigación nos hemos constreñido sólo a los estados epistémicos aludidos (certeza y duda, dejando fuera el convencimiento, la convicción o la persuasión, entre muchos otros).

En el diseño del instrumento teórico-metodológico que se propone a continuación (v. Martínez & Rigo, 2013) convergieron perspectivas provenientes de distintas disciplinas: de la filosofía (Wittgenstein), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus), la sociología (Abelson) y la educación matemática (Rigo, 2011). Particularmente relevante para el estudio resultó la aportación de trabajos lingüísticos como los de Hyland (1998), que permitieron recurrir al análisis del meta-discurso de los participantes en el foro virtual, con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas de ellas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura.

En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza, o bien de presunción o duda, en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1. Estos criterios son suficientes pero no necesarios.

Tabla 1. Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo).
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Familiaridad	La persona recurre a esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres).
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son:
	-*Sistemáticas*. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible.
	-*Informativas*. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos.
	-*Claras y precisas*.
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

Indicadores de comprensión

En este documento y siguiendo a Schoenfeld, se establece una diferencia entre el conocimiento procedimental "basado en cómo hacer las cosas", y el conocimiento conceptual "asentado en los racionales (*rationales*) intelectuales a través de los cuales se explica cómo las cosas funcionan juntas, y porqué así sucede” (2011, p. 26). De lo anterior y de otras consideraciones (provenientes de Rigo, 2013; Petty & Brinol, 2010, y Salcedo, 2007) se desprenden algunos indicadores de lo que en este escrito se entiende por comprensión conceptual, los que se describen en la Tabla 2.

Tabla 2. Indicadores de comprensión

Esquemas epistémicos basados en razones matemáticas	El nivel de comprensión conceptual está relacionado con el tipo de esquema epistémico que se pone en juego: a comprensiones más profundas le corresponden esquemas epistémicos basados en razones matemáticas más generales (e.g. esquemas de tipo deductivo apoyado en axiomáticas abstractas) y a comprensiones de menor penetración le atañen esquemas de menor generalidad (como las instanciaciones o el análisis de casos particulares). Estos esquemas deben de converger o ser consistentes con los esquemas epistémicos de la matemática disciplinar o la matemática escolar.
Refutación de argumentos	La comprensión conceptual está relacionada con la posibilidad de refutar los argumentos o de encontrar contraejemplos.
Conocimiento promedio	La persona tiene más conocimiento que lo que posee el promedio.
Facilidad	A la persona le resulta fácil explicar sus puntos de vista.

Indicadores de comprensión disciplinar (en relación a la variable)

Se utiliza el Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) en el que se caracterizan los tres usos de la variable. En la Tabla 3 se describen.

Tabla 3. Indicadores de comprensión disciplinar. El modelo 3UV

La variable como incógnita	
I1	Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado.
I5	Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones.
I2	Interpretar la variable que aparece en una ecuación como un valor específico.
I4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas.
I3	Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
La variable como número general	
G2	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G4	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

Indicadores de incomprensión conceptual (Rigo, 2013; Petty & Brinol, 2010 y Salcedo, 2007)

Tabla 4. Indicadores de incomprensión conceptual

Activación de esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas	Un indicador relevante de incomprensión lo da la ausencia de razones y la presencia contundente de esquemas extra-matemáticos.
Bajos niveles de elaboración	La persona examina el primer argumento pero no los siguientes de todos los que conforman un punto de vista del interlocutor. Ese argumento suele ser uno extra-matemático muy llamativo. Es una forma de adherirse a los argumentos de otro.
Sesgo de exploración	La persona fija su atención en un punto de vista personal -seguramente resultado de su historia- dejando de considerar otras opciones y evitando pensamientos críticos o negativos hacia dicho

