# SIGNIFICADOS CONFLICTIVOS DE ECUACIÓN Y FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE SECUNDARIA

## Conflictive meanings of the equation and function concepts in secondary school student teachers

Miguel R. Wilhelmi[a], Juan D. Godino[b], Aitzol Lasa[a]

[a]Universidad Pública de Navarra, [b]Universidad de Granada

**Resumen**

*En el marco de una acción formativa sobre reconocimiento de las características del razonamiento algebraico elemental con estudiantes del máster de secundaria, especialidad matemáticas, se detecta que las nociones de función y ecuación interfieren la una en la otra. Así, en situaciones elementales en las que es preciso movilizar una función, identificando las variables independiente, dependiente y regla de correspondencia, los estudiantes interpretan la situación en términos de incógnitas y ecuaciones. Se describen algunas respuestas prototípicas de este fenómeno, el contexto y metodología de la investigación, así como algunas implicaciones para la formación de profesores.*

**Palabras clave***:* *formación de profesores, significado, variable, ecuación, función, conocimiento epistémico especializado*.

**Abstract**

*Along a training intervention on recognition of elementary algebraic reasoning features by master' students of secondary school mathematics, we observed an interference between the notions of function and equation. Thus, in elementary situations where students should mobilize a function, and identify the independent and, dependent variable and the correspondence rule, students interpret the situation in terms of unknowns and equations. In this paper we describe some prototypical responses where this phenomenon is visible, the context and research methodology, as well as some implications for teacher's education.*

**Keywords**: *teacher's education, variable, equation, function, epistemic specialized knowledge*

## INTRODUCCIÓN

Las dificultades de comprensión del concepto de variable por parte de los alumnos que inician el estudio del álgebra en secundaria han sido informadas por diversos autores.

> "Tomamos también en consideración las interpretaciones incorrectas que los estudiantes hacen de la variable, presentes en la literatura. En algunos casos, el estudiante asigna un valor numérico a un símbolo literal (a veces, se basa en su posición en el alfabeto), incluso en los casos en los que debe ser interpretado como número generalizado […]. Además, el estudiante debe interpretar las letras como abreviaturas de los nombres de los objetos" (Chrysostomou y Christou, 2013, 186).

Una de las explicaciones de estas dificultades está en la diversidad de usos que se hacen de las variables en el trabajo matemático (Schoenfeld y Arcavi, 1988). El análisis que hacen estos autores revela la riqueza y multiplicidad de significados del objeto algebraico que designa el término "variable". Estrechamente relacionado con la variable está el concepto de incógnita, el cual para algunos autores se considera como un uso de la variable, pero para otros se entiende como un objeto algebraico diferente.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

Variable significa algo que efectivamente varia, o que tiene múltiples valores, mientras que incógnita es algo que tiene un valor fijado pero que no se conoce aún. En una ecuación del tipo, $x + 10 = 2x + 5$, la incógnita $x$ se usa como designación de un número específico cuya identidad será desvelada tras el proceso de resolución. En contraste, en la expresión $f(x) = 2x + 1$, la $x$ no refiere a un número específico sino a uno cualquiera de los elementos de un conjunto de números previamente establecido. En las clases de matemáticas estos términos se utilizan en ocasiones informalmente de manera equivalente, pudiendo degenerar en una dialéctica que es necesario controlar (Barwell, 2013). Sin embargo, "el concepto de variable es raramente discutido en asignaturas en la universidad" (Biehler y Kempen, 2013) y, por lo tanto, la ambigüedad propia de la secundaria puede estabilizarse en los estudiantes universitarios.

En este trabajo, se muestra que la confusión entre incógnita y variable es persistente en el tiempo, presentándose tardíamente incluso en estudiantes con una formación científico-técnica que cursan un máster en formación de profesorado de matemáticas de secundaria. Esta confusión radical tendrá implicaciones en la distinción entre ecuación y función, esto es, entre las dos prácticas esenciales en el desarrollo del álgebra y su adquisición (Ely y Adams, 2012):

> "Las dos practicas más importantes […] son (a) el uso de una letra con el significado de un elemento genérico en un conjunto o una cantidad indeterminada, no solo una incógnita, y (b) la representación y cuantificación de una cantidad que cambia en función de otra. Afirmamos que el estudiante debe ser capaz de dar significado a estas dos prácticas en el trabajo con variables." (p.23).

