EXPLORANDO ASPECTOS RELEVANTES DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE LA DERIVADA DE PROFESORES EN FORMACIÓN INICIAL

Exploring Relevant Aspects of Prospective Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge on the Derivative

Luis R. Pino-Fan[a], Juan D. Godino[b], Vicenç Font[c]

[a]Universidad de Los Lagos, [b]Universidad de Granada, [c]Universitat de Barcelona

Resumen

En el presente trabajo se informa de los resultados obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario que se ha diseñado para explorar algunos aspectos relevantes del conocimiento de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. El diseño del cuestionario se presenta en la primera parte de este trabajo. Los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes evidencian tanto una desconexión entre los distintos significados parciales de la derivada como la necesidad de potenciar el conocimiento especializado del contenido. Este aprendizaje puede hacerse mediante actividades que favorezcan el uso e identificación de objetos matemáticos, sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas.

Palabras clave: *formación de profesores, conocimiento del profesor, enfoque ontosemiótico, prácticas matemáticas, derivada.*

Abstract

In this paper we present results obtained from the application of a questionnaire that we have designed to explore the content knowledge on derivative of prospective high school teachers. The questionnaire design is presented in the first part of the article. The analysis of the students' responses show both a disconnection between the different partial meanings of the derivative as well as the need to enhance the specialized content knowledge through activities that encourage the use and identification of the mathematical objects, their meanings and the processes involved in the solution of mathematical tasks.

Keywords: *teacher's education, teacher's knowledge, onto-semiotic approach, mathematical practices, derivative.*

PROBLEMA Y ANTECEDENTES

Las características de la comprensión de los estudiantes de Bachillerato y primeros cursos de universidad del concepto de derivada es un tema que ha sido ampliamente investigado por diversos autores (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2011). No obstante, aunque también ha sido de interés caracterizar los conocimientos de los profesores para una enseñanza efectiva de la derivada (Gavilán, García y Llinares, 2007; Badillo, Azcárate y Font, 2011; Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares, 2012), pocos han sido los estudios centrados en los profesores en relación a la derivada. Algunos de estos trabajos han centrado la atención en profesores en ejercicio y otros en estudiantes para profesor de matemáticas, usando diferentes marcos teóricos para interpretar la naturaleza del concepto de derivada, así como del conocimiento y comprensión del mismo.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., Font, V. (2014). Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 513-522). Salamanca: SEIEM.

En este artículo presentamos resultados parciales de una investigación más amplia (Pino-Fan, 2013) centrada en la caracterización de algunos aspectos relevantes de los conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) de futuros profesores de matemáticas de bachillerato. Se interpreta el CDM en el sentido propuesto en Godino (2009) quien, aplicando el "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), interpreta y amplía las categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas propuestas por otros autores (Shulman, 1986; Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), proponiendo además, niveles y herramientas para el análisis de cada una de esas categorías.

Así, en este artículo nos proponemos, por un lado, ejemplificar el uso de las "herramientas teórico-metodológicas" (sistemas de prácticas y configuración de objetos y procesos) que se contemplan dentro del modelo CDM, para el análisis y caracterización del conocimiento de los profesores, referente a la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático. Por otro lado, y para realizar dicha ejemplificación, caracterizamos el conocimiento –referente a la faceta epistémica del CDM– de una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato, sobre la derivada. Con este fin se diseñó y aplico a dicha muestra un cuestionario que incluye tres tipos de tareas sobre derivadas. De este cuestionario se ha elegido una tarea, la cual discutimos en esta comunicación.

En la siguiente sección describimos las nociones del marco teórico que se usan en el artículo y la metodología. En la sección 3 describimos las configuraciones de objetos y procesos manifestadas por la muestra de estudiantes, a propósito de la resolución de una de las tareas del cuestionario construido. Contemplamos el análisis relativo a una tarea por motivos de espacio. En la sección 4 presentamos resultados globales, para dicha tarea, referidos a la incidencia de los tipos de configuraciones cognitivas identificadas y sobre el grado de corrección de las respuestas. Finalmente interpretamos los resultados en términos de las necesarias relaciones entre los tipos de conocimientos del profesor de matemáticas, restringido a la faceta epistémica.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

El análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos se realiza en el EOS distinguiendo en los mismos seis facetas o dimensiones: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica (Godino, Batanero y Font, 2007). Para cada faceta se distinguen distintas componentes y se han desarrollado diversas herramientas que permiten su análisis. Por ejemplo, la faceta epistémica de un proceso de estudio matemático refiere a los significados institucionales puestos en juego en cada una de las fases de dicho proceso (preliminar, diseño, implementación y evaluación). Tales significados son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos. Mientras que la faceta cognitiva refiere a los significados personales de los estudiantes descritos en los distintos momentos de su desarrollo en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de objetos y procesos.