	punto de vista.
Dificultad para refutar otros puntos de vista	La persona muestra dificultad para refutar otros puntos de vista y elaborar contraejemplos.
Conocimiento menor que el promedio	Se muestra menor conocimiento que el promedio.
Dificultades para explicar un punto de vista	Se muestran dificultades para explicar una postura.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994). El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (México); el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria (estudiantes-asesores). El episodio que aquí se analiza pertenece al Módulo IV y su elección obedece a que ahí los estudiantes-asesores tendían a sustentar sus respuestas y asociados a esos sustentos parecían experimentar distintos estados epistémicos. Los episodios comienzan con la solicitud del tutor para responder a una tarea y finalizan con el acuerdo de los estudiantes en torno a una solución. Para este reporte se eligieron participaciones de dos estudiantes-asesoras, Patricia y Laura, porque parecían vivenciar distintos estados epistémicos a lo largo del episodio. Martínez fungió como tutor del grupo, quien deliberada y sistemáticamente instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el episodio que se analiza el tutor solicitó a los estudiantes que plantearan la ecuación que resolviera el siguiente problema: Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

Primera participación de Patricia: Certeza y comprensión procedimental

La participación que abrió el episodio fue la de Patricia:

1.1 Hola. Les dejo la respuesta al primer problema y la explicación a los educandos.

1.2-1.4 $3(5 + X) = X + 35$; $15 + 3X = X + 35$; $3X - X = 35 - 15$; $2X = 20$; $X = 10$

1.5 -1.6 Colocaremos X a los años que transcurrirán para que el padre cumpla el triple de edad que el hijo. Ya sabemos la edad que tienen actualmente ambos así que podemos realizar una igualdad con los datos que tenemos. $3(5 + X) = X + 35$

1.7 Tres veces la edad del niño más X años que deben transcurrir deben ser igual a la edad del padre, a su vez sumar la edad del padre a esa misma cantidad X años debe ser la edad del hijo. Espero no confundir.

Comprensión procedimental. En un primer momento, Patricia expuso lo que para ella era la respuesta del problema: planteó la ecuación (en 1.2) (aspecto I5 de la variable como incógnita, en adelante así aparecen los aspectos de la variable), manipuló la variable (1.3) (G2 y G4) y obtuvo el valor para la incógnita del problema (1.4) (I4). En un segundo momento ella compartió su explicación para los educandos. Ahí, ella identificó la incógnita adecuadamente (1.5) (I1), le asignó la literal (1.5) (I5) y explicó el planteamiento hecho previamente (1.6), explicitando la interpretación que dio a la 'x' (I.2). La puesta en juego de casi todos los aspectos de la variable como incógnita (con excepción de I3) es una muestra del conocimiento procedimental que posee Patricia en torno a ese tema.

Certeza. Es probable que en esta primera intervención Patricia experimentara certeza. Se puede decir, en principio, que ella tuvo *determinación* para ser la única en someter a juicio del grupo sus respuestas al problema. Su certeza también se puede inferir del uso de *enfatizadores*, específicamente, del hecho de haber recurrido al modo indicativo de los verbos a lo largo de su intervención (dejo, sabemos, tenemos). Otros aspectos que hablan de la certeza de Patricia son que *actuó en consecuencia* con los procedimientos que anunció, por ejemplo, en 1.6 planteó la ecuación que resolvía el problema de acuerdo a lo que enunció en 1.5; que activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* en los procesos algebraicos antes descritos, los que muy probablemente eran procedimientos habituales para ella al resolver problemas rutinarios en su labor como asesora y que parecían darle confianza en sus respuestas. Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema, al contestar correctamente todas las preguntas que le hizo el tutor, al resolver el sistema que planteó sin que el tutor se lo solicitara, al ser la única en dar solución al problema hasta ese momento y al ser *clara* en su exposición. Finalmente, Patricia demostró su certeza al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

El tutor se percató que Patricia había sido la única estudiante en resolver el problema de las edades por lo que puso a consideración del grupo sus procedimientos y su resolución. En lo que sigue se analiza la respuesta de Laura a los cuestionamientos del tutor.

