LAS HIPÓTESIS EN ÁLGEBRA, CUESTIONES DIDÁCTICAS A CONSIDERAR EN UN ENTORNO DE ENSEÑANZA CON MATHEMATICA

Hypotheses in Algebra, Didactics issues to consider on a learning environment with Mathematica

Carmen Ordóñez, Lourdes Ordóñez, Ángel Contreras

Universidad de Jaén

Resumen

En este trabajo se realiza una investigación didáctica para determinar el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis de un teorema sobre Aritmética modular, en una demostración de Álgebra, utilizando como marco teórico el enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática. Se han diseñado unas prácticas que realizaron en el laboratorio, empleando el programa Mathematica, 132 alumnos del primer curso del Grado en Ingeniería Informática, de la Universidad de Jaén. Las respuestas de los estudiantes han sido clasificadas y cuantificadas atendiendo tanto a los conflictos semióticos manifestados, como a la influencia que tiene dicho software científico en la enseñanza y aprendizaje de estos alumnos.

Palabras clave: *hipótesis, didáctica, Álgebra, Enfoque Ontosemiótico, Mathematica*

Abstract

In this paper, it is carried out a didactic research for determine the use of students in hypotheses of theorem about Modular Arithmetic, in an Algebra proof, using the theoretical framework of the onto-semiotic approach to Mathematics Education. It has been designed practices with the Mathematica computer program that 132 students on the first year in Computer Engineering Degree from University of Jaén did in laboratory. The students answers have been classified and quantified according to semiotic conflicts showed and the influence in teaching and learning that such scientific software has in these students

Keywords: *hypotheses, didactic, Algebra, onto-semiotic approach, Mathematica.*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La demostración es un tema transversal en todas las etapas de la enseñanza de las matemáticas y adquiere diferentes características dependiendo del nivel educativo donde se desarrolle. Este trabajo está centrado en alumnos de primer curso del Grado en Ingeniería Informática de la Universidad de Jaén, etapa en la que el desarrollo del razonamiento lógico deductivo adquiere una especial importancia.

Numerosos trabajos muestran el interés en Didáctica por el tema de la demostración. En los últimos años algunos de ellos se han centrado en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el nivel universitario. Recio y Godino (2001), utilizando el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática (EOS), indican que el rendimiento en actividades de demostración de gran parte de los alumnos universitarios de primer curso es decepcionantemente bajo.

En el caso de la demostración en Algebra, Dubinsky y Yiparaki (2000) han detectado que los alumnos universitarios de varios niveles, incluyendo algunos alumnos avanzados matriculados en asignaturas de Álgebra abstracta, tienen también importantes dificultades en temas relativos a la demostración matemática. Más recientemente, Alvarado y González (2010 y 2013) realizan

Ordoñez, C., Ordoñez, L., Contreras, A. (2014). Las hipótesis en álgebra, cuestiones didácticas a considerar en un entorno de enseñanza con Mathematica. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 493-502). Salamanca: SEIEM.

exploraciones con objeto de estudiar las dificultades que tienen los estudiantes universitarios en torno a la demostración matemática y comprueban "la ausencia del dominio del lenguaje científico de los alumnos relacionado con el binomio teorema-demostración", así como, "el mal uso de las implicaciones matemáticas por la confusión entre hipótesis y demostración".

Camacho, Sánchez y Zubieta (2014) en su investigación con estudiantes de nivel avanzado de Matemáticas y Computación, sobre la lectura de la prueba matemática, analizan las justificaciones de estos alumnos al leer demostraciones y obtienen que sus habilidades para realizar esta tarea resultan muy pobres. La mayoría de las respuestas apelan sólo al contenido y no al esqueleto lógico, lo cual consideran insuficiente.

Por otra parte, el uso de los recursos informáticos, en gran auge e imprescindibles en esta titulación, provoca que la enseñanza y aprendizaje de la demostración adquiera unas características concretas debido a la influencia de las nuevas tecnologías y del lenguaje algorítmico propio de la Informática. Diferentes cuestiones didácticas surgen en la enseñanza y aprendizaje de la demostración cuando esta se desarrolla en el entorno de un software científico como Mathematica.