Estas herramientas de análisis didáctico han sido utilizadas para elaborar un sistema de categorías de los conocimientos del profesor de matemáticas que designa como modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de los profesores. Para nuestra investigación hemos adoptado este modelo (CDM) el cual ha sido planteado por Godino (2009) y refinado en diversas publicaciones (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013), al seno del EOS.

Cuando el foco de atención son los conocimientos que el profesor de matemáticas debe poner en juego como organizador y gestor de un proceso de enseñanza y aprendizaje, tales conocimientos incluyen los relativos a cada una de las seis facetas implicadas en tales procesos. Así, cuando se habla de la faceta epistémica del CDM se refiere al conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto institucional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa (Pino-Fan, Godino y Font, 2013). En este documento nos centramos en la faceta epistémica del CDM de futuros profesores sobre la derivada. Para caracterizar los conocimientos referentes a la faceta epistémica utilizamos las herramientas *prácticas matemáticas* (descripción en líneas generales de la actividad matemática realizada por los futuros profesores) y *configuración de objetos y procesos* (identificación y descripción de elementos lingüísticos, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos, sus significados de uso, y los procesos involucrados en dichas prácticas), nociones que nos proporciona el marco teórico (EOS) al cual nos apegamos.

Dado que nuestra metodología es de tipo mixta, además de la variable *tipo de configuración cognitiva* (variable cualitativa), para el análisis cuantitativo de las respuestas, consideramos la variable *grado de corrección*, para la cual tomamos en cuenta los siguientes casos: respuesta correcta, respuesta parcialmente correcta, respuesta incorrecta y no responden.

Sujetos y contexto

La prueba se aplicó a una muestra de 53 estudiantes de los últimos cursos (sexto y octavo semestre) de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán en México. Dicha licenciatura tiene una duración de cuatro años (8 semestres). Cabe señalar que los estudiantes en nuestro estudio, futuros egresados de la licenciatura en enseñanza de las matemáticas, suelen trabajar como profesores en los niveles de bachillerato o universitario en el estado de Yucatán en México. Los 53 estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario habían cursado cálculo diferencial en el primer semestre de la licenciatura y, a lo largo de ella, tomaron otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También habían cursado materias relacionadas con las matemáticas y su didáctica.

El cuestionario

El cuestionario que hemos diseñado consta de nueve tareas y lo hemos denominado *Cuestionario sobre la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de la Derivada (Cuestionario FE-CDM-Derivada)*. Se centra, fundamentalmente, en la evaluación de aspectos parciales de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada. Dichos aspectos parciales, según lo planteado en Pino-Fan, Godino y Font (2013), están relacionados con los conocimientos del contenido matemático.

De esta forma, las tareas incluidas en el cuestionario responden básicamente a dos características. Primeramente, consideramos que las tareas deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los futuros profesores respecto del significado global u holístico del objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos sentidos para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación). La segunda característica de los ítems seleccionados es que responden a los diferentes tipos de representaciones activados en los tres subprocesos, que según Font (2000), intervienen en el cálculo de la función derivada: a) traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$; b) el paso de una forma de representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$; y c) traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$. Así, podemos decir que el cuestionario contempló tres tipos de tareas, todas relacionadas con el contenido matemático (Pino-Fan, Godino y Font, 2013): (1) aquellas que piden poner en juego el *conocimiento común del contenido* (este conocimiento hace referencia a la resolución de tareas matemáticas que se proponen usualmente en el currículo del bachillerato); (2) aquellas que requieren de aspectos parciales *conocimiento del contenido especializado* (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática, etc.); y (3) aquellas que requieren del *conocimiento ampliado* (generalizar tareas sobre conocimiento común y/o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo de bachillerato). La tarea que es objeto de estudio en este trabajo, pertenece a este tercer grupo.