Primera intervención de Laura. Duda e incomprensión

2.2	T: a) ¿Están de acuerdo que [la ecuación que propuso Patricia] solucionaría el problema?
	L: No, porque cuando la intenté resolver no me salió.
2.3	T: b) ¿Qué significa x+5 en la ecuación que propuso?
	L: El número de años que no conocemos más la edad que tiene actualmente el niño.
2.6	T: e) ¿Cómo creen que un educando intentaría resolver el problema si se le dificulta el Álgebra?
	L: Seguramente se confundirá al momento de interpretar los datos, ya que tenemos todos los datos, lo único que no sabemos el número de años que tienen que transcurrir.
2.7	T: ¿Cómo lo orientarían hacia el planteamiento de una ecuación?
	L: Yo lo invitaría a que represente cada dato con una letra para que aprenda el lenguaje abstracto.
2.8-2.9	L: Yo encontré que la ecuación puede ser: 3(x-5)=x-35. Corríjanme por favor.

T: tutor; L: Laura

Incomprensión. De entrada, se puede vislumbrar en la participación de Laura su incomprensión conceptual, y su *conocimiento menor que el promedio*, que manifestó, por una parte, en las dificultades que tuvo para identificar la incógnita del problema (I1) (al interpretarla como "el número de años" sin especificar que era el "número de años que debían transcurrir para que la edad del padre fuese el triple que la edad del hijo") y que se manifestó también al plantear la ecuación de forma incorrecta (I5) (cambiando sólo el signo + por el signo - en la ecuación que propuso Patricia, en 2.8); todo ello muestra la imposibilidad de Laura para comprender el planteamiento de la ecuación en el mensaje de su compañera. Adicionalmente, su incomprensión se desprende de su *sesgo de exploración*, ya que al tratar de refutar el planteamiento de Patricia partió de la solución numérica del problema que ella previamente había encontrado (ver 5.3, 6.1 y 6.2), centrando su atención sólo en su punto de vista y su solución. De esto se desprende su *dificultad para elaborar contraejemplos* y sus *bajos niveles de elaboración* que dejó ver al focalizar su contra-argumento sólo en la ecuación que propuso Patricia, en lugar de considerar otros de los elementos conceptuales que ella ofreció en su exposición (como la traducción del lenguaje común al algebraico o su interpretación de la incógnita). Se observó también que Laura tuvo *dificultades para explicar* su punto de vista porque no justificó su propio planteamiento (en 2.8), el que posiblemente fue resultado de un intento por *evitar estados de incertidumbre* al plantear una ecuación distinta a la de su compañera pero sin soporte matemático y con sustento en *esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas*. En suma, los argumentos de Patricia no lograron que Laura comprendiera el contenido de sus explicaciones.

Duda. Si bien a lo largo de toda su participación Laura mostró bajos niveles de presunción al *no actuar en consecuencia*, al *no ser suficientemente informativa* (ya que dejó sin resolver la ecuación y no explicitó su procedimiento mediante el cual la planteó) y al utilizar *mitigadores* en sus intervenciones (como el del verbo poder en 2.8), su estado de duda se hizo todavía más evidente cuando al cerrar su participación pidió decididamente ayuda: "corríjanme por favor" (en 2.9).

Ante los hechos, y ante una pequeña participación de Patricia, el tutor la interpeló: a) Por favor, explícanos Patricia qué significa en tu ecuación las expresiones '5+x' y 'x+35'. b) Laura propuso la siguiente ecuación para resolver el problema: 3(x-5) = x-35 ¿Estás de acuerdo con que la ecuación resuelve el problema? ¿Por qué?

Segunda respuesta de Patricia: Certeza e incomprensión conceptual

Patricia respondió así a los cuestionamientos del tutor:

4.1 Pasando al problema, primero se determina la ecuación para poder obtener la incógnita.

4.2 La incógnita es en cuantos años tendrá el padre el triple de la edad del hijo
la incógnita es la cantidad de años que deben transcurrir para que el padre tenga el triple de la edad del hijo.

4.3 [En relación a la pregunta b) del tutor Patricia respondió]: 5+x significa que 5 años son la edad que tiene el hijo y le debemos sumar la cantidad de años que deben transcurrir. x+35 significa que la cantidad de años que deben transcurrir se le sumará a la edad actual del padre.