Respecto de las "nuevas" tecnologías, Balacheff (1994) define el término de trasposición informática y subraya que ésta "supone una contextualización del conocimiento que puede tener consecuencias importantes en los resultados de aprendizaje". Harel y Sowder (2007) aportan que

> el papel del álgebra simbólica en la reconceptualización de las matemáticas en general y de la demostración en particular suscita una pregunta crucial sobre el papel de las habilidades de manipulación simbólica en el desarrollo conceptual (…) en vista del auge del uso de las tecnologías electrónicas en educación, especialmente en sistemas informáticos de álgebra, nos podemos preguntar igualmente: ¿Podrían estas herramientas privar a los alumnos de la oportunidad de desarrollar las habilidades de manipulación algebraica necesarias para el desarrollo de una noción avanzada de la demostración, o, por el contrario, proporcionarles las mismas? (pp. 817-818).

Nuestro estudio está en la línea de estos interrogantes y forma parte de un trabajo de tesis doctoral cuyo objetivo general es describir y analizar la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en Teoría de Números, dentro de la asignatura de Matemática Discreta para los estudiantes del Grado de Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS). Uno de los objetivos específicos propuesto en el proyecto fue "Estudiar la influencia del uso del software científico Mathematica en la comprensión de hipótesis de teoremas y de esquemas de demostraciones, determinando conflictos semióticos presentes en las prácticas informáticas". Así, en esta comunicación, estudiamos las consideraciones de los alumnos acerca del papel de las hipótesis en una demostración de Aritmética modular. En Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2013), se realiza una investigación didáctica acerca de una demostración en Teoría de Números utilizando el programa Mathematica. Se obtiene que este alumnado tiene dificultades en la comprensión de este esquema de demostración y que el uso de un software científico no está exento de dificultades.

Otros trabajos respecto la enseñanza y aprendizaje con el recurso tecnológico Mathematica para estudiantes universitarios, también publicados por medio de la SEIEM, son Contreras, A. et al. (2005) o Contreras, A. y Ortega, M. (2009).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

Existen múltiples investigaciones didácticas acerca de la demostración, sin embargo no hemos encontrado estudios didácticos, a nivel universitario, acerca del papel que los alumnos dan a las hipótesis cuando realizan una demostración en Aritmética Modular utilizando el software Mathematica.

Como señalaban Harel y Sowder (2007) respecto de la demostración, "queda patente la necesidad del uso de las nuevas tecnologías, especialmente en educación", aunque dejan abierta la pregunta acerca de "la influencia de las nuevas tecnologías en el aprendizaje o desarrollo de una noción avanzada de demostración matemática". Por tanto, si utilizamos recursos informáticos como Mathematica para la enseñanza y aprendizaje de la demostración en Álgebra, esta pregunta adquiere una gran importancia y más aún, si queremos poner de relieve la consideración que hacen los alumnos acerca de las hipótesis en el desarrollo de la demostración. A este respecto Alvarado y González, (2010) exponen que los estudiantes "se suelen centrar más en el significado de la proposición, mientras que les resulta más difícil fijarse en los aspectos relativos al estado (hipótesis, conclusión, etc)" (p.74)

Por otra parte, la experiencia docente de uno de los investigadores en esta materia de Matemática Discreta con alumnos del Grado de Informática, le ha llevado a diseñar junto con otros profesores del área de Álgebra, unas prácticas informáticas para el laboratorio, de forma que el ordenador sea un facilitador (García, Ordóñez y Ruíz, 2006) y que se llevan utilizando en los últimos diez años.

Así, nos planteamos ¿Cuál es el papel que el alumno otorga a las hipótesis en el aprendizaje de la demostración matemática para alumnos del Grado en Ingeniería Informática en Teoría de Números? ¿qué impacto tiene el uso de las tecnologías en este tema? ¿qué tipos de conflictos semióticos muestran y cuales permite superar el uso del programa Mathematica? Estas cuestiones requieren de un trabajo más amplio y serán abordadas en un trabajo de tesis doctoral. El objetivo de esta investigación (una de las concreciones del proyecto general) es poner de manifiesto el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis de un teorema en el que se estudia un esquema de demostración[1] relativo al cálculo de inversos de clases de restos, en una práctica con Mathematica, utilizando las herramientas del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática.