La tarea

A continuación, por motivos de espacio, se presenta una de las tareas incluidas en el cuestionario FE-CDM-derivada, la cual hemos seleccionado para su discusión en este trabajo, puesto que consideramos que con dicha tarea se ilustran tanto los criterios usados para su diseño como los usados en el proceso de análisis de los datos derivados de su aplicación.

La Tarea 8 (Figura 1), tomada de Çetin (2009), proporciona información sobre el conocimiento ampliado de los profesores, ya que se trata de una aproximación a la derivada de una función (descrita por los valores de la tabla) en el punto t = 0,4 a través de valores numéricos de dicha función. Además, la tarea 8 no es un problema escolar típico del nivel bachillerato, al menos no en México, y requiere para su solución de la comprensión del objeto derivada por parte de los futuros profesores, al menos en su acepción como razón instantánea de cambio, y concretamente, la derivada en un punto como velocidad instantánea. La solución de esta tarea se puede realizar mediante diferentes métodos, por ejemplo, la interpolación polinómica de Lagrange, lo cual sustenta la categorización de esta tarea como evaluadora del conocimiento ampliado. Hay que considerar que los futuros profesores no contaban con el apoyo de ningún tipo de recursos tecnológicos al momento de resolver el cuestionario.

Tarea 8

Una pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura. $f(t)$ denota la distancia a la que se encuentra la pelota del suelo en un tiempo t. Algunos valores de $f(t)$ se recogen en la siguiente tabla:

t (sec.)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
f(t)(m.)	11	12.4	13.8	15.1	16.3	17.4	18.4

De acuerdo con la tabla, ¿cuál es la velocidad de la pelota cuando alcanza una altura en t = 0.4 segundos? Justifica la elección de tu respuesta.

a) 11.5 m/s b) 1.23 m/s c) 14.91 m/s d) 16.3 m/s e) Otro

Figura 1. Tarea 8 del cuestionario FE-CDM-Derivada

CONFIGURACIONES COGNITIVAS ASOCIADAS A LA SOLUCIÓN DE LA TAREA 8

Mediante las soluciones que los futuros profesores de bachillerato dieron a la tarea 8, se pudieron identificar 4 tipos distintos de configuraciones que hemos denominado: 1) patrón numérico; 2) uso de la relación física v = d/t; 3) aproximación por la izquierda o derecha, y 4) aproximación bilateral. Es importante señalar que, inicialmente, esperábamos (a excepción de la opción a, Figura 1), respuestas parecidas a las reportadas en el trabajo de Çetin (2009), en donde los estudiantes resolvieron la tarea mediante los siguientes procedimientos:

a) Sumando las distancias entre un tiempo y otro y dividiendo el resultado por seis, es decir $\frac{1}{6}\left[\left(f(0.1)-f(0)\right)+\left(f(0.2)-f(0.1)\right)+\left(f(0.6)-f(0.5)\right)\right]$, lo que da como resultado la opción b.

b) Sumando las imágenes de cada uno de los tiempos dados y dividiendo el resultado por siete, es decir, $\frac{1}{7}\left[f(0)+f(0.1)+\cdots+f(0.6)\right]$, lo que da como resultado la opción c.

c) Eligiendo la imagen de t = 0.4, f (0.4), como la velocidad puntual de la pelota, lo que resulta en la opción d.

Sin embargo, los cuatro tipos de configuraciones que identificamos, tienen características distintas. A continuación analizamos cada uno de dichos tipos de configuraciones mediante un ejemplo prototípico para cada una de ellas.

Configuración cognitiva 1: patrón numérico

La característica de este tipo de solución, aunque los estudiantes que la propusieron no llegaron a concretarla, es que a partir de los datos numéricos presentados en la tabla (puntos pertenecientes a una función), se intenta determinar el patrón o regla de correspondencia que define la función. La Figura 2 presenta una de las respuestas que ilustra este tipo de solución.