4.5 Y las personas sólo pueden aumentar de edad es decir sumamos edad jamás restamos años a nuestra vida.

4.6 Por lo tanto si le resto como menciona la ecuación de Laura no me dará buen resultado.

4.7-4.8 Si resto 3(10-5)=10-35. Comenzando porque al restar un número menor a un número mayor mi resultado será negativo, es decir -25.

Comprensión procedimental e incomprensión conceptual. En su intervención, Patricia primeramente dejó ver su comprensión procedimental de la variable como incógnita, en consecuencia con su actuación previa. Pero muy poco después (a partir de 4.4) da muestras de su incomprensión conceptual. En principio porque no puede ahí *contra-argumentar* al razonamiento de Laura. Para hacerlo, es decir, para mostrar que la ecuación de Laura es incorrecta, utiliza implícitamente un argumento por reducción al absurdo: supuso que la ecuación de su compañera es correcta; sustituyó en esa ecuación el resultado (x=10) que se derivó de la ecuación planteada por Patricia (Sic!) y de ahí coligió lo que ella consideró era una contradicción: la aparición de números negativos (en lugar de considerar para ello la desigualdad que de esa sustitución se deriva 15 = -25). Pero esto no fue todo. La incomprensión conceptual de Patricia también se deja ver cuando ella activó diversos esquemas epistémicos basados en *consideraciones extra-matemáticas*: en principio, al movilizar el esquema basado en *afirmaciones incontestables* ajenas al argumento, lo que sucedió cuando afirmó que "las personas sólo puedan aumentar de edad y que jamás podremos restar años a nuestra vida" (4.5), afirmación que aunque es irreprochable en la vida práctica, no es aplicable en el marco del problema, ya que un valor negativo de la literal podría ahí interpretarse como un hecho ocurrido en el pasado; por lo demás, el error en el planteamiento de Laura no parece tener que ver con esa afirmación porque lo que en todo caso lo que Laura habría supuesto como negativo son las edades iniciales y no el valor de la literal. Aunado a lo anterior, Patricia puso en juego el *esquema para evitar consecuencias inesperadas* al evocar temor hacia la obtención de un resultado negativo, cuando previno en 4.6 que si se procediera como lo hizo Laura no se obtendría un 'buen resultado', refiriéndose seguramente al temido valor negativo (-25) con el que se topó al fin de su intervención.

Certeza. A lo largo de su participación es posible que Patricia haya experimentado certeza. Esto se puede inferir de su *determinación* para refutar la respuesta de Laura; de que utilizó *enfatizadores* a lo largo de su intervención (específicamente, el modo indicativo de los verbos, como en "significa", "resto", "dará" y el enfatizador "jamás" en 4.5); de que actuó en *consecuencia* con lo que anunció (e. g., en 4.7 y 4.8 trató de mostrar que al utilizar la ecuación de Laura no se obtendría un "buen resultado") y de que activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* (al explicitar en 4.8 la creencia de la imposibilidad de un resultado negativo producto quizá de la cultura escolar). Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema; al tratar de contestar todas las preguntas que le hizo el tutor y al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

Segunda intervención de Laura: Altos niveles de presunción e incomprensión

Laura reaccionó así a la respuesta de Patricia:

5.1 Hola Pati! Tienes toda la razón del mundo, no podemos restar años a la vida humana,

5.2 y después cuando el tutor me preguntó cómo resolví la ecuación que yo propuse, ya no supe como la había hecho antes, total que al final terminé echa bolas, hasta que leí tu comentario,

5.3 y con tu aclaración ya encontré mi error, resulta que yo sólo calculé cual podría ser el valor de "x" en ambos lados pero al final encontré que el numero de años que tienen que transcurrir eran 30, son muchos porque el padre tendría 90 y el hijo 30, y aunque cumple con el requisito de ser el triple de la edad del hijo el procedimiento no es correcto,

5.4 y a continuación les comparto lo que yo hice:

3(x-5)=x-35, aquí calculé cuál podría ser el valor de "x", nunca despejé ni lo busqué en los datos que tenía, simplemente calculé y sustituí, ese fue mi gran error,

5.5 además de usar resta en lugar de suma.