Así, unas de las claves en el paso de la aritmética al álgebra es la superación de una visión restrictiva del álgebra como una aritmética generalizada, según la cual el álgebra es exclusivamente hereditaria de las propiedades aritméticas, "pero con letras". Así, "las letras [son] simples sustitutos de un número fijo que hay que encontrar" (Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006). Esta visión facilita un ingreso ágil del álgebra y es comúnmente asumida en el currículo y en los libros de texto.

> "Con el álgebra logramos un dominio más general de los números. Los simbolizamos con letras y operamos con ellas como si fueran números, estableciendo equilibrios […] Cuando se quiere operar con un número aún desconocido o cuando se desea utilizar un número cualquiera en lugar de uno concreto se suelen tomar las letras como sustitutivos de los números." (Colera et al., 1996, 116–119).

Pero pronto, esta visión restrictiva del álgebra como aritmética generalizada debe ser abandonada, debido a los diferentes usos y significados que debe darse al lenguaje algebraico.

> "En matemáticas se utilizan letras para designar números con distinta finalidad. A veces, estos números tienen un valor desconocido que se pretende calcular; otras representan cualquier número y se utilizan para establecer relaciones numéricas. También pueden sustituir a un conjunto de números que verifican un determinada propiedad." (Frías et al., 2003, 72).

La complejidad de los procesos en el tránsito de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria ha llevado a estudios sistemáticos y monográficos, como el impulsado en el seno de la SEIEM (Palarea, Castro y Puig, 2012). Aquí, el objetivo es analizar en qué sentido esta complejidad está adquirida tras una formación técnico-científica universitaria. De manera más precisa, determinar contextos donde los conflictos de significado entre las nociones de incógnita y ecuación, de variable y función, son persistentes. Para abordar este objetivo, antes de la descripción de la experimentación, los resultados y su discusión, se describe brevemente en el marco teórico y metodológico. Se concluye con implicaciones en la formación de profesores.

## MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA

Para describir e interpretar los hechos didácticos que hemos observado usaremos algunas herramientas del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012; Font, Godino y Gallardo, 2013), marco teórico que postula la pluralidad de los significados de los objetos matemáticos dependiendo de los marcos institucionales y contextos de uso. Tales significados son interpretados en términos de los sistemas de prácticas que el sujeto (o la institución) pone en juego ante cierta clase de situaciones-problema.

La realización de las prácticas matemáticas es posible por la intervención de *objetos* (lenguaje, situaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) en sus diferentes *facetas contextuales* (personal / institucional; ostensiva / no ostensiva; ejemplar / tipo; unitaria / sistémica; expresión / contenido) y de *procesos* que posibilitan la emergencia de nuevos objetos.

El reconocimiento, comprensión y articulación de los diversos significados de los objetos, facetas y procesos matemáticos, y de la trama de funciones semióticas implicadas en tales significados, es un componente clave del *conocimiento epistémico especializado* (Godino, 2009) que debe tener el profesor para organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este trabajo, centrado en los significados de incógnita y ecuación, variable y función, se parte de estudios previos de otros autores. Wagner (1983) analiza las diferencias y semejanzas del uso de símbolos literales respecto de los numerales y las palabras; Schoenfeld y Arcavi (1988) desvelan diversos significados para la variable y Bardini, Radford y Sabena (2005) identifican dificultades de estudiantes de secundaria con las nociones de incógnita, variable y parámetro. Aquí se muestra cómo estos significados persisten en titulados de carreras científico-técnicas.

Siguiendo a Freudenthal (1983), Schoenfeld y Arcavi, establecen diez definiciones del término variable y dos concepciones diferentes de dicho objeto: una, como nombres polivantes; otra, como objetos variables. La primera concepción corresponde a "una cantidad que puede asumir un valor de un conjunto especificado de valores", o bien, "un símbolo que puede ser reemplazado por cualquier elemento de un conjunto determinado" (por ejemplo, $a + 3 = 3 + a$). La segunda concepción refiere algo que "se supone que cambia continuamente… Movimiento de crecimiento o decrecimiento"; o bien, algo que "es capaz de variar en valor" (por ejemplo, épsilon se aproxima a 0).