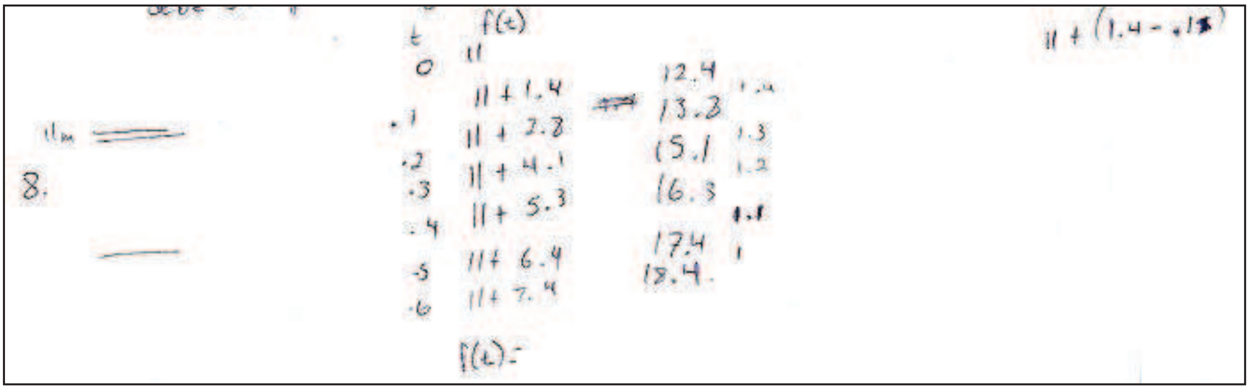


Figura 2. Solución dada a la tarea 8 por el estudiante A

Puede observarse que el estudiante F utiliza elementos lingüísticos que hacen referencia a números o cantidades que representan tanto al tiempo transcurrido "t = 0, 0.1, ..., 0.6" como a la altura de la pelota para un tiempo t determinado "$f(t)$ = 11, 11+1.4, ..., 11+7.4". Luego haciendo uso de la proposición "una pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura [$f(t)$ =11] para t=0", realiza una descomposición de las alturas $f(t)$ "12.4 = 11+1.4, 13.8 = 11+2.8,..., 18.4 = 11+7.4". Luego procede por ensayo y error para encontrar un patrón que le ayude a determinar la expresión para $f(t)$, lo cual se evidencia con la expresión "11+(1.4 – .1)". El estudiante A no logra concretar su solución. Al parecer este estudiante no se percata de que el procedimiento que ha usado para resolver la tarea es quizá el más complicado de todos los posibles. Tratar de encontrar una expresión simbólica para $f(t)$ a partir de los siete puntos dados, es una tarea complicada. Es posible encontrar una función que se comporte aproximadamente igual a lo largo de esos siete puntos; no obstante, esta tarea es difícil puesto que se refiere a una función polinómica de, al menos, grado seis.

Configuración cognitiva 2: uso de la relación física $v = d/t$

La Figura 3 muestra la solución que da el estudiante B a la tarea 8 y que es característica de este tipo de configuración.

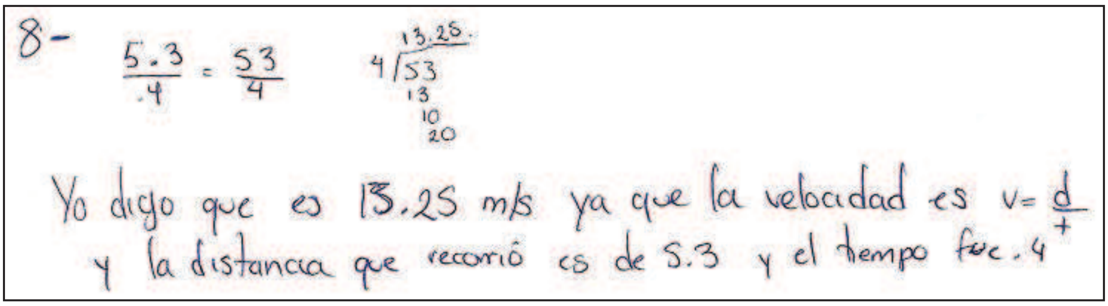


Figura 3. Solución de la tarea 8 por el estudiante B

Como se puede observar en la Figura 3, la característica central de este tipo de solución es el empleo tanto de la proposición "velocidad es igual a distancia entre tiempo (v = d/t)" como de la desconsideración que se realiza del objeto derivada como velocidad instantánea. Así, el estudiante evidencia elementos lingüísticos simbólicos y verbales que evocan a la consideración de conceptos tales como velocidad (promedio), distancia, tiempo; y proposiciones tales como “v = d/t” y “Yo digo que es 13.25 m/s...”.