5.6 Mil gracias por la aclaración y por tu comentario. Aprendí mucho.

Cuando posteriormente el tutor le preguntó a Laura lo que había aprendido, ella respondió:

6.1 Simplemente asigné un valor a "x", y se me ocurrió que si "x" valía 30, entonces el padre tendría 90 y el hijo 30 y cumple con el supuesto del problema.

6.2 Aprendí que debo poner mucha atención y sobre todo dar seguimiento a los pasos para encontrar la ecuación y no solo tratar de adivinar o suponer el valor, es posible que obtenga el mismo resultado pero no estoy aplicando el conocimiento como se debe.

Incomprensión procedimental y conceptual. El procedimiento de Laura consistió -como ella misma lo reconoció explícitamente en 6.1 y 6.2 e implícitamente en 5.3- en adivinar, suponer o calcular aritméticamente lo que ella consideró que era el valor de la x, que a su vez para ella constituía la solución del problema, solución por cierto, que con un *sesgo de exploración* y a pesar de los esfuerzos de su compañera por hacerla comprender, nunca dejó de pensar que era la correcta (e. g., en 5.3 y en 6.1 cuando afirma que su solución cumple con el supuesto del problema). En su participación Laura también otorgó dos significados a la incógnita: como la edad del hijo pero a la vez como el número de años que deben transcurrir. Pareciera que detrás de su procedimiento estaba la creencia de que la incógnita es equivalente a 'algo que hay que adivinar', y que esto se puede conseguir de manera aritmética y sin la necesidad de tomar en cuenta otras condiciones del problema. Con todo lo anterior Laura muestra no sólo *conocimiento bajo del promedio* sino un desconocimiento palmario en el manejo de la variable, especialmente en los criterios I.2, I.5 y G2, cosa que desde el inicio ella misma confesó: "encontrar la ecuación de un problema se me dificulta sobremanera". La incomprensión de Laura también se deja ver a través de las causas a las que ella, con un *sesgo de exploración*, parece atribuir su error, sustentadas todas ellas en *consideraciones extra-matemáticas* y no en consideraciones disciplinares. Una de las posibles causas fue el no haber 'aplicado el conocimiento como se debe'; otra causa a la que ella probablemente imputó sus errores fue el no haber considerado "que sumamos edad, jamás restamos años a nuestra vida" afirmación que hizo su compañera en 4.5 y que Laura aceptó enfáticamente (en 5.1) siendo fiel a un *esquema basado en afirmaciones incontestables*. Por cierto, Laura se adhirió a la verdad de esa afirmación posiblemente con el afán de evitar *estados de incertidumbre*, y conforme a *bajos niveles de elaboración*, ya que de todo el razonamiento que su compañera expuso de 4.5 a 4.8, Laura sólo consideró la afirmación expuesta en 4.5 (y no los errores en los que posteriormente incurrió su compañera, que ya antes analizamos). Otra causa que posiblemente Laura colocó en el origen de sus errores consistió en no haber "dado seguimiento a los pasos para encontrar la solución", como lo hiciera su compañera Patricia, otorgándole así *autoridad* a ella por ser un *par* que a Laura le parecía confiable, y dejando ver su creencia de que el planteamiento de ecuaciones supone la aplicación de un algoritmo.

Altos niveles de presunción. Asociada a su incomprensión, Laura probablemente experimentó altos grados de presunción. En principio, ella tuvo *determinación* para cambiar su posición inicial y usó *enfatizadores* como la expresión "Tienes toda la razón del mundo" (5.1) y el modo indicativo de los verbos (encontré, cumple, es). No obstante, Laura también mostró cierta duda cuando a pesar de que ella enunció en 5.3 que debía seguirse un "procedimiento correcto" y que en 5.4 explicitó parte de ese procedimiento ("buscarlo en los datos, despejar la incógnita"), ella no actuó en consecuencia. Esta falta de acción permitió diferenciar el estado de certeza que Patricia experimentó en sus intervenciones del nivel de presunción que experimentó Laura.