> "Este uso dual del mismo término variable plantea algunas cuestiones matemáticas y pedagógicas interesantes. Freudenthal deplora la mezcla de las dos ideas. Enfatiza la importancia del sentido original cinemático de la noción de variable, especialmente cuando se va a estudiar las funciones y expresiones similares a "épsilon se aproxima a 0" (Schoenfeld y Arcavi, 1988, 424).

De hecho, el concepto de variable es uno de los aspectos clave en el paso de la aritmética al álgebra.

> "Una dificultad crucial en esta transición del pensamiento algebraico es el concepto de variable. Por ejemplo, los estudiantes que comienzan el álgebra, inconscientes de las múltiples funciones de las letras en las expresiones matemáticas, a menudo solo tratan a una variable como representando una cantidad fija desconocida." (Ely y Adams, 2012, 20).

Bardini et al. (2005) mencionan resultados de investigaciones previas sobre los significados que atribuyen los estudiantes a las variables (e.g. MacGregor, & Stacey, 1993; Trigueros, & Ursini, 1999; Bednardz, Kieran, & Lee, 1996). Así, sostienen los autores que "uno de tales significados consiste en concebir una variable como un número indeterminado de un cierto tipo: no es un número indeterminado en sí mismo. Para muchos estudiantes, es simplemente un número temporalmente indeterminado cuyo destino es convertirse en determinado" (p. 2-129).

Como hemos visto más arriba, este planteamiento viene a veces reforzado en algunos desarrollos del currículo y en libros de texto y en estrategias didácticas para su enseñanza, cuya sentencia prototípica sería "el álgebra es como la aritmética, pero en lugar de números se manipulan letras". Además, hay que recordar que, originariamente, el método cartesiano estaba fundado en la premisa de que los "segmentos desconocidos" debían ser tratados "como si fueran conocidos" (Descartes, 1886, 3) y, por lo tanto, la propia noción de incógnita guarda una identificación preclara con "un número escondido que hay que determinar". Hay pues razones cognitivas, instruccionales y epistémicas que justifican la dificultad radical en la adquisición de la noción de variable y su uso y significados en contextos diferenciados.

## POBLACIÓN, MUESTRA, CUESTIONARIO Y ANÁLISIS A PRIORI

Estudiantes del Máster en Profesorado de Educación Secundaria, especialidad Matemáticas. La formación inicial de estos estudiantes es técnica-científica; en general, ingenieros de diferentes procedencias, físicos y, naturalmente, matemáticos. Aunque en menor número, también realizan la especialidad algunos arquitectos o estudiantes de economía, que superan alguna prueba específica de ingreso o aportan complementos formativos adicionales.

El cuestionario ha sido resuelto por 46 estudiantes de dos universidades españolas, a los cuales se les propuso un taller de reflexión sobre las características del razonamiento algebraico elemental (RAE). La acción formativa comprendía dos momentos:

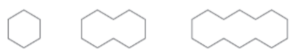
1. Resolución individual por los estudiantes de un cuestionario sobre conocimientos matemáticos y didácticos acerca del RAE por espacio de 2 horas.
2. Análisis de las respuestas dadas e institucionalización de las características del RAE (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014), con énfasis en la articulación de dicho razonamiento entre los niveles de educación primaria y secundaria.

En este trabajo se analizan las respuestas de los estudiantes a tres cuestiones incluidas en el cuestionario, que requieren poner en juego los conceptos de ecuación y función. En la figura 1 se muestran tres tareas propuestas a los estudiantes del Máster en Profesorado de Matemáticas (EPM) que han permitido revelar conflictos de significado de los conceptos de ecuación y función.

**Tarea 1.** Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:
*En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa. ¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?*
a) Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones lineales.
b) Resuelve el problema que enuncies e indica los conocimientos algebraicos que se usan.
**Tarea 2.** Analiza las siguientes expresiones y contesta:

1. $4x + 5 = 25$
2. $y = 2x + 1$
3. $P = 2c + 2l$

a) Describe la interpretación que haces de cada una de las expresiones anteriores.
b) Enuncia tres problemas que se puedan proponer a alumnos de primaria cuya solución lleve a plantear estas expresiones.
**Tarea 3.** Considera la siguiente secuencia de figuras.



a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una. Explica cómo lo haces.
b) ¿Cómo cambiarías el enunciado de la tarea para inducir algún procedimiento de resolución que ponga en juego conocimientos de tipo algebraico?
c) ¿Cuáles serían tales conocimientos algebraicos?

