

LA VARIABLE SINTÁCTICA EN EL PASO DEL LENGUAJE NATURAL AL ALGEBRAICO

The syntactic variable in the passage from natural to algebraic language

Carlos Soneira, María José Souto, Ana Dorotea Tarrío

Universidad de A Coruña

Resumen

En este trabajo se analiza desde el punto de vista cognitivo el cambio de registro semiótico desde el lenguaje natural al algebraico. La dificultad del proceso viene determinada, entre otras, por dos tipos de variables, una ligada a la complejidad sintáctica del lenguaje natural, y otra a la necesidad que en ocasiones existe de movilizar objetos matemáticos aludidos solo implícitamente y que a su vez provoca cambios en la organización sintáctica de un registro a otro. Con una muestra de estudiantes universitarios de primer curso de grado aplicamos técnicas de contraste de hipótesis y medidas no paramétricas de tamaño del efecto para estudiar la incidencia de las dos variables, tanto por separado como condicionadas entre sí. Los resultados muestran que ambas influyen en el proceso, si bien de forma distinta y con algunas relaciones entre sí. Se discute la aplicación al diseño de instrucción.

Palabras clave: *representación semiótica, conversión, complejidad sintáctica.*

Abstract

This article analyzes the change of semiotic register from natural to algebraic language from a cognitive point of view. The difficulty of the process is determined by, among others, two kind of variables, one linked to the syntactic complexity, and other to the necessity of mobilizing implicit mathematical content and dealing with changes in the syntactic organization between registers that sometimes occurs. Over a sample of first course university degree students we apply non parametric hypothesis test and effect size in order to study the influence of each variable, both separately and conditional. The results indicate that both variables have influence on the process but in a different way and with some relations between each other. Applications to instruction design are discussed.

Keywords: *semiotic representation, conversion, syntactic complexity.*

INTRODUCCIÓN

En Educación Matemática, las representaciones y los sistemas de representación semiótica juegan un papel fundamental en distintos marcos teóricos, como el PMA (Dreyfus, 1991), ELOS (Socas, 2007), EOS (Font, Godino y D'Amore, 2007), o el enfoque cognitivo de Duval (1993, 2006). De las varias interpretaciones de la noción de representación, nos centraremos en la de “cuerpo lingüístico, o sistema de lenguaje” (Goldin y Janvier, 1998). Esta interpretación interviene en el proceso de aprendizaje, pues aun asumiendo la naturaleza mental del conocimiento matemático, los registros semióticos son fundamentales para la formación y aprehensión de las propias representaciones internas. En este sentido, Golding (1998) propone una correspondencia explícita entre una representación externa y la una interna concebida como la competencia cognitiva para construir y manipular la externa; Duval (2006) desde un enfoque cognitivo sostiene que las representaciones semióticas útiles en matemáticas son representaciones semióticas interiorizadas.

Por otro lado, varios autores ponen de manifiesto la especial relevancia del lenguaje verbal natural en el aprendizaje de las matemáticas. Es el más usado por el docente durante las clases para dar

explicaciones sobre el propio libro de texto; el estudiante lo usa para comunicar sus ideas y la verbalización del pensamiento propio aporta al estudiante feedback sobre el estado del aprendizaje (Pimm, 1987).

Este trabajo continúa y completa el estudio iniciado en (Soneira, Souto y Tarrío, en preparación) donde, mediante un estudio intra-sujeto se analizan procesos cognitivos que tienen lugar cuando un sujeto intenta expresar en lenguaje algebraico un enunciado dado en lenguaje verbal natural. En concreto se discute la relación entre la competencia para movilizar mentalmente resultados matemáticos no mencionados explícitamente en el enunciado verbal pero esenciales para obtener la expresión algebraica, y la competencia para manejar estructuras sintácticas complejas en lenguaje natural. Como resultado de (Soneira et al, en preparación) se aprecian diferencias estadísticamente significativas en el desempeño de la tarea de cambio de registro en función de si hay que movilizar o no resultados implícitos, que la complejidad sintáctica sólo afecta significativamente al proceso de cambio cuando no es necesario movilizar resultados implícitos, y que las dificultades asociadas a la movilización de resultados son mucho mayores que las asociadas a la sintaxis. En el presente trabajo realizamos un estudio inter-sujeto por el siguiente motivo: en el diseño intra-sujeto, para limitar el efecto de la variable individuo, cada sujeto realiza el cambio de registro de todos los enunciados, pero esto pudiere distorsionar los resultados por el efecto de la memoria y la práctica, al ser posible que a medida que el sujeto realiza sucesivos intentos de obtener una misma expresión algebraica para enunciados distintos, el desempeño mejore también por la práctica y no solo por tipo de enunciado. En el presente estudio cada sujeto debe obtener una expresión algebraica una única vez, para eliminar el efecto de la práctica. La comparación de resultados inter e intra-sujeto permitirá observar el efecto de la práctica y la memoria a corto plazo.