En síntesis, Laura deja ver una evolución de un estado de duda hacia una relativamente alta presunción, que ciertamente no parece haber sido resultado de una mayor comprensión de los contenidos disciplinares incluidos en el problema sino que más bien podría estar cimentada en un fortalecimiento de sus creencias (e. g., sobre el origen de sus errores). Da la impresión que Laura sólo comprendió que en casos como los del diplomado no es aplicable el 'método por adivinación' que ella siguió, no porque arroje resultados incorrectos sino por su propia naturaleza, ya que ahí 'no se aplica el conocimiento como se debe' (6.2).

CONCLUSIONES

En el documento se muestran aspectos de las complejas relaciones entre la certeza y la comprensión. Se podría pensar que existe una mutua determinación entre la certeza y la comprensión, es decir, que la comprensión implica certeza y recíprocamente, que la certeza supone la comprensión. Parece, sin embargo, que esto no siempre es el caso. Cuando Cantor le envió su famosa y sorprendente demostración a Dedekind sobre la correspondencia biunívoca entre el segmento unitario y el cuadrado unitario, signada con una de sus frases más célebres "¡lo veo pero no lo creo!" (Dauben, 1984, p. 242), él mostró una profunda comprensión del hecho, pero se trataba de una comprensión teñida de incredulidad.

En este escrito, por otra parte, se han aportado evidencias empíricas de que, de modos diversos, la certeza puede estar asociada no sólo a bajos niveles de entendimiento, sino incluso a la incomprensión, es decir, que la certeza no lleva consigo ni incluye necesariamente al conocimiento. En el caso de Patricia se muestra que la certeza estuvo asociada sólo a un entendimiento procedimental pero a un desconocimiento conceptual. En el de Laura, se puede distinguir una transición de un estado de duda hacia un estado de presunción relativamente alto, transición que sin embargo no se vio acompañada ni sustentada en aumento de su comprensión. De hecho es un caso que muestra estados de incomprensión y desconocimiento asociados a estados de alta presunción. Las relaciones entre certeza y comprensión nos remiten a una vieja diatriba epistemológica sobre las relaciones que se dan entre creer y conocer, pero también a una problemática novedosa –en el sentido de que sólo últimamente se ha puesto en la mesa de la discusión- de conseguir, entre otras muchas cosas, que los docentes tomen conciencia de que las muestras de aparente certeza de sus alumnos –que mucho estimulan e incentivan a sus profesores y sobre las cuales toman muchas decisiones didácticas- no son a su vez expresiones de su comprensión.

Referencias

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Dauben, J. W. (1980). El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana. En I. Grattan-Guines (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* (pp. 235-282). Madrid: Alianza Editorial.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: NCTM.

Hyland, K. (1998). Persuasion and context: The pragmatics of academic metadiscourse. *Journal of Pragmatics*, *30*, 437-455.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez B. & Rigo M. (2013).Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.) *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (I CEMACYC) (pp. 548-558). República Dominicana: ICMI.

Petty, R. E. & Briñol, P. (2010). Attitude change. In R. F. Baumeister & E. J. Finkel (Eds.), *Advanced social psychology: The state of the science* (pp. 217-259). Oxford: Oxford University Press.

Rigo, M. y otros (2009). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas.En González, M. J., González, M. T. & Murillo, J. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII.* Pp. 445-452. Santander, España: SEIEM.

Rigo, M. (2011). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 71-91.

Salcedo , A. (2007). *Anatomía de la persuasión: de los clásicos a la programación neurolingüística*. Madrid: ESIC Editorial.

Schoenfeld, A.H. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Tymoczko, T., (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.

Villoro, L. (2009). *Creer, saber, conocer*. México: Siglo XXI.