Figura 1. Tareas que revelan conflictos de significado de los conceptos de ecuación y función

A continuación se describen los comportamientos esperados en cada una de ellas, mostrando, a modo de ilustración, algunas respuestas observadas representativas de estos comportamientos.

### Comportamiento esperado en la tarea 1

El estudiante determinará una cuestión que precise:

*a) La representación tabular de una función o la determinación de una fórmula*. Por ejemplo: “¿Podrías dar una regla para poder calcular el coste de una bolsa con 5, 10,…, kilos de peras?”

*b) La definición de una función definida a trozos*. Es normal que el precio de un kilo de fruta disminuya si el cliente compra muchos kilos. Es una estrategia clásica para incentivar el consumo. Además, es previsible que se observe que en una bolsa cabe como máximo un número de kilos de fruta y que, por lo tanto, se indique que "cada tantos kilos es necesario adquirir una bolsa adicional" (esto supone introducir una función polinómica en dos variables de grado 1). Así, por ejemplo: ¿cuál es el precio de "x" kilos si en la frutería hay una oferta según la cual se reduce a 2/3 si se compra más de 5 kilos de peras y a la mitad si se compra más 10, sabiendo que en una bolsa caben únicamente 3 kilos de peras?

En la figura 2 se dan dos respuestas que son representativas de los comportamientos "tabular", "fórmula" o "función a trozos" descritos.

<table>
<tr><td>Representación tabular y mediante fórmula</td><td>La función sería del tipo $f(x) = 2x + 0,10$.<br>Se le podría añadir al enunciado<br>Establecer una tabla que me indique ~~el valor pagado~~ los euros que necesito si compro desde 1kg de peras a 10 kg.<br>b) Estableciendo la función $f(x) = 2x + 0,10$.<br>$x$ = nº de kilos.<br><br>
<table>
<tr><td>Kilos</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Euros</td><td>2,10</td><td>4,10</td><td>6,10</td><td>8,10</td><td>10,10</td><td>12,10</td><td>14,10</td><td>16,10</td><td>18,10</td><td>20,10</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Función a trozos</td><td>b)<br>$$y = \begin{cases} 2x + 0'10 & 0 < x \leq 3 \\ 1'20\,x + 0'10 & x > 3 \end{cases}$$<br>Hasta los 3 kg $y = 2 \cdot 3 + 0'10 = 6'10$ €<br>Los 4'5 restantes $y = 1'20 \cdot 4'5 + 0'10 = 5'50$ €<br>$\}$ $6'10 + 5'50 = 11'60$ € los 7'5 kg<br><br>Conocimientos algebraicos: función afín, funciones definidas a trozos.</td></tr>
</table>

Figura 2. Respuestas a la tarea 1

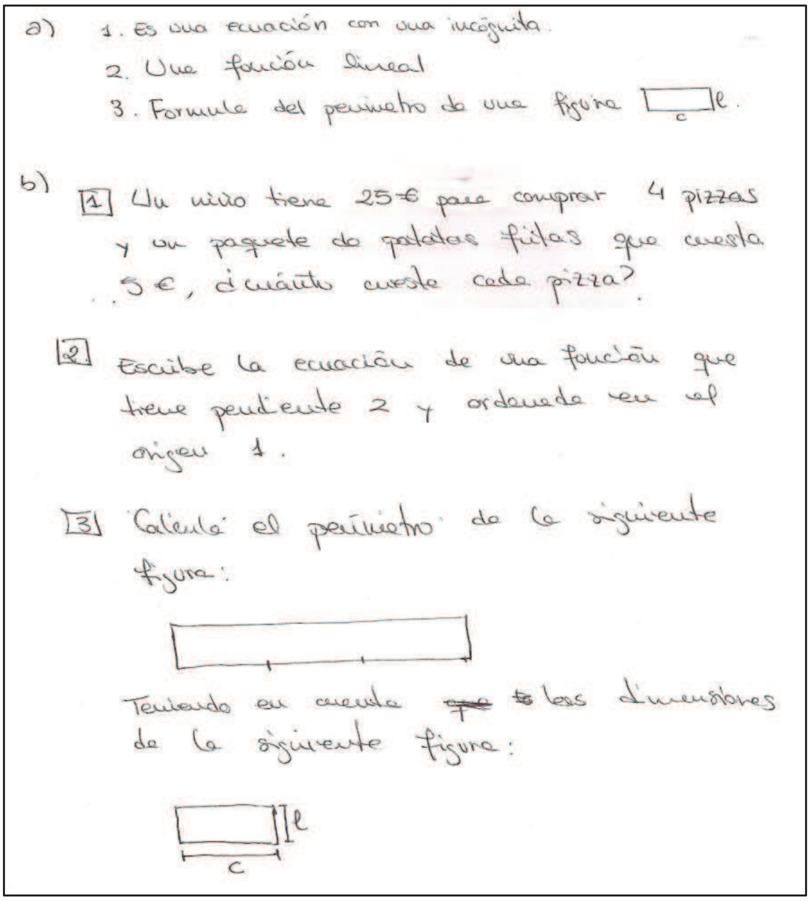
**Comportamiento esperado en la tarea 2**