MARCO TEÓRICO

Analizamos el desempeño en la realización de una tarea desde un punto de vista cognitivo, siguiendo los trabajos de Duval (1993, 1995, 2006) donde se sostiene que la actividad cognitiva requerida en matemáticas se distingue de la de otras áreas por presentar tres características propias. Destacamos la conocida como paradoja de Duval, la cual expone que los objetos matemáticos, en contraposición con los de las ciencias empíricas, no son perceptibles directamente a través de los sentidos, solo es posible acceder a ellos a través de las representaciones semióticas. Por otra parte, los objetos no deben confundirse con las representaciones semióticas, pero entonces “(...) Cómo pueden los aprendices evitar confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si sólo pueden relacionarse con ellos mediante representaciones semióticas?” (Duval, 1993).

Para Duval (2006) la importancia de las representaciones semióticas en la articulación del pensamiento matemático radica en su capacidad de transformación, punto compartido por otros autores como Dreyfus (1991) quien sitúa la capacidad para integrar representaciones y pasar de una a otra con facilidad como la última fase del proceso de aprendizaje. Aunque la noción de representación de (Dreyfus, 1991) incluye a las mentales, no tenemos noticia de la actividad mental del sujeto sino a través de las representaciones externas, y las modificaciones realizadas en estas pueden vehicular modificaciones conceptuales (Socas, 2007). Por ello en este trabajo analizamos representaciones semióticas producidas por los sujetos y el proceso de cambio de registro, y nos fijamos en la movilización de resultados matemáticos implícitos, pues para ello el sujeto necesita distinguir el objeto representado de la representación semiótica concreta que se le presenta.

Para realizar nuestro análisis cognitivo usamos la distinción de dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas (Duval, 2006): los tratamientos y las conversiones. Los primeros son transformaciones de representaciones dentro del mismo registro, como sacar factor común y reagrupar en un polinomio. Una conversión consiste en un cambio de registro de representación sin variar los objetos denotados, como expresar mediante un número racional la fracción representada con un modelo de área. La conversión es cognitivamente más compleja que el tratamiento; no basta

con conocer las reglas sintácticas internas del registro, sino distinguir la información esencial que define el objeto representado y trasladar al registro imagen solo esa información desechando aspectos superfluos impuestos por el registro origen, lo que presupone cierto grado de comprensión global del objeto.

Los registros fuente e imagen determinan los procesos cognitivos que tienen lugar en la conversión, pero se identifican tres factores con carácter general (Duval, 1995):

- La existencia o no de una correspondencia uno a uno entre todas las componentes significativas (símbolos, palabras) de los contenidos de las representaciones fuente e imagen.
- El carácter unívoco o no de la elección para cada componente significativa de la representación imagen.
- Para las componentes significativas que pueden aplicarse, el orden de organización en la representación fuente se mantiene o cambia en la representación imagen.

Si esos tres factores tienen respuesta afirmativa se dice que la conversión es congruente, y no congruente en caso contrario. Con respecto al presente trabajo, para realizar conversiones congruentes puede ser suficiente con conocer las reglas sintácticas de ambos registros, con lo que la complejidad sintáctica, medida según los índices del apartado siguiente, tendría a priori un papel destacado como variable condicionante de la tarea. Por su parte, en el caso no congruente, para realizar la conversión es necesario además reconocer los objetos representados y movilizar contenidos matemáticos presentes solo de forma implícita en el enunciado, lo que consideramos una competencia matemática diferente del mero manejo sintáctico y una variable independiente de la anterior.