El procedimiento usado fue el cálculo de la velocidad promedio de la pelota entre $t = 0$ y $t = 0.4$, mediante la relación v = d/t. Así, el estudiante B halla el tiempo transcurrido entre $t = 0$ y $t = 0.4$ “el tiempo fue de 0.4 [0.4 s – 0 s]” y la distancia que recorre la pelota en ese lapso “la distancia que recorrió es de 5.3 [16.3 m – 11 m]”. Luego calcula la velocidad promedio “5.3/0.4 = 53/4” y da su respuesta mediante la expresión “13.25 m/s” la cual justifica “ya que la velocidad es v = d/t y la distancia que recorrió [la pelota] es de 5.3 y el tiempo fue de 0.4”.

El estudiante B parece no percatarse de que la tarea requiere la interpretación de la derivada en un punto como velocidad instantánea. Tampoco tiene en cuenta la relación entre velocidad promedio (v=d/t) y la pendiente de una recta secante que corta a la función en $t = 0$ y $t = 0.4$, relación que le habría ayudado a reconocer que su respuesta era incorrecta. Con lo anterior, parece argumentado que el estudiante B no muestra evidencia del conocimiento matemático ampliado requerido para resolver la tarea.

Configuración cognitiva 3: aproximación por la izquierda o por la derecha

Este tipo de configuración tiene muchas similitudes con el tipo anterior. Entre las distinciones más notables se encuentra el hecho de que los estudiantes no consideran (al menos explícitamente) la relación v = d/t, y la otra es que para calcular la velocidad promedio se tomaron valores más próximos a $t = 0.4$ s (por ejemplo t = 0.3 s). La Figura 4 muestra la solución que da un estudiante (C) y que es prototípica de este tipo de configuración.