Para la expresión 1) se espera que el EPM reconozca una ecuación lineal con una incógnita y que plantee, por ejemplo: "Por la compra de las entradas al cine de 4 personas y unos refrescos hemos pagado en total 25 €. Si los refrescos costaron 5 €, ¿Cuánto costó cada entrada al cine?"

Para la expresión 2) se espera que el EPM reconozca una función afín y que enuncie, por ejemplo: "Cada minuto que pasa una tortuga recorre en línea recta 2m. Si al principio la tortuga estaba a una distancia de 1m, ¿a qué distancia y estará transcurridos *x* minutos?

Para la expresión 3) se espera reconocer la una fórmula para calcular el valor de una variable *P* en función de otras dos, *c* y *l*. Por ejemplo, podría ser la fórmula de cálculo del perímetro de un rectángulo de base *c* y altura *l*.

Se ponen en juego los conceptos de ecuación de primer grado; función afín; fórmula de una función con dos variables independientes y el proceso de enunciado de situaciones-problema modelizables con las expresiones dadas. En la figura 3 se muestra una respuesta prototípica a la tarea 2. En esta respuesta se reconocen y distinguen los objetos ecuación y función. El estudiante utiliza la expresión "ecuación de una función" (enunciado 2), según el uso escolar generalizado (figura 4).



a) 1. Es una ecuación con una incógnita.

2. Una función lineal

3. Formula del perimetro de una figura l. c

b) [1] Un niño tiene 25 € para comprar 4 pizzas y un paquete de patatas fritas que cuesta 5 €, ¿cuánto cuesta cada pizza?

[2] Escribe la ecuación de una función que tiene pendiente 2 y ordenada en el origen 1.

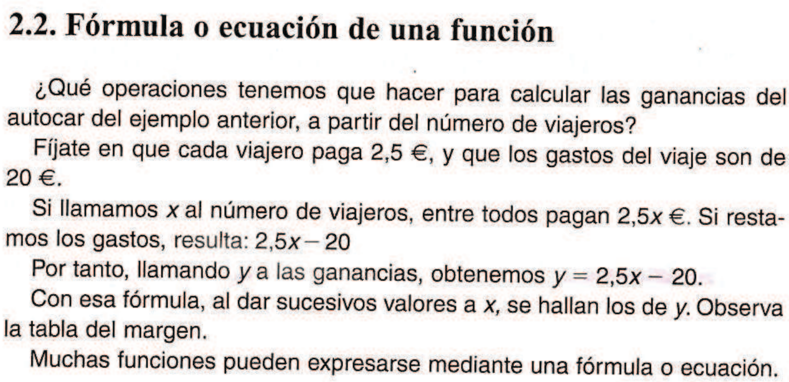
[3] Calcula el perimetro de la siguiente figura:

Teniendo en cuenta ~~que~~ ~~to~~ las dimensiones de la siguiente figura:

l

c

Figura 3. Respuesta a la tarea 2



**2.2. Fórmula o ecuación de una función**

¿Qué operaciones tenemos que hacer para calcular las ganancias del autocar del ejemplo anterior, a partir del número de viajeros?

Fíjate en que cada viajero paga 2,5 €, y que los gastos del viaje son de 20 €.

Si llamamos $x$ al número de viajeros, entre todos pagan $2{,}5x$ €. Si restamos los gastos, resulta: $2{,}5x - 20$

Por tanto, llamando $y$ a las ganancias, obtenemos $y = 2{,}5x - 20$.