Índice de complejidad sintáctica

Para medir la complejidad sintáctica de los enunciados adaptamos los índices introducidos por Salvador (1985) adaptándolos a la norma actual de la Real Academia de la Lengua (RAE, 2010). En la definición aparecen las nociones de enunciado y oración. Siguiendo la gramática actual (RAE, 2010), consideramos que un enunciado es el mensaje mínimo o unidad de comunicación que constituye por sí mismo un mensaje autónomo; y una oración es una unidad de predicación que pone en relación un sujeto con un predicado verbal, siendo simple si consta de un único predicado verbal, o compuesta en caso contrario.

Tenemos:

Índice de complejidad numérica: $\text{ComNum}=10 \text{ O/E}$

con O el número de oraciones y E el número de enunciados.

Índice de complejidad cualitativa: $\text{ComCua}=(S+2(Y+Co)+3S_1+4 S_2+5 S_3)/E$

con S el número de oraciones simples, Y el de yuxtapuestas, Co el de coordinadas, S_i el de subordinadas de grado i y E el número de enunciados. Para clasificar los enunciados consideramos que la complejidad es baja si $\text{ComNum} \leq 2$, $\text{ComCua} \leq 20$, y alta si $\text{ComNum} \geq 40$, $\text{ComCua} \geq 5$. Para establecer estos límites, los inferiores se fijan al constatar los autores la dificultad de redactar enunciados de conversión no congruente para estudiantes universitarios con valores más bajos y tampoco encontrarlos en la literatura; para los superiores se recogen las consideraciones de (Salvador, 1984) sobre la dificultad práctica de mantener la claridad y coherencia de expresión para valores superiores.

OBJETIVOS

La competencia para manejar estructuras sintácticas complejas por una parte, y la de movilizar resultados matemáticos implícitos por otra, parecen a priori diferentes; la falta de conocimientos matemáticos puede imposibilitar la movilización aun cuando el manejo de la sintaxis sea bueno. Pero ambas son necesarias en el proceso de conversión dependiendo del enunciado concreto. Este trabajo, continuando el estudio (Soneira et al, en preparación) pero ahora en una situación de muestras independientes, pretende estudiar si el desempeño en la realización de una tarea de conversión del lenguaje natural al algebraico varía dependiendo de la necesidad de poner en práctica las competencias indicadas y si existe relación entre ambas. En concreto nos planteamos:

- ¿Existen diferencias significativas en el desempeño de la conversión en función de si la conversión es congruente o no? ¿Y en función de la complejidad sintáctica del enunciado en lenguaje natural?
- ¿Supone una mayor dificultad el carácter no congruente o la complejidad sintáctica alta?
- ¿La influencia del carácter congruente o no de la conversión es la misma siempre o depende de la complejidad sintáctica del enunciado?
- ¿La influencia de la complejidad sintáctica alta es la misma siempre o depende del carácter congruente o no de la conversión?
- ¿Influyen la práctica y la memoria inmediata en la realización de tareas de conversión?

MÉTODO

Participantes

En el estudio participaron de forma voluntaria 46 estudiantes de primer curso de Grado en Ingeniería de Edificación y del Grado en Ingeniería Informática. Los planes de estudio de cursos anteriores cubren todos los contenidos requeridos y los estudiantes están familiarizados con el proceso de conversión del lenguaje natural al algebraico. Ninguno de ellos había participado en el estudio intra-sujeto anterior. Se formaron cuatro poblaciones con un tamaño muestral de 21 sujetos como mínimo para cada población, escogiendo a los sujetos de forma aleatoria, y a cada una se le aplicó un cuestionario diferente.

Instrumento

En el estudio intra-sujeto se diseñó un cuestionario consistente en 20 enunciados verbales para realizar la conversión y de él se extrajeron cuatro cuestionarios con 5 ítems, agrupando los ítems de un mismo tipo en función del carácter congruente “C” o no “N” y de la complejidad sintáctica alta “A” o baja “B”. Combinando esta clasificación, los enunciados pueden ser NA, NB, CA o CB. De cara a posteriores análisis, diremos que un enunciado es C o N dependiendo del carácter congruente o no de la conversión, sea cual sea su complejidad sintáctica; y que es B o A dependiendo de su complejidad sintáctica, tanto si su conversión es congruente como si no.