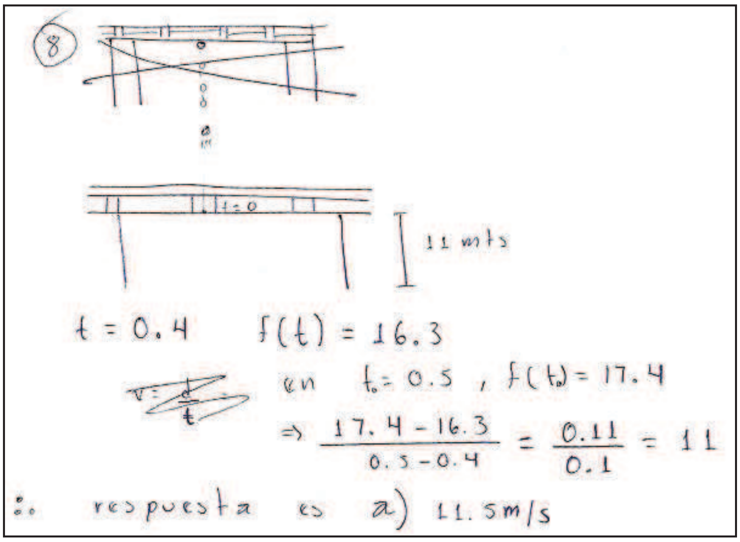


Figura 4. Solución de la tarea 8 dada por el estudiante C

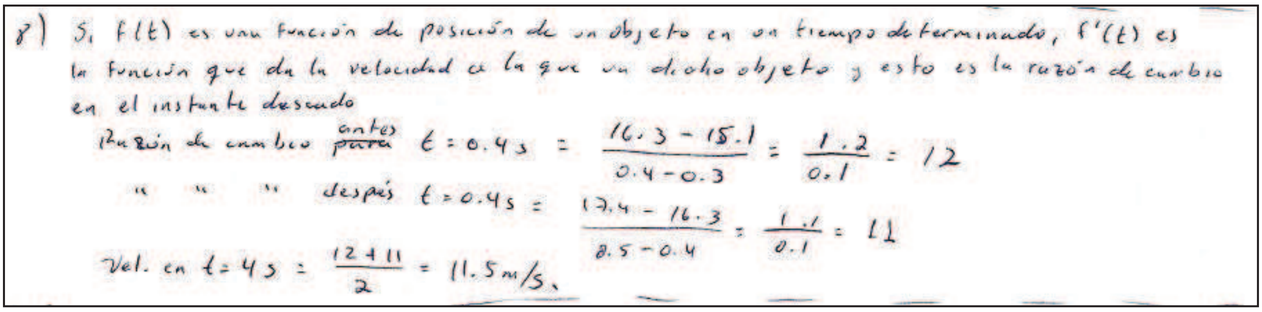
En la solución que se presenta en la Figura 4, se observan elementos lingüísticos icónicos (dibujo del puente) y simbólicos que dan evidencia tanto de conceptos tales como distancia, tiempo y velocidad promedio; como de proposiciones tales como “la pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura [$f(t) = 11$ para $t = 0$]” y “velocidad es igual a distancia entre tiempo v = d/t”. A partir de estos objetos matemáticos, el estudiante C desarrolla un procedimiento centrado en el cálculo de la velocidad promedio de la pelota entre los tiempos t = 0.4 y t = 0.5 y considerando un incremento h = 0.1 (más pequeño que en el tipo de solución anterior), obtiene su respuesta “11”.

A pesar del error en el que incurre el estudiante al establecer que el resultado de la resta 17.4–16.3 = 0.11, afirmamos que su solución es una aproximación por la derecha a la velocidad de la pelota en el instante $t = 0.4$, ya que considera un tiempo posterior ($t = 0.5$) para el cálculo de la velocidad promedio; y dicho error no afecta a la globalidad de su razonamiento ni de los objetos matemáticos primarios que moviliza en su solución. En este caso, el procedimiento sí que es usado por el estudiante como argumentación para su respuesta. La afirmación, "por tanto la respuesta es a) 11.5 m/s", la propone debido a que es la opción más parecida y cercana al resultado que ha obtenido con sus cálculos.

Al igual que en el caso anterior, no se tiene evidencia suficiente de que el estudiante C se haya percatado de que en realidad ha calculado la velocidad promedio de la pelota (entre $t = 0.4$ y $t = 0.5$) y no su velocidad instantánea en el instante $t = 0.4$.

Configuración cognitiva 4: aproximación bilateral

La característica más importante en esta configuración es la aproximación bilateral que se realiza a la derivada de la función en el punto t = 0.4, a través de valores numéricos de la función. Lo anterior también se conoce como derivada numérica. La Figura 5 muestra la solución dada por el estudiante D, la cual ilustra este tipo de configuración cognitiva.


8) Si f(t) es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado, f'(t) es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto y esto es la razón de cambio en el instante deseado

Razón de cambio antes para $t = 0.4\,s = \frac{16.3 - 15.1}{0.4 - 0.3} = \frac{1.2}{0.1} = 12$

" " " después $t = 0.4\,s = \frac{17.4 - 16.3}{0.5 - 0.4} = \frac{1.1}{0.1} = 11$

Vel. en $t = 4\,s = \frac{12+11}{2} = 11.5\,m/s$.

Figura 5. Solución dada a la tarea 8 por el estudiante D

El estudiante D comienza la solución de la tarea indicando "Si $f(t)$ es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado, $f'(t)$ es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto y esto es la razón de cambio en el instante deseado". De esta primera expresión dada por el estudiante, se puede inferir el dominio de conceptos centrales tales como función (posición de un objeto respecto del tiempo), derivada (como función velocidad), y la derivada en un punto interpretada como razón de cambio instantánea. También aparecen proposiciones tales como "$f(t)$ es una función de posición de un objeto en un tiempo determinado" y "$f'(t)$ es la función que da la velocidad a la que va dicho objeto" y una última que da cuenta de la comprensión que tiene el estudiante de la tarea "…y esto es la razón de cambio en el instante deseado". Esta última proposición sugiere que pretende hallar la razón de cambio en el instante t = 0.4. Esto último se hace más evidente a partir del elemento lingüístico que revela el procedimiento que sigue.