En primer lugar, en el laboratorio de prácticas informáticas, se explica una proposición que caracteriza la existencia de inversos en los anillos de enteros módulo n. La demostración de este teorema es constructiva y deduce quien es el inverso en Z_n. Se utiliza el software Mathematica para implementar un programa que permita realizar los cálculos numéricos relativos al cálculo de la Identidad de Bézout, pues son bastante tediosos. Los inversos existen cuando se cumplen dos hipótesis: la primera, que el elemento sea no nulo; la segunda, que sea primo relativo con n.

Para abordar desde el punto de vista didáctico las cuestiones planteadas, proponemos al alumnado dos ejercicios a realizar en el laboratorio en los que no se verifican, respectivamente, cada una de las dos hipótesis anteriores y por tanto en ambos ejercicios el inverso no existe.

Las cuestiones que se proponen a los alumnos han sido elaboradas por los investigadores y fueron sometidas a juicio de expertos, profesores que componen el área de Álgebra de la Universidad de Jaén y que imparten docencia en esta materia o la han impartido en otros cursos, y son autores de distintas prácticas informáticas y manuales que se utilizan en asignaturas del Grado en Ingeniería Informática.

Analizaremos las respuestas de los estudiantes y nos centramos en caracterizar los conflictos semióticos que muestran los alumnos en esta práctica. El enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática presenta unas características metodológicas propias que marcarán esta investigación (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007 y Font, Planas y Godino, 2010). Este trabajo caracteriza los significados personales de los alumnos, observando las dificultades y errores en términos de conflictos semióticos[2].

Para la evaluación de los significados personales, se analizarán las respuestas de los estudiantes a los dos últimos ejercicios de una práctica informática. La corrección y codificación de las respuestas de los estudiantes se ha hecho siguiendo el método de otras investigaciones (Ordóñez, 2011), utilizando el programa estadístico SPSS, lo que ha hecho posible clasificar y cuantificar variables y así como poner de manifiesto si las hipótesis han sido consideradas por los alumnos en el estudio del teorema. También hemos podido obtener cuales han sido los conflictos semióticos que han emergido en la enseñanza-aprendizaje de los alumnos.

La población escogida corresponde a todo el alumnado que asistió ese día a prácticas de la asignatura de Matemática Discreta del Grado en Ingeniería Informática. La muestra consta de 132 estudiantes pertenecientes a los cinco grupos de prácticas de la asignatura, lo que supone un 70% del total de matriculados (191 alumnos). Son alumnos de primer curso y la exploración se realizó en el mes de diciembre, al final del primer cuatrimestre del curso 2012-13.

Como material, disponen de un manual (García, Ordóñez y Ruíz, 2006) en el que aparecen tanto las explicaciones teóricas como la forma de resolver los problemas con este software científico.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Nuestra investigación didáctica está orientada a determinar el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis de un teorema, en una demostración (Rosen, 2004, p. 170 y García, Ordóñez y Ruíz, 2006, p. 192) que forma parte del temario de la asignatura Matemática Discreta, del Grado en Ingeniería Informática. Concretamente, el teorema a analizar es el siguiente:

> Si $\bar{a}$ es un elemento no nulo de Z_n, entonces
>
> $\bar{a}$ admite inverso en Z_n si y sólo si $\text{mcd}\{a, n\} = 1$

Este resultado de la Aritmética Modular, permite caracterizar las unidades del anillo Z_n. La demostración en sentido hacia la izquierda es constructiva y así, el cálculo del inverso de $\bar{a}$ se realiza bajo dos hipótesis:

- ✓ La primera, $\bar{a}$ es un elemento no nulo.
- ✓ La segunda, el máximo común divisor de a y n es 1.

Para trabajar esta demostración, utilizando el programa Mathematica, disponemos de dos horas de laboratorio que distribuimos, explicando, en primer lugar, la parte teórica matemática y cómo se implementa todo el procedimiento en el ordenador. En este momento se realizan también algunos ejercicios que ejemplifican el esquema de demostración trabajado y se incide en la importancia de las hipótesis pues son las condiciones bajo las cuales se verifica la existencia del inverso. Una segunda parte de la práctica, consiste en el trabajo personal del alumno, que debe resolver una serie de ejercicios propuestos, los cuales se incluyen en el cuaderno de prácticas que entregarán al final del cuatrimestre, para ser evaluado.