A cada una de las poblaciones se le propuso sólo uno de los 4 cuestionarios diferentes, es decir, realizaron la conversión de un único tipo de enunciados NA, NB, CA o CB.

El cuestionario aplicado en el estudio intra-sujeto se diseñó partiendo de un cuestionario inicial con 64 enunciados, sometido a un panel de expertos formado por varios licenciados en matemáticas docentes en ejercicio en secundaria y universidad. Se preguntó sobre la idoneidad, claridad y dificultad de cada ítem y el tiempo estimado para la realización de la tarea. A partir de su opinión se escogieron 24 ítems, con los que se realizó una prueba piloto con 8 estudiantes de 1º de Grado de Ingeniería Informática, quedando al final 20 ítems.

La dificultad de la conversión está condicionada por los objetos matemáticos concretos aludidos en el enunciado; de los que el sujeto puede tener una mayor o menor comprensión. Para aliviar este problema, cada objeto aludido en un tipo de enunciado también lo es en los otros. La Tabla 1 muestra un mismo objeto matemático en un ítem de cada tipo.

Tabla 1. Ejemplos tipos de ítem.

Tipo	Enunciado
NA	Expresa con una única ecuación que un punto del espacio verifica que alguna de sus coordenadas es tal que el cinco es un divisor de ella.
NB	Expresa con una única ecuación la siguiente propiedad de un punto del espacio: el siete es un divisor de alguna de sus coordenadas.
CA	Expresa mediante una ecuación que un punto del espacio tiene la propiedad de que si realizamos el producto de sus coordenadas entonces el resultado es igual a tres multiplicado por un número.
CB	Expresa mediante una ecuación la siguiente propiedad de un punto del espacio: el producto de sus tres coordenadas es igual a cuatro multiplicado por otro número.

Para evitar equívocos se impuso la condición de no usar cuantificadores en las expresiones algebraicas; de lo contrario algunos enunciados N pasarían a ser C. Se concedió un máximo de 3 minutos por ítem.

Sobre los criterios de corrección, se estableció antes de pasar la prueba una primera categorización de las posibles respuestas con niveles jerárquicamente ordenados, pero se ha modificado después de intentar aplicarla a los resultados reales, al observarse que los sujetos podían captar aspectos de un nivel y no de otro y viceversa. Tanto con los resultados de la prueba piloto como de la final, cada uno de los autores valoró independientemente todas las respuestas, posteriormente se pusieron en común y discutieron con detalle esas valoraciones para fijar unos criterios unificados. Se otorga de cero a un punto por plasmar alguno de los siguientes aspectos:

- Asignación de variables y/o símbolos.
- Identificación y uso correcto de operaciones y relaciones de igualdad y no igualdad.
- Identificación de conceptos implícitos o explícitos en el enunciado.

Además, si la expresión algebraica final es formalmente correcta se concede otro punto. Sobre estos criterios, los dos primeros aspectos se basan en el catálogo de errores expuesto por Cerdán (2008), quien clasifica los errores en tres categorías: en el uso de letras, que se relacionan con el primer aspecto del presente estudio; en expresiones algebraicas, y en igualdades; estos dos últimas categorías de (Cerdán, 2010) se relacionan con el 2º aspecto del presente trabajo. Dadas las características concretas del estudio, introducimos el tercer aspecto, pues en la tarea de conversión, sobre todo en el caso no congruente, es necesaria la movilización mental de resultados implícitos.

Exponemos a continuación algunos ejemplos de respuestas obtenidas para ilustrar la aplicación de los criterios en la Tabla 2.

Enunciado tipo NA:

“Expresa mediante una ecuación la propiedad que cumple un número cuyas tres cifras son tales que la cifra de las unidades más la de las decenas por diez más la de las centenas por cien es igual a cuatro veces la suma de la cifra de las unidades más diez por la de las decenas”

Respuesta (Figura 1):

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 100 = 4a + 10 \cdot b.$$



Figura 1

Se asignan correctamente variables pero no se tienen en cuenta las diferencias en la sintaxis de los dos registros sobre la prevalencia de las operaciones; y no se moviliza la propiedad distributiva.

Enunciado tipo NA:

“Expresa mediante una única condición en lenguaje algebraico la propiedad que cumple un punto del espacio el cual verifica que ninguna de sus coordenadas es nula.”