Primero considera una "razón de cambio antes de t = 0.4 s" que se refiere al cálculo de la razón de cambio o velocidad promedio de la pelota entre los tiempos t = 0.3 y t = 0.4 "$\frac{16.3-15.1}{0.4-0.3}=\frac{1.2}{0.1}=12$" (aproximación a la razón de cambio en el instante t = 0.4 por valores de la izquierda y con incremento h = 0.1). Luego considera una aproximación "después de t = 0.4 s", que hace referencia al cálculo de la razón de cambio o velocidad promedio de la pelota entre los tiempos t = 0.4 y t = 0.5 "$\frac{17.4-16.3}{0.5-0.4}=\frac{1.1}{0.1}=11$" (aproximación a la razón de cambio en el instante t = 0.4 por valores de la derecha y con incremento h = 0.1). A partir de estas velocidades promedio el estudiante D calcula la razón de cambio instantánea para t = 0.4 "velocidad en $t = 0.4s = \frac{12+11}{2} = 11.5\,m/s$" (aproximación bilateral a la velocidad de la pelota en el instante t = 0.4 s, mediante el "promedio" de las velocidades promedio, con t = 0.4 en el centro del intervalo considerado).

RESULTADOS Y DISCUSIONES

En el caso concreto de la Tarea 8, se consideraron correctas aquellas respuestas en las que se obtuvo la velocidad pedida de la pelota a partir de procedimientos y justificaciones válidas. Las respuestas correctas están relacionadas con el tipo de configuración por *aproximación bilateral*. Las respuestas parcialmente correctas, relacionadas con la configuración por *aproximación por la izquierda o derecha*, fueron aquellas en las que se utilizaron procedimientos y justificaciones que no son del todo erróneos pero tampoco son válidos para encontrar la velocidad pedida. Como incorrectas se consideraron aquellas respuestas en las que no se halla la velocidad de la pelota para t = 0.4, debido a que los procedimientos seguidos y las justificaciones dadas no eran válidos. Las respuestas incorrectas están relacionadas con los tipos de configuraciones *patrón numérico* y *uso de la relación física* $v = d/t$. La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos para el grado de corrección de la tarea 8.

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes para el grado de corrección de la tarea 8

Grado de Corrección	Tarea 8	
	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	1	1,9
Parcialmente correcta	5	9,4
Incorrecta	23	43,4
No responden	24	45,3
Total	53	100

Es posible observar a partir de los datos que se presentan en la Tabla 1 que tan sólo un estudiante para profesor (1,9%) logra resolver correctamente la tarea, y cinco (9,4%) dan una respuesta parcialmente correcta. Esto sugiere que, al menos, el 88,7% de los futuros profesores exhiben carencias respecto del conocimiento matemático ampliado requerido para resolver la tarea 8.

Por su parte, la Tabla 2 presenta los resultados obtenidos respecto a la variable tipo de configuración cognitiva para la tarea 8.

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes para el tipo de configuración cognitiva de la tarea 8

Tipo de configuración cognitiva	Tarea 8	
	Frecuencia	Porcentaje
Patrón numérico	3	5,7
Uso de la relación física $v = d/t$	13	24,5
Aproximación por la izquierda o derecha	4	7,5
Aproximación bilateral	2	3,8
No dan evidencia de su solución	31	58,5
Total	53	100

A partir de los datos obtenidos en el análisis realizado para cada tipo de configuración cognitiva se puede observar, en la Tabla 2, que 17 (32%) de los futuros profesores parecen no distinguir la diferencia entre función derivada y derivada en un punto. Las configuraciones cognitivas asociadas a la actividad matemática desarrollada por estos 17 profesores están contempladas en: "uso de la relación física $v = d/t$" y "aproximación por la izquierda o derecha". Este resultado, referente a la problemática para distinguir la diferencia entre la función derivada y la derivada en un punto ha sido reportado en otras investigaciones (Inglada y Font, 2003; Badillo, Azcárate y Font, 2011). Esta desconexión aparente entre la interpretación de la derivada en un punto y la función derivada induce al error de responder la pregunta, ¿cuál es la velocidad de la pelota en el instante t = 0.4 s?, mediante el cálculo de la velocidad promedio. Parece probado que los futuros profesores no relacionan los distintos significados para la derivada. Los estudiantes parecen ignorar que la relación $v = d/t$ representa la velocidad promedio de la pelota correspondiente a dos tiempos distintos. Esta velocidad promedio se relaciona a su vez con la pendiente de alguna recta secante a la función desplazamiento, lo cual no se corresponde con una interpretación para la derivada.