En este caso, proponemos cuatro ejercicios, todos ellos personalizados, para que no haya interacción entre los distintos alumnos, aunque con las mismas características didácticas. Cada estudiante debe realizarlos y entregarlos de forma telemática para nuestro análisis.

Los dos primeros ejercicios se sitúan dentro de las hipótesis del teorema y en ellos se trabaja, con Mathematica, la demostración propuesta. Estos han sido objeto de estudio con anterioridad (Ordónez, Ordóñez y Contreras, 2013).

Los dos últimos se han diseñado para poner de manifiesto el grado de consideración de los estudiantes por cada una de las hipótesis de este teorema. Así se proponen dos situaciones que corresponden, respectivamente, a un ejemplo que no verifica cada una de dichas hipótesis. Estas son:

- Situación 1. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en Z_{DNI}
- Situación 2. Calcular, si es posible, el inverso de $\overline{2x}$ en Z_{506}, siendo x el número del puesto de ordenador que ocupa.

Análisis a priori

Para poder analizar resultados se ha elaborado un análisis didáctico a priori de ambas situaciones haciendo explícitos conflictos de significado potenciales. El EOS identifica en la actividad matemática cinco tipos de entidades u objetos primarios: situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007). Por razones de extensión, no nos ocuparemos en esta comunicación de los conflictos semióticos del lenguaje (CSL) y de los procedimientos (CSP), aunque mostramos los resultados en la tabla 1.

- Situación-problema:

Comenzaremos exponiendo la resolución del experto de la situación 1. Esto es, calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en Z_{DNI}.

Es obvio que, como las clases en Z_{DNI} se calculan a través del resto de dividir entre el DNI, entonces $\overline{DNI}=\overline{0}$, que no tiene inverso por definición, y simplemente con hacer esta observación se acabaría el ejercicio sin tener que realizar nada en el ordenador.

En esta situación, la clase a la que hay que calcularle el inverso corresponde, para todos los alumnos, con la del 0 y no verifica la primera hipótesis del teorema. Optamos por no poner directamente que calcularan la clase del 0 porque si utilizaran como datos n1=0 y n2=25000000, el programa daría un mensaje de error y el alumno no se plantearía qué estaba pasando. Así decidimos buscar un múltiplo del DNI que no fuera el cero.

Si el alumno no tiene en cuenta la hipótesis primera y hubiera aplicado el esquema de demostración basado en calcular el máximo común divisor y la Identidad de Bézout a través del programa que tienen en el manual, obtendría lo siguiente (tomando como DNI 25000000):

1. Modificaría las entradas del programa con los datos n1 y n2 siguientes
   In[]:= n1=25000000;
   n2=25000000;
2. Ejecutaría el programa dando al INTRO del ordenador.
3. Obtendría los siguientes resultados:
   Out[]= m.c.d.{25000000 , 25000000}= 25000000
   m.c.m.{25000000 , 25000000}=25000000
   Identidad de Bézout:
   25000000= 25000000·(0) +25000000·(1). (*)
4. Se debería observar que el máximo común divisor no es 1 y, por la segunda hipótesis, deducir que no existe el inverso de 25000000.

Si esta segunda hipótesis pasara también inadvertida para el estudiante y continuara la demostración, debería seleccionar como inverso el número que en la Identidad de Bézout, acompaña a 25000000. En este caso vemos que aparecen en la combinación lineal (*) el 0 y el 1. Ante esto caben tres posibilidades:

- Si elige como inverso el 0, es una enorme contradicción pues el 0 no tienen inverso.
- Si se eligiera el 1, también es contradicción pues el 1 es el inverso del 1.
- Si elige ambos 0 y 1, contradice el hecho de que el inverso es único.

Todas estas contradicciones deberían llamar la atención de que algo no va bien en la demostración y esto es, precisamente, que no verifica las hipótesis.

En el caso de la Situación 2, para el estudio de la segunda hipótesis, se propone: calcular, si es posible, el inverso de $\overline{2x}$ en Z_{506}, siendo x el número del puesto de ordenador del aula que ocupa (x=2,..,40).