Respuesta (Figura 2):

$$1) x \cdot y \neq 0 \quad 4$$

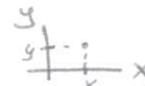


Figura 2

Se usa el registro gráfico como puente entre el lenguaje natural y el algebraico. La propiedad movilizada “dos números reales son distintos de cero si y solo si su producto es distinto de cero” no es eminentemente geométrica, pero la inclusión de la expresión “punto del espacio” parece llevar al sujeto a usar el registro gráfico.

Enunciado tipo NB:

“Expresa con una única ecuación la siguiente propiedad de un punto del espacio: el siete es un divisor de alguna de sus coordenadas”

Respuesta (Figura 3):

$$7) 7/x \neq 0$$

0

Figura 3.

El sujeto no moviliza la propiedad “un producto de enteros es divisible por un número primo si y solo si alguno de los factores lo es”, y toma el caso particular de que lo sea la primera coordenada. No identifica correctamente variables ni operaciones. Parece intentar traducir literalmente el enunciado, y al no ser posible solo plasma un caso particular.

Análisis estadístico

Consideramos dos variables independientes: “Tipo de conversión”, con valores N y C, y “Complejidad Sintáctica” con valores A y B; y una variable dependiente “Puntuación” con valores en $[0,4]$. Las variables independientes pueden interpretarse como factores con dos niveles cada uno. Para realizar el análisis tomamos de forma aleatoria 21 sujetos de cada una de las 4 poblaciones, en una situación de muestras independientes.

Al testar los supuestos de un ANOVA de dos factores, las pruebas de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilks indican que ninguna de las poblaciones es normal. Tienen la misma varianza (prueba de Levene), pero las formas de sus distribuciones no son siempre iguales entre sí. Por ello

descartamos el uso de ANOVA. Entonces, en un contexto no paramétrico, para aprovechar la información al menos ordinal usamos la prueba de Mann-Whitney para decidir si hay diferencias significativas entre las distribuciones según el tipo de enunciado. En todas estas pruebas rechazamos la hipótesis inicial si la significatividad asintótica es $< 0,05$. Para estudiar el tamaño del efecto empleamos la curva COR, interpretando el área bajo la curva como la probabilidad de que una puntuación seleccionada aleatoriamente de una población sea mayor que una puntuación seleccionada aleatoriamente de otra población distinta.

Posteriormente, para estudiar la dependencia condicional en este contexto no paramétrico, seguimos la siguiente estrategia: primero transformamos en dicotómica la variable “Puntuación” asignando un “Insuficiente” a todas aquellas respuestas con puntuación menor que 3, y un “Suficiente” a las otras; a continuación aplicamos la prueba de Cochran y Mantel-Haenszel para contrastar la hipótesis de independencia condicional entre las variables factor y respuesta una vez controlado el efecto del estrato. Para determinar si la relación de dependencia es la misma en todos los estratos usamos los estadísticos de Breslow-Day y de Tarone.

Todos los cálculos se realizaron con el Programa IBM SPSS Statistics 21

Tabla 2. Ejemplos aplicación criterios corrección

	Figura1	Figura2	Figura3
Asignación variables y símbolos	Si	Si	No
Operaciones y relaciones de igualdad y no igualdad	No	Si	No
Identificación de conceptos en el enunciado	No	Si	No
Expresión formal correcta	No	Si	No

RESULTADOS

Cuando no haya lugar a confusión, llamaremos también C, N, B, A, CB, CA, NB, y NA respectivamente, a las variables definidas como la puntuación obtenida al realizar una conversión de un enunciado del tipo correspondiente. En la Tabla 3 se recogen los estadísticos descriptivos para ofrecer una primera visión general.

Tabla3. Media (M), mediana (Me), desviación típica (De) según tipo de enunciado

	NA	NB	CA	CB	N	C	A	B
M	1,1476	1,2095	2.0671	3.4000	1.1786	2.7336	1.6074	2.3048
Med	1,0000	1,0000	2,4000	3,2000	1,0000	3,0000	1,2000	2,4000
Des	0,85418	0,89772	1.10692	.63246	.86604	1.11704	1.08173	1.34798

Sobre la primera pregunta expuesta en el apartado OBJETIVOS acerca existencia de una diferencia significativa en las distribuciones de las puntuaciones en los diversos cuestionarios, la Tabla 4 recoge los resultados de la prueba de Mann-Whitney, indicando que existen diferencias significativas en todos los casos excepto al comparar los resultados según la complejidad sintáctica para enunciados de conversión no congruente.

