CONOCIMIENTOS MATEMATICOS DE PROFESORES EN PLANIFICACION DE COMPETICIONES DEPORTIVAS

Mathematical knowledge of teachers in sports competitions planning

Ana Teresa Antequera Guerra[a] y María Candelaria Espinel Febles[b]

[a]C.E.O. de Juan XXIII. aantegue@yahoo.es

[b]Universidad de La Laguna. mespinel@ull.es

Resumen

En este estudio se observan las estrategias de resolución y el conocimiento matemático, para una muestra de 70 futuros profesores de Educación Primaria, en relación con la planificación de un torneo deportivo. El análisis se realiza en base a las respuestas dadas a una tarea, que consiste en completar diagramas de árbol según varía el número de jugadores de un torneo deportivo, con el fin de descubrir una pauta de generalización. Los resultados muestran que los futuros profesores recurren a su intuición o a su experiencia personal, mostrando distintas estrategias que no siempre coinciden con la representación válida para resolver el problema. La experiencia sugiere la conveniencia de una formación en matemática discreta, aprovechando la relación interdisciplinar entre deportes y matemáticas y, así, cultivar aprendizajes en distintos contextos.

Palabras clave: *formación de profesores, matemáticas y deportes, diagrama de árbol, resolución de problemas.*

Abstract

This study observes solving strategies and mathematical knowledge, for a sample of 70 future teachers of primary education, in relation to the planning of a sports tournament. The analysis is based on the answers given to a assignment, which involves completing tree diagrams as varies the number of players in the tournament, with the aim of discover a pattern of generalization. Outcomes show that teachers rely on their intuition or personal experience, showing different strategies that do not always coincide with the accurate representation to solve the problem. The experience suggests the convenience of training in discrete mathematics, drawing on the interdisciplinary relationship between sports and mathematics, and thus cultivates learning in different contexts.

Keywords: *teacher instruction, mathematics and sports, tree diagram, problem solving.*

1. INTRODUCCIÓN

La formación de maestros en Educación Primaria debe garantizar que se adquieran los conocimientos necesarios para ejercer las competencias en distintas disciplinas. Además de dominar las materias a enseñar y sus didácticas, así como la relación interdisciplinar entre ellas, se ha de ser capaz de abordar eficazmente situaciones en contextos diversos. La planificación y organización de actividades deportivas es un ejemplo de cómo desde distintas áreas se puede incentivar las competencias. En este contexto, las matemáticas ofrecen conocimientos útiles para lograr una organización exitosa, como son el estudio de emparejamientos, la combinatoria y conceptos de matemática discreta, pudiéndose involucrar al alumnado en el diseño.

La planificación de eventos deportivos recurre principalmente a dos estrategias, los torneos, sistema de rondas eliminatorias, y la liga, competición en la que todos se enfrentan con el resto una sola

Antequera Guerra, A. T. y Espinel Febles, M. C. (2013). Conocimientos Matemáticos de Profesores en Planificación de Competiciones Deportivas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 137-146). Bilbao: SEIEM.

vez. En el caso del torneo se usa como representación el diagrama de árbol y en la liga, un grafo completo, siendo ambos gráficos de gran utilidad en la resolución de problemas matemáticos. En teoría de grafos, un árbol es un grafo conexo sin ciclos. Esto significa que no hay aristas múltiples y que cada par de vértices se conecta por un único camino. El sistema de eliminatorias, conlleva que los perdedores se retiren en cada ronda y se empareje a los ganadores, dando eventualmente descanso a un jugador, si es que queda un número impar de jugadores. El torneo o eliminación directa es muy empleado en competiciones de tenis y en copas de fútbol, y es frecuente su aparición en la prensa deportiva en forma de representaciones en árbol (Espinel, 1995).

La experiencia que se presenta, como *primer propósito,* aspira a que los futuros profesores reconozcan y valoren las conexiones de las matemáticas con situaciones del mundo real. La actividad planteada parte de un torneo con cuatro jugadores, a partir del cual han de diseñar un torneo con seis jugadores, dando lugar a una transición no espontánea y que puede suponer un cierto bloqueo, por lo que se trata de observar las posibles estrategias de solución, siendo este el *segundo propósito* de la experiencia. Luego, se propone organizar un torneo con ocho jugadores, en un intento de establecer una relación entre el número de jugadores, partidos jugados y número de partidos en que participa el posible campeón. Se pretende, como *tercer propósito*, que observen la peculiaridad de la generalización en este modelo.

2. MARCO TEÓRICO

El modelo de *conocimiento del profesor* propuesto por Shulman, y otras adaptaciones posteriores (Godino, 2009), definen el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) como el conocimiento de: los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, la comprensión del alumno y evolución de su razonamiento matemático.

El conocimiento del profesor sobre la matemática puede ser deficitario respecto a algunos campos. Este suele ser el caso de la *matemática discreta* y sus conceptos asociados, como la combinatoria, los grafos, las matrices, la elección social o la teoría de juegos, de ahí el interés de este estudio. El desarrollo de la matemática discreta apenas se ha recogido en los currículos escolares, a excepción de algunos países como Hungría, parte de EEUU, Holanda o Alemania. La resolución de problemas en estos tópicos proporciona una oportunidad para incorporar destrezas propias de la matemática: resolver problemas no rutinarios, con diferentes estrategias, desarrollar el pensamiento crítico, tomar decisiones apoyándose en razonamientos matemáticos, saber cómo el conocimiento científico influye en la actividad práctica (DeBellis & Rosenstein, 2004). Además, permite introducir nuevos contenidos y profundizar en modelos que se aproximen a situaciones reales donde se aplique la matemática.