Para esta práctica, el dato n1=2x es personalizado y no es la clase del 0 en Z_{506} pues $4 \leq n1 \leq 80$. Además 2x es el representante de clase canónico por lo que no hay que simplificarlo con operaciones previas.

El segundo dato se eligió por ser un múltiplo de 2, alto, y que no terminara en 2 para que el alumno no viera a simple vista que no es primo relativo con 2x.

La resolución del ejercicio pasa por aplicar el programa de Identidad de Bézout y comprobar que el máximo común divisor es múltiplo de 2, no es 1, por tanto no tiene inverso y no hay que continuar, a pesar de que el ordenador pueda calcular la Identidad de Bézout.

No se ha implementado en el ordenador toda la demostración objeto de nuestro estudio, sino que se ha preferido recurrir a él, sólo para la parte de cálculo más tediosa. Tampoco se han incluido las hipótesis en todo lo que hemos trasladado a Mathematica. El motivo ha sido que se pretende que el estudiante trabaje todos los aspectos de dicho esquema de demostración y aprenda la importancia de estas dos hipótesis en el teorema.

- Argumentaciones

Existen dos tipos: Por un lado, las que corresponden a las Matemáticas. Son argumentaciones deductivas y podríamos decir que también son argumentos constructivos, pues la demostración no sólo da la existencia del inverso sino que nos permite construirlo. Por otro lado, respecto del programa Mathematica, obtenemos argumentaciones de tipo algorítmico, que son las que nos permiten distinguir los distintos pasos para conseguir la resolución del ejercicio. Los conflictos semióticos son: $CSAM_1$: Si el mcd es 1, se deduce que el inverso no existe. $CSAM_2$: Deduce que no tiene inverso y sin embargo elige uno. $CSAM_3$: A pesar de que el mcd es distinto de 1, deduce que existe el inverso. $CSAM_4$: Razona que no existe el inverso porque el DNI es primo o porque existen divisores de cero. $CSAM_5$: Razona que no existe el inverso porque el mcd es distinto de cero. $CSAM_6$: Comprueba si el resultado es inverso del 0. $CSAMth_1$: Argumenta que el segundo número es el inverso, basándose en la posición y no se fija si acompaña al DNI. $CSAMth_2$: Se inventa el inverso a partir de datos de la Identidad de Bézout que no corresponde con la construcción dada.

- Conceptos y proposiciones
    - Propios de las Matemáticas son:

<u>Definición 1.</u> Llamaremos $Z_n=\{0, 1,\ldots, n-1\}$ al conjunto de las clases de restos módulo n.
<u>Proposición 1.</u> Z_n es un anillo conmutativo
<u>Definición 2.</u> Las unidades del anillo Z_n son aquellos elementos a, no nulos, para los que existe inverso, esto es, un elemento b de Z_n tal que a b =1
<u>Proposición 2.</u> El inverso de cada elemento de Z_n es único.
<u>Proposición 3. (Identidad de Bézout)</u>
Si a, b $\in Z-\{0\}$ y mcd{a,b}=1, entonces existen u, $v \in Z$ tales que 1 = a u + b v
<u>Proposición 4.</u>
Si $\bar{a}$ es un elemento no nulo de Z_n, entonces $\bar{a}$ admite inverso en Z_n si y sólo si mcd$\{a,$n$\}$= 1

- Propios del programa Mathematica son:

La función Mod[a,n] calcula el resto de dividir a entre n y por tanto la utilizamos para calcular la clase de a en Z_n y el programa que calcula la Identidad de Bézout (García, Ordóñez y Ruíz, 2006).
Así los conflictos semióticos potenciales asociados a conceptos y proposiciones los notaremos $CSCM_i$ y $CSCMth_i$ para los que corresponden a conceptos y proposiciones de las Matemáticas o de Mathematica respectivamente y son: $CSCM_1$: Se calcula el inverso del elemento cero. $CSCM_2$: Para un elemento no nulo, se toma el cero como inverso. $CSCM_3$: Se considera que no existe la clase de un número negativo o un número mayor que n. $CSCM_4$: Se calculan dos inversos. $CSCM_5$: No

identifica la Identidad de Bézout. $CSCM_6$: Confunde inversos en Zn con divisores de cero. $CSCMth_1$: No se calcula la clase de restos del inverso utilizando la función Mod[].