Con esa fórmula, al dar sucesivos valores a $x$, se hallan los de $y$. Observa la tabla del margen.

Muchas funciones pueden expresarse mediante una fórmula o ecuación.

Figura 4. "Fórmula" como sinónimo de "ecuación" referido a una función (Frías et al., 2003, 139)

**Comportamiento esperado en la tarea 3**

Para la cuestión b) se espera que el EPM enuncie una cuestión que pida hallar el número de segmentos para formar la figura en una posición elevada, por ejemplo, 46 (fig. 5, resp. 3a). O bien, que pueda formular una regla que permita hallar el número de segmentos necesarios para la figura en una posición $n$ cualquiera y realizar una manipulación funcional de la misma (fig. 5, resp. 3b).

En este caso no es posible obtener el número de segmentos mediante una estrategia de conteo directo sobre las figuras. Es necesario identificar una regla del tipo: "La figura en la posición $n$ se compone de $n$ hexágonos, luego para ello se requieren $6n$ segmentos. Pero se deben suprimir los lados interiores cuyo número es $n$–1; como esos lados interiores corresponden a dos hexágonos contiguos se deben descontar $2(n–1)$ segmentos. Luego el número de segmentos necesarios sigue la regla: $N(n) = 6n – 2(n–1) = 4n + 2$. Para el caso $n = 46$, $N(46) = 186$". También se puede establecer que la figura está compuesta por $n$ hexágonos a los cuales se les quita dos lados ($4n$), añadiendo los dos segmentos de los extremos, $4n + 2$.

| | |
|---|---|
| (3a) | b) Añadiría una pregunta del tipo. ¿Cuántos segmentos son necesarios para construir la figura número 23? |
| (3b) | b) Para introducir conocimientos de tipo algebraico puedo preguntar ¿Cuántos segmentos conformarán la sexta figura de la sucesión? Calcúlalo y posteriormente compruébalo a través de la figura<br>Solución ⇒ Nº elementos = $\underbrace{6}_{\text{elementos figura de partida}} + (n-1) \times 4$<br>nº de elementos nuevos por figura.<br>posición respecto a la figura de partida cuantos incrementos la realizado<br>También, puedo preguntar en sentido contrario, si tengo una figura compuesta de 22 segmentos ¿Qué posición ocupará en la secuencia? |

Figura 4. Respuestas a la tarea 3

Los objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución serán: regla general para hallar el número de segmentos, expresada con lenguaje ordinario, o con lenguaje simbólico-literal; función afín, variable independiente, $n$, (número de orden de la figura), variable dependiente, N($n$) (número de segmentos necesarios para construir la figura de orden $n$). Justificación deductiva de la validez de la fórmula.

## RESULTADOS Y SU DISCUSIÓN

En la figura 3 se ha mostrado una respuesta de un estudiante a la tarea 2 donde se observa un conflicto de significado entre las nociones de incógnita y ecuación, que interfieren en el reconocimiento de los objetos variable y función. De hecho, esta cuestión cumple en el cuestionario una función exploratoria que revela que las interpretaciones dadas por los estudiantes reflejan la dualidad "expresión-contenido": indistintamente las respuestas se refieren a *nociones involucradas* (ecuación, función, fórmula; o bien, ecuaciones lineales con 1, 2 o 3 incógnitas), *objetos que representan* (valor solución, recta, perímetro). Asimismo, los estudiantes se refieren indistintamente a *objetos discursivos* (lenguaje, definiciones, proposiciones) u *objetos operativos* (procedimientos y argumentos) que sirven para abordar una situación-problema (por ejemplo, hallar el valor que corresponde a la ecuación, interpretar una relación entre variable o calcular la variable $P$ sumando el doble de las variables $c$ y $l$).

Este tipo de conflicto puede observarse asimismo en las tareas 1 y 3 (figura 6). Así, el estudiante que resuelve la tarea 1 (figura 6) ignora completamente la consigna dada que requiere movilizar el concepto de función; el problema enunciado es una simple reformulación de la tarea aritmética dada introduciendo la noción de incógnita y ecuación. En la solución de esta tarea hemos encontrado que 9 estudiantes de 46 revelan el conflicto de significado entre ecuación y función, que se identifica por un fenómeno de polisemia u homonimia sin fundamento matemático ni contextual.