Tabla 4. Contraste de hipótesis. H_0 = Distribuciones iguales

	(NA,NB)	(CA,CB)	(NA,CA)	(NB,CB)	(N,C)	(A,B)
H_0	Aceptar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar	Rechazar

En cuanto a la segunda pregunta de los objetivos, el cálculo del tamaño del efecto mediante la curva COR (Tabla 5) indica que las mayores dificultades dependen del carácter congruente de la conversión, algo también sugerido por los descriptivos de la Tabla 3.

Tabla 5. Tamaño del efecto mediante COR

	P(B>A)	P(C>N)	P(NB>NA)	P(CB>CA)	P(CB>NB)	P(CA>NA)
Área bajo COR	0,655	0,844	0,527	0,847	0,964	0,726

Con respecto a las preguntas tercera y cuarta del apartado OBJETIVOS, es decir, la dependencia condicional, los estadísticos de Cochran y Mantel-Hansel permiten rechazar la hipótesis de independencia condicional de la variable “Puntuación” en función del carácter congruente o no de la conversión, una vez controlado el efecto del estrato “Complejidad sintáctica”. Por su parte las pruebas de Tarone y Breslow-Day llevan a aceptar la hipótesis de que la relación de dependencia es la misma para enunciados A y B. Lo mismo ocurre con la dependencia condicional de la “Puntuación” en función de la “Complejidad sintáctica” controlando el efecto del estrato “Tipo de conversión”, la dependencia existe pero es la misma para enunciados N y C.

Finalmente, sobre la quinta pregunta, la comparación de las tablas de descriptivos correspondientes a ambos estudios sugiere que la práctica y la memoria inmediata sí tienen efecto en las puntuaciones obtenidas, los sujetos parecen mejorar con la práctica.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Tomando las puntuaciones exactas, concluimos que existen diferencias significativas en las distribuciones en función del carácter congruente y la complejidad sintáctica, excepto al restringirnos a enunciados N y analizar la influencia de la sintaxis, esto es, la distribución de las puntuaciones de enunciados NA es la misma que las de los NB. Con estas consideraciones respondemos afirmativamente a la primera pregunta del apartado OBJETIVOS.

En cuanto a qué variables influyen más en la dificultad de la conversión (segunda pregunta), los resultados muestran con claridad que lo determinante es la necesidad o no de movilizar objetos matemáticos implícitos en el enunciado, en concordancia con lo indicado por Duval (1995, 2006) sobre la especificidad de la actividad cognitiva en matemáticas.

Si tenemos en cuenta en vez de las puntuaciones exactas, solo si el sujeto alcanza un nivel adecuado en la realización de conversiones, concluimos también que el desempeño está condicionado por el carácter congruente. Al cuantificar la dependencia según los estratos dados por el índice de complejidad sintáctica, esta es la misma para los enunciados A y B. Considerando la variable sintáctica como factor, vemos que la puntuación también depende de ella, pero de nuevo la intensidad de la dependencia es la misma para enunciados N y C. Respondemos así a las preguntas tercera y cuarta de los OBJETIVOS.

En la parte de discusión del estudio, el hecho de que las distribuciones comparadas varíen siempre, excepto al comparar puntuaciones en enunciados NA y NB, sugiere que la no congruencia es un obstáculo de tal magnitud que la complejidad sintáctica pasa a un segundo plano. Además, una vez que el contraste de hipótesis nos asegura que las diferencias son estadísticamente significativas, si tenemos en cuenta también los descriptivos reflejados en la Tabla 3 para estas muestras concretas, y

nos fijamos al mismo tiempo en cómo varía el tamaño del efecto dependiendo del par de variables considerado, vemos que la influencia de la variable sintáctica es alta en general y restringiéndose a enunciados congruentes, pero muy limitada si consideramos solo enunciados N. Esto sugiere que la variable sintáctica debe estudiarse por separado según el carácter congruente y no de forma global.