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Si analizamos la situación 1, respecto de los datos propuestos, podemos observar que la elección de los datos n1 y n2 como el DNI de cada alumno, ha dado lugar a muy pocos errores (el 3,8% de la muestra) pues es un número muy conocido por el alumno.

Recordemos que esta situación es el tercer ejercicio de la práctica realizada en el laboratorio. En blanco aparecen 9 alumnos de los 132 de la muestra. Podemos deducir que contestan un alto porcentaje de estudiantes. Esto nos indica que es un ejercicio asequible.

El siguiente diagrama de sectores nos muestra de forma muy clara, los resultados respecto de la realización correcta del ejercicio.

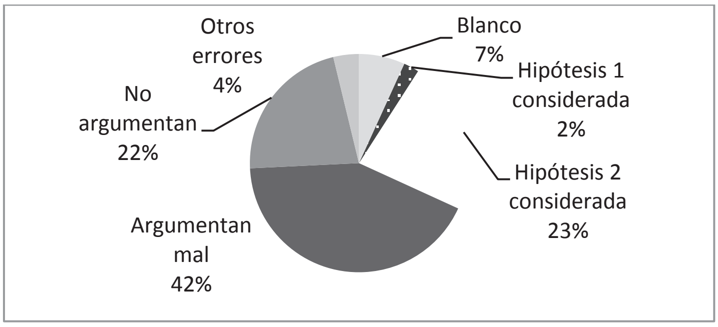

Figura 1

Tras el análisis estadístico, podemos deducir, según la figura 1, que sólo un 25% de los alumnos realizaron la situación 1 correctamente (Hipótesis 1 o Hipótesis 2 consideradas); es decir, tan sólo 33 estudiantes. De ellos: Sólo 3 (el 2%), los que no tuvieron el conflicto semiótico $CSCM_1$ (calculan el inverso del 0), fueron los que consideraron la primera hipótesis del teorema. Dos de ellos concluyeron que no existe el inverso del 0 y explican que al no verificarse la hipótesis 1, el elemento no tiene inverso. No hicieron uso del ordenador para su deducción. Son los únicos que muestran una verdadera comprensión del papel de esta hipótesis en el teorema. Otro, el alumno 32, llega a la misma conclusión pero necesita el ordenador para deducir que el inverso no existe. Como vemos en la figura 2[3], comprueba que no existe el inverso basándose primero en la segunda hipótesis, que el máximo común divisor no es 1, y luego aporta que es el 0. Así comprueba que no se verifica la hipótesis 2 y después observa que tampoco se cumple la hipótesis 1. Probablemente, este estudiante esté considerando la regla implícita que le dice que debe de usar el ordenador al estar en un laboratorio de informática.

```
m.c.d.{25000000 , 25000000}= 25000000
m.c.m.{25000000 , 25000000}=43
Identidad de Bézout: 25000000= 25000000·(0) + 25000000·(1).
```

Al ser distinto el m.c.d. de 1 el número correspondiente a mi DNI (25000000) no tiene inverso, también decir que en $Z_{25000000}$ el número 25000000 es igual a 0

Figura 2. Respuesta alumno 32

Sólo 30 personas (el 23%) deducen que no existe el inverso al considerar la hipótesis 2 pero no la hipótesis 1. Son alumnos que directamente realizan el ejercicio usando el ordenador, comprueban que el máximo común divisor no es 1 y no se paran a analizar o verificar la hipótesis 1, es decir si el elemento es cero. Aunque han realizado correctamente el ejercicio basan sus razonamientos en los cálculos proporcionados por el ordenador, no observando previamente el conjunto de hipótesis.

Observando la incidencia de los conflictos semióticos hemos obtenido los resultados que se muestran en la tabla 1. También recogemos los resultados de la situación 2 que analizaremos más adelante.