Se observa que el estudiante que resuelve la tarea 3 (figura 6) solo reconoce en los tres enunciados el concepto de incógnita. Los enunciados que propone no requieren poner en juego las nociones de variable y función. En la solución de esta tarea hemos encontrado 16 estudiantes de 46 que revelan el conflicto de significado entre ecuación y función.

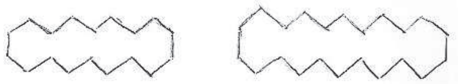
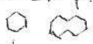
| Cuestión | Respuesta |
|---|---|
| **1** | a) Luis va al supermercado y compra 4 kg de peras, y además, necesita una bolsa para llevar las peras que cuesta 10 céntimos. Si tuvo que pagar 8'10 €. ¿Cuánto cuesta el kg de peras?<br>b) $4x + 0'10 = 8'10$<br>$4x = 8$<br>$\boxed{x = 2}$<br>Por lo tanto, el kg de peras ~~cues~~ vale 2 €.<br>Los conocimientos algebraicos utilizados son las expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones de primer orden. |
| **3** | 6a) <br>nº segmentos = 18 nº segmentos = 22<br>Hay 4 segmentos en cada hexágono + 1 segmento inicial + 1 segmento final<br>nº segmentos = 4 · nº hexágonos + 2<br>= 4x + 2<br>6b) En una fábrica se utilizan palillos para construir las siguientes figuras geométricas  ...<br>Quieren realizar una figura con 24 ⬡, pero necesitan saber cuántos palillos se usarán para construirla y así poder encargarlos.<br>¿Cómo podrías calcularlos sin necesidad de contarlos en un dibujo?<br>6c) Ecuación de primer grado con una incógnita. |

Figura 5. Respuesta de estudiantes a las tareas 1 y 3 donde se observan conflictos de significado

Un grupo de 5 estudiantes elegidos intencionalmente han tenido dos sesiones adicionales de formación sobre el RAE y un cuestionario diseñado *ad hoc*, formado por dos cuestiones: una, resolución de una cuestión; otra, análisis de 7 respuestas con distintos niveles de algebrización al problema planteado (que por razones de espacio no aportamos en este trabajo). La cuestión era:

> Resuelve el siguiente problema mediante tres procedimientos, graduando el nivel de algebrización en ellos: "Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?"

El grupo es heterogéneo, si se atiende a las *titulaciones de origen* (2 ingenieros, 2 arquitectos y 1 matemático), al *rendimiento* mostrado en las actividades programadas (1 bajo, 2 medio y 2 alto) y a su *desempeño profesional* (1 estudiante ejerce de profesor de secundaria, los otros cuatro son profesionales en empresas; dos de estos últimos con experiencia en grupos reducidos y clases particulares). Cuatro estudiantes de este grupo muestran, salvo algunos comportamientos anecdóticos—por lo aislados y no sistemáticos—, un uso fino de la terminología y de la interpretación de los procesos y significados involucrados. La maestría en la interpretación y alcance de los niveles de algebrización otorga a estos estudiantes un instrumento para mejorar sus prácticas operativas y discursivas.

## CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Este trabajo muestra la necesidad de contemplar en la formación de profesores la clarificación de los significados de los conceptos de incógnita, variable, ecuación y función a fin capacitarles para una enseñanza idónea de la iniciación al álgebra de los alumnos. Si los profesores presentan conflictos de significado relacionados con estas nociones tendrán dificultades tanto para interpretar los comportamientos mostrados por sus alumnos en las actividades matemáticas relacionadas como para diseñar tareas adecuadas que favorezcan el pensamiento matemático asociado.

El sistema o red de nociones que confluyen en el concepto de variable desempeña un papel esencial en el trabajo matemático y en consecuencia es clave en la formación matemática de los alumnos de primaria y secundaria. No basta que los profesores tengan un uso operativo de las ecuaciones y funciones, sino que se requiere un conocimiento especializado del contenido que permita comprender los potenciales conflictos y diseñar situaciones que permitan su resolución. Es necesario que los profesores distingan con claridad los objetos lingüísticos y conceptuales involucrados, así como las diversas situaciones en que tales objetos se usan, como una parte de su formación epistemológica especializada orientada hacia la enseñanza.