REFLEXIONES FINALES

En el presente trabajo hemos caracterizado el conocimiento, referente a la faceta epistémica del CDM, de una muestra de futuros profesores de secundaria/bachillerato en México. Para dicha caracterización hemos utilizado dos herramientas "teórico-metodológicas" provistas por el marco teórico al que nos apegamos: prácticas matemáticas y configuración de objetos y procesos. El análisis de las prácticas matemáticas, objetos y procesos, se muestra como una herramienta potente para la identificación y caracterización de los conocimientos común, especializado y ampliado, en tanto que proporciona pautas y criterios para analizar dichos tipos de conocimientos manifestados por los futuros profesores. Las configuraciones cognitivas caracterizadas para la tarea 8, permiten identificar los significados que los futuros profesores atribuyen a los objetos puestos en juego en las soluciones dadas a las tareas. Las categorías, o tipos de configuraciones cognitivas, en las cuales se han agrupado las soluciones que éstos dan a cada una de las tareas, se obtienen y describen a partir de las configuraciones de objetos y procesos evidenciadas en sus soluciones de las tareas.

Los resultados obtenidos a partir del análisis, cuantitativo y cualitativo, de las resoluciones que los estudiantes dieron a las tareas incluidas en el *Cuestionario FE-CDM-Derivada*, señalan que los futuros profesores exhiben ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento común y ampliado sobre la derivada. Resultados como los obtenidos en la Tarea 8, objeto de discusión para esta comunicación, muestran las dificultades de los futuros profesores cuando tienen que usar la derivada como razón instantánea de cambio en el caso de una situación de cierta complejidad.

En general, se ha evidenciado cómo el conocimiento común del contenido, no es suficiente para abordar tareas propias de la enseñanza, para las que se requiere no sólo cierto nivel de conocimiento especializado sino también de conocimiento ampliado. Así mismo, los resultados de la globalidad del cuestionario, muestran una aparente desconexión entre los distintos significados de la derivada en las respuestas de los futuros profesores. Tanto el diseño del cuestionario como las respuestas de los futuros profesores muestran el complejo entramado de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de las tareas relacionadas con la derivada. La toma de conciencia de esta complejidad es necesaria tanto para los formadores, para que den oportunidades a los maestros de desarrollar el conocimiento requerido para la enseñanza de la derivada, como para los propios futuros profesores, para que puedan desarrollar y evaluar la competencia matemática en sus futuros alumnos.

Reconocimiento

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores: EDU2012-32644 (Universidad de Barcelona) y EDU2012-31869 (Universidad de Granada).

Referencias

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), pp. 399–431.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), pp. 191-206.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. Journal for Research in Mathematics Education*, 31*(5), pp. 557–578.

Ball, D.L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), pp. 241-247.

Ball, D.L., Lubienski, S.T., & Mewborn, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In Richardson, v. (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Çetin, N. (2009). The ability of students to comprehend the function-derivative relationship with regard to problems from their real life. *PRIMUS*, *19*(3), pp. 232-244.

Font, V. (2000) Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada. Tesis doctoral, Universitat de Barcelona.

García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(5), pp. 1023-1045.

Gavilán, J., García, M., & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las ciencias, 25*(2), pp. 157-170.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, pp. 13-31.

Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), pp. 127-135.

Godino, J. D. & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325–3326). Antalya, Turkey: CERME.

Hill, H.C., Ball, D.L., & Schlling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, pp. 372-400.

Inglada, N., y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental. *XIX Jornadas del SI-IDM de Córdoba*, pp. 1-18.

Pino-Fan, L. (2013). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.

Pino-Fan, L., Font, V. & Godino, J. D. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. & Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (1ª Parte). *REVEMAT, 8*(2), 1 – 49.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matematica Pesquisa, 13*(1), pp. 141-178.

Sánchez–Matamoros, G., García, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), pp. 85–98.

Sánchez–Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), pp. 4-14.