Tabla 1. Cuantificación de conflictos semióticos

Entidades primarias		Situación 1		Situación 2	
		Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto	Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto
Lenguaje	Matemáticas	7	5,3%	9	6,8%
	Mathematica	119	90,2%	13	19,8%
	Entorno	8	6,1%	7	5,3%
Argumentación	Matemáticas	57	43,2%	58	43,9%
	Mathematica	0	0%	0	0%
Conceptos y proposiciones	Matemáticas	120	90,9%	1	0,8%
	Mathematica	1	0,8%	0	0%
Procedimientos	Matemáticas	29	22,2%	21	15,9%
	Mathematica	0	0%	0	0%

En la situación 1, los conflictos semióticos más numerosos son los correspondientes a los conceptos de las Matemáticas, esto es, CSCM: lo manifiestan 120 de los 123 que respondieron. En particular, $CSCM_1$ (calcular el inverso sin considerar que es el 0) es el más frecuente, lo presentaron los 120 estudiantes. Todos ellos estiman que el cero puede tener inverso, o no observan que el cero es una clase que nunca tiene inverso y realizan el esquema de demostración que presenta el teorema. De estos 120 estudiantes, 15 mostraron también $CSCM_2$, consideran que el cero es el inverso del cero. Aunque no ha tenido un alto índice de incidencia, hay 2 casos que manifiestan que el DNI tiene dos inversos ($CSCM_4$), el 0 y el 1, lo que nos parece, en este nivel educativo, un conflicto muy significativo.

Aunque, por razones de espacio no se han incluido en este trabajo, queremos hacer notar que los conflictos del lenguaje del programa Mathematica (CSLMth [4]) también han sido muy numerosos, concretamente 119. De ellos el más representativo ha sido $CLMth_6$, con 114 estudiantes que lo manifiestan. Se puede ver en la figura 2, del alumno 32: el mcm(DNI,DNI)=43, en lugar del DNI. Este dato corresponde a un ejercicio anterior y se ha acumulado en las variables del programa. El alumno debe saber, si es estudiante de informática, con más razón, que tienen que limpiarse las variables al realizar un nuevo ejercicio. Eso se realizará saliendo del Kernel o utilizando las funciones adecuadas de Mathematica.

Respecto de las argumentaciones, 57 alumnos mostraron CSAM. Se han presentado 6 tipos de conflictos semióticos ligados a las argumentaciones aunque el más frecuente ha sido $CSAM_3$ con 55 alumnos.

Es muy importante hacer notar que 85 personas, un 64% (los que argumentan mal o no argumentan) se quedaron en el paso 3 de la resolución del experto; de ellos, 29 obtuvieron los cálculos de la Identidad de Bézout con el ordenador y no son capaces de realizar ninguna argumentación.

En el análisis de la situación 2, podemos observar que la elección de los datos n1= 2x, siendo x el número de puesto de ordenador que ocupa en el laboratorio, y n2= DNI de cada alumno, ha sido acertada pues ha dado lugar a pocos errores (solamente 9 alumnos tomaron mal los datos del ejercicio).

Se incrementaron a 15 los alumnos que presentaron el ejercicio en blanco, 6 más que en la situación anterior, que puede ser debido a que es la última situación de la práctica. Aun así, el porcentaje de estudiantes que contestan sigue siendo alto, un 88,6% de la muestra, lo que nuevamente nos indica que es un ejercicio asequible.

Recordemos que esta situación analiza los alumnos que consideran la hipótesis 2 del teorema que estudiamos. Los resultados obtenidos son similares a los anteriores, aparecen 29 estudiantes (el 22% de la muestra) que consideraron la hipótesis 2, y por tanto hicieron el ejercicio bien. Como vemos según la hipótesis 2, los datos son estables respecto de los dos ejercicios y sigue siendo muy alto el número de alumnos que resolvían el ejercicio mal (66,7% frente al 68% que lo tenían mal en el problema anterior).

Observando la tabla 1, los conflictos semióticos más significativos han sido los relativos a las argumentaciones de las matemáticas, alrededor de un 44%, muy similar a la situación 1. El más frecuente es también $CSAM_3$ con 58 alumnos.

CONCLUSIONES

En el estudio del papel que dan los alumnos a las dos hipótesis estudiadas, hemos obtenido que la hipótesis 1 ha sido considerada tan sólo por un 2% de la muestra y la hipótesis 2, ha sido tenida en cuenta por un 22% de la misma. En ambos casos, el resultado ha sido muy bajo.