Diversos autores, como Duval (2006) o Dreyfus (1991) relacionan la capacidad para pasar de un registro semiótico a otro con el grado de comprensión del objeto matemático representado. Pero la necesidad de cierto grado de comprensión global del objeto existe de veras si la conversión es no congruente, pues en el caso congruente puede ser suficiente con conocer las reglas sintácticas de ambos registros y los objetos a comprender serían más bien los propios símbolos y estructuras sintácticas en el sentido indicado por Goldin (1998). Con respecto a esto, los resultados sobre el tamaño del efecto muestran que la probabilidad de convertir mejor un enunciado congruente que uno no congruente es mayor si ambos enunciados son B que si ambos son A, es decir, los enunciados B hacen más evidentes esas diferencias, pasando de $P(CA > NA) = 0,726$ a $P(CB > NB) = 0,964$. En la Tabla 3 también vemos que, para las muestras concretas las diferencias entre las medias de NB y CB son mucho mayores que entre NA y CA. Tales diferencias pueden deberse a que la dificultad añadida por la complejidad sintáctica obstaculiza la comprensión ya con enunciados C, siendo razonable pensar que también con los N. Si eso fuese así, los enunciados B serían más adecuados para evaluar el grado de comprensión del objeto representado por parte del sujeto, y eso nos lleva a sugerir el uso por parte del docente de enunciados B en detrimento de los A durante las clases de matemáticas, tanto para ofrecer explicaciones sobre conceptos y realizar preguntas orientadas en la construcción del conocimiento, como para proponer actividades de evaluación.

Al comparar el presente estudio con el intra-sujeto anterior, los resultados de inter-sujeto confirman los del intra-sujeto pero aportan más información. Sobre todo al comparar enunciados CA y CB, porque con el anterior diseño los datos muestrales no permitían aprovechar la información ordinal debido a la ausencia de simetrías en las distribuciones. Sin embargo, con el diseño inter-sujeto, al no necesitarse la hipótesis de simetría, sí aprovechamos toda la información. Además, en el estudio anterior tampoco se realizaba un contraste de hipótesis sobre la dependencia condicional según estratos como en las preguntas tercera y cuarta del estudio presente. Por otra parte, en relación a la quinta pregunta del apartado OBJETIVOS, la comparación de resultados sugiere que la práctica al realizar tareas de conversión donde los conceptos y resultados matemáticos implicados se repiten en distintos ítems, sí mejora las puntuaciones. De hecho, los estadísticos descriptivos sugieren que aún en el caso de que el sujeto no sea capaz de realizar la conversión de un enunciado N, los procesos cognitivos que tienen lugar en su mente al intentarlo, son útiles a la hora de convertir enunciados C donde intervengan los mismos conceptos y resultados matemáticos.

Sobre las limitaciones del estudio señalamos especialmente que los cuestionarios aplicados están orientados a estudiantes de primer curso de grado que siguieron el bachillerato tecnológico, por lo que las conclusiones no pueden extenderse más allá de esa fase de desarrollo cognitivo y formación previa. Sería incluso en este caso necesario realizar nuevas pruebas a fin de ampliar la muestra. En cuanto a las perspectivas de futuro, consideramos interesante la realización de estudios similares con poblaciones de otro nivel educativo o con estudiantes de edades similares a los de este estudio pero con una formación previa diferente.

Referencias

Cerdán, F. (2008). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 257-272). Badajoz, España: Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper” y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

- D'Amore, B. (2007). Mathematical objects and sense. How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Nueva York, Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwert Academic Publishers.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). Sémiotique et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna, Suiza: Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Font, V., Godino, J., y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of Mathematics*, 27(2) 2-7.
- Goldin, G. (1998). Representational systems, Learning and Problem Solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(2), 137-165.
- Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(1) 1-4.
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Londres, Reino Unido: Routledge & Kegan Paul.
- Real Academia Española (2010). *Nueva gramática de la lengua español. Manual*. Madrid, España: Espasa.
- Salvador F. (1985). Los índices de complejidad sintáctica, instrumentos de evaluación de la expresión escrita: Estudio experimental en el ciclo medio de EGB, *Enseñanza*, 3, 59-81.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, 19-52.
- Soneira, C., Souto, M. J., y Tarrío, A. D. (en preparación). Análisis cognitivo del proceso de conversión del lenguaje natural al algebraico.