> "Para ayudar a que los estudiantes comprendan los diferentes y variados significados de una letra como una variable, no justamente como una incógnita, los educadores matemáticos deberían ser capaces de distinguir entre los diversos usos de las letras algebraicas y comprender el modo en que estos diferentes usos se relacionan unos con otros" (Ely y Adams, 2012, 20)

La incógnita y la variable, la ecuación y la función, son objetos conceptuales diferentes aunque con frecuencia se expresan mediante los mismos objetos lingüísticos. La diversidad de definiciones que se pueden dar de la noción de variable (Schoenfeld y Arcavi, 1988), revelan que en cierto modo el término "variable" puede referir a una variedad de objetos diferentes, siendo otro ejemplo del fenómeno ontosemiótico descrito en Font, Godino y Gallardo (2013), el objeto matemático es único y múltiple simultáneamente.

El análisis ontosemiótico de estas nociones, tanto desde el punto de vista epistémico o institucional como cognitivo o personal, ayuda a desvelar la complejidad de objetos y significados involucrados y proponer intervenciones educativas fundamentadas para resolver los conflictos de aprendizaje y progresar en la construcción del conocimiento.

Las deficiencias observadas en las respuestas de los estudiantes a las tareas revelan carencias en el conocimiento y comprensión de la noción de variable, y en consecuencia en la falta de distinción entre ecuación y función. Pero no se trata de deficiencias en el nivel de desarrollo cognitivo sino de carencias en el currículo de formación didáctico-matemática de los estudiantes. Estos pueden superar los estudios de grado de matemáticas con estas carencias conceptuales, pero el desempeño como profesores se puede ver seriamente perjudicado si no se complementa con una profundización en la formación epistemológica específica sobre la pluralidad de significados de los objetos matemáticos y las configuraciones de objetos y procesos en los cuales cristalizan tales significados.

Por último, el análisis clínico de las respuestas de cinco estudiantes, sugiere que la instrucción sistematizada en la comprensión de los niveles de algebrización (Godino et al., 2014) permite a los estudiantes superar los conflictos de significado entre los conceptos de ecuación y función. Este resultado de la instrucción debe ser testado convenientemente, mediante fundamentación teórica y estudios empíricos, que impliquen grupos mayores e igualmente heterogéneos. Es de interés pues identificar los beneficios de una formación basada en los procesos progresivos de simbolización y generalización en los distintos niveles de algebrización.

**Reconocimiento**

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-31869, MINECO.

**Referencias**

Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the PME,* Vol. 2, pp. 129-136. Melbourne: PME.

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: a dialogic perspective. En A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.) (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME*, Vol. 2, pp. 73-80. Kiel, Germany: PME.

Biehler, R., & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. *CERME 8*, 6-10 February 2013, Manavgat-Side, Antalya - Turkey [Disponible en (12/03/2014): http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Kempen.pdf].

Chrysostomou, M., & Christou, C. (2013). Examining 5th grade students' ability to operate on unknowns through their levels of justification. En A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME*, Vol. 2, pp. 185–192. Kiel, Germany: PME.

Colera J., Gaztelu I., & Guzman M. de (1996). *Matemáticas* 1º E.S.O Madrid: Anaya.

Descartes, R. (1886). *La Geométrie*. Nouvelle édition. Paris : A. Hermann, librairie scientifique. [Disponible en (18/03/2014): http://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf]

Ely, R., & Adams, A. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x*? MERJ,* 24 (1), 199–38.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.

Freudenthal, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Frías, V., Molero, M, Salvador A., & Zuasti, N. (2003). *Esfera. Matemáticas: ESO 2*. Barcelona: Casals.

Fujii, T. (2003). Probing students´s understanding of variables through cognitive conflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the International Group for the PME* (Vol. 1): 47–64. Honolulu, HI.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis del conocimiento del profesor de matemáticas. *Unión* 20, 13-31.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49–68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para maestros. *Enseñanza de las Ciencias* 32(1), 199–219.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127–135.

Lacasta, E., Madoz, E. G., & Wilhelmi, M. R. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. *Indivisa*, IV, 79–90.

Palarea, M. (Coord.), Castro, E., & Puig, L. (2012). Seminario II: fines de la investigación en pensamiento algebraico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVI (pp. 71–95). Jaén: SEIEM.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher,* 81(6), 420–427.

Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling? *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the PME* (Vol. 4, 273–280). Haifa, Israel: PME.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, 76, 474–79.