En la resolución de la situación 1 no era necesario el uso del ordenador pues el 0 no admite inverso. Solo un 2% toma en consideración esta hipótesis lo que nos lleva a pensar que la hipótesis 1 resulta una *hipótesis invisible* para los estudiantes, quienes se centran sólo en la parte central del esquema de demostración e ignoran las condiciones bajo las cuales es posible realizar dicha demostración, lo que consideramos puede venir potenciado por el hecho de que esta hipótesis se sitúe al inicio del enunciado y no en la parte central del teorema, donde se encuentra el bicondicional.

Es importante tener en cuenta que estos alumnos se encuentran en el laboratorio de informática por lo que han podido aplicar la regla implícita de que es necesario usar el ordenador para resolver la cuestión planteada. En este sentido, la respuesta del alumno que se expone en la figura 2, viene a corroborar la autoridad del ordenador sobre sus propias consideraciones pues no es capaz de deducir que no existe el inverso hasta que no lo comprueba a través de los resultados que le proporciona el ordenador.

La no consideración de la hipótesis 1, les lleva a realizar argumentaciones evidentemente falsas como que el inverso es el 0, el inverso es el 1 o incluso que tiene dos inversos, sin plantearse qué está ocurriendo. El alumno, cuando el ordenador realiza los cálculos se ve enfrentado a un dilema ante el cual: o abandona el ejercicio sin argumentar (un 22%), o manifiesta graves conflictos semióticos relativos al concepto de inverso, su unicidad, divisores de cero,… que no son capaces de superar. Esto nos confirma nuevamente la prácticamente nula consideración de esta hipótesis.

El análisis de la situación 2 nos ha mostrado nuevamente que la hipótesis 2 ha sido muy poco considerada, tan sólo por un 22% del alumnado, que fueron los que realizaron bien el ejercicio. De los restantes, alrededor del 16% realizan los cálculos con el ordenador pero no continúan con la demostración ni argumentan nada. El conflicto semiótico de argumentación $CSAM_3$, pone de manifiesto que un 43,9% argumenta la existencia de inverso a pesar de que no son primos relativos, es decir obtienen un inverso.

A la hora de trabajar en un entorno de enseñanza con Mathematica hemos de tener en cuenta también todo lo relativo al lenguaje pues es notable el número de conflictos semióticos CLMth que muestran los alumnos en este objeto primario, aunque como hemos dicho por razones de espacio, no incluimos su estudio.

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación I+D+i EDU2012-32644.

Referencias

Alvarado, A y González, M.T. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática. Estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias,* 28 (1), 73-84

Alvarado, A y González, M.T. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 16 (1), 37-63.

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique des mathématiques, In Artigue et al. (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La pensée sauvage éditions, Grenoble, 364-370.

Camacho,V., Sánchez J.J. y Zubieta, G. (2014) Los estudiantes de ciencias, ¿pueden reconocer los argumentos lógicos involucrados en una demostración? *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 117-138.

Contreras, A. et al. (2005). Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. *IX Simposio de la SEIEM*, 271-282.

Contreras, A. y Ortega, M. (2009). Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa Mathematica. *Comunicación en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis. XIII Simposio de la SEIEM.*

Dubinsky, E. y Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J Kapput (Eds), *Research in collegiate mathematics education IV,* 239-286. Providence, RI: American Mathematical Society

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2), 89-105.

García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C. y Ruiz, J.F. (2006). Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica. *Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.*

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque onto-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26 (1), 39-88.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of National Council of Teachers of Mathematics*, 805-842.

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 411-420. Bilbao: SEIEM.

Ordóñez, L. (2011). Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida. *Tesis doctoral. Universidad de Jaén.*

Recio, A.M., y Godino J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48*,* 83-99.

Rosen, K.H. (2004). Matemática Discreta y sus aplicaciones. *Ed McGraw-Hill. 5ª Edición.*

[1] En el sentido de Harel y Sowder (2007, p. 809)
[2] (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 133)
[3] Por motivos de protección de datos, en la respuesta del alumno ha sido modificado exclusivamente su DNI siendo sustituido por 25000000 y manteniéndonos fieles a su respuesta.
[4] En Ordóñez, Ordóñez y Contreras, (2013) se establece una clasificación de los conflictos semióticos para el lenguaje expuesta en la tabla 1. En este trabajo, añadimos $CSLMth_6$ (el alumno no limpia las variables) que corresponde al núcleo.