Para lograr un verdadero aprendizaje, el profesor debe seleccionar buenas situaciones – problema, creando las condiciones para que el estudiante se involucre en la actividad matemática de la resolución, validación de las soluciones aportadas y comunicación. En la *resolución de problemas*, es útil trabajar con modelos (Polya, 1965; Hernández & Socas, 1994). A menudo, estos modelos contemplan trazar un diagrama para entender el significado del problema.

Entre las representaciones que suponen una ayuda para la resolución de problemas se encuentra el *diagrama de árbol*. Este diagrama se usa para enumerar todos los resultados posibles de una serie de experimentos, donde cada experimento tiene un número finito de maneras de llevarse a cabo. Su uso es frecuente en problemas de conteo y probabilidad. En educación primaria, su primera función es facilitar el recuento, especialmente se suele utilizar el diagrama de árbol para problemas de producto cartesiano (Cañadas & Figueiras, 2009).

La *generalización* es una de las estrategias para resolver problemas. Calcular un término lejano quizás resulte muy difícil cuando se pretende que se busque una regla general, por ello, Stacey

(1989) distingue entre tareas de generalización cercana que piden buscar el siguiente término u otro término que puede ser obtenido mediante recuento, o haciendo un dibujo o una tabla, y las tareas de generalización lejana, que requieren la identificación de un patrón o pauta general. Trabajar el proceso de generalización con futuros profesores de primaria, tiene como objeto que dominen los sistemas de representación numérica, gráfica, verbal y algebraica.

Desde un punto de vista formal, en la generalización de un sistema de eliminatorias, si el número de contrincantes n es potencia de dos, $n = 2^k$ (4, 8, 16, 32,…), entonces todos los jugadores participan en la primera ronda, que es el caso para cuatro y ocho jugadores. Sin embargo, si n no es una potencia de dos, $n \neq 2^k$, algunos jugadores entran en la competición en la segunda ronda, situación de seis jugadores. Así, si se llama m al número de jugadores que entran en la competición después de la primera ronda, este número se calcula como la diferencia entre 2^k (menor entero k, tal que $2^k > n$) y el número de contrincantes, esto es, $m = 2^k – n$. Además, el número de enfrentamientos de la primera ronda es $n – 2^{k-1}$. Por ejemplo, para seis jugadores, $n = 6$, se tiene $m = 2^3 – 6 = 2$, siendo dos el número de jugadores que se unen a la competición después de la primera ronda. Y, $n – 2^{k-1} = 6 – 2^2 = 2$, indica que el número de enfrentamientos de la primera ronda es dos. Para el caso de $n = 10$, el número de contrincantes que se unen a la competición después de la primera ronda es seis ($m = 2^4 – 10 = 6$), y el número de juegos de la primera ronda es dos ($n – 2^{k-1} = 10 – 2^3 = 2$).

El problema de investigación en este trabajo es indagar sobre la utilización del diagrama de árbol como apoyo visual para interpretar y predecir datos en contextos deportivos y, además, observar las estrategias que son utilizadas para la organización de un torneo por futuros profesores.

3. METODOLOGÍA

En el estudio participan 70 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de La Laguna. En la asignatura Didáctica de la Numeración, Estadística y Azar, se dedica un tema a la resolución de problemas en el currículo de primaria, los problemas aritméticos aditivos y multiplicativos, y varias estrategias de resolución de problemas.

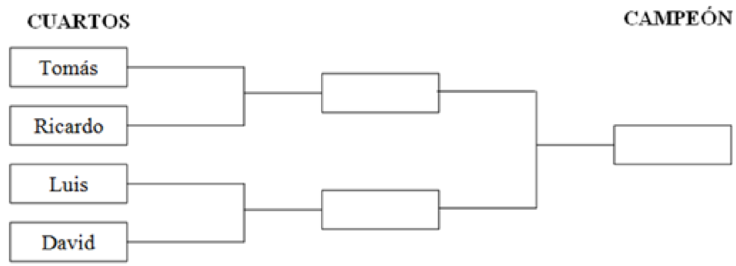
3.1. Tarea propuesta

En la Figura 1 se muestra la actividad que realizan los estudiantes, donde aparecen las cinco cuestiones a las que han de responder.

TORNEO PARA ENCONTRAR AL CAMPEÓN

En el club se convocado un campeonato en el que van a participar los cuatro jugadores. El torneo constará de dos rondas eliminatorias, en las que el ganador pasa a la siguiente fase, y el perdedor es eliminado.

El siguiente cuadro muestra como se desarrolla el torneo



a) *Rellena el cuadro como quieras dando un posible ganador.*
b) *¿Cuántos partidos se juegan en total en este torneo de cuatro jugadores?*
c) *¿En cuántos partidos ha tomado parte el jugador que resulta campeón?*
d) *Construye un cuadro análogo al anterior si participasen en el campeonato seis jugadores, y responde a las mismas cuestiones.*
e) *Haz lo mismo si en el campeonato participan ocho jugadores.*

Figura 1. Actividad presentada a los estudiantes

Esta misma actividad se experimentó con 127 alumnos de secundaría obligatoria (ESO), con una finalidad distinta a los objetivos propuestos en esta investigación, en concreto, para observar las destrezas de estos alumnos en el uso de diagramas de árbol (Antequera & Espinel, 2009), con el propósito de introducir conceptos de teoría de juegos.

3.2. Análisis de la información

Para el estudio de las respuestas de los estudiantes, se considera que ésta consta de nueve preguntas o ítems codificados de la siguiente forma:

A = Completar el árbol de 4 jugadores, apartado a);
B = Número de partidos con 4 jugadores, apartado b);
C = Partidos campeón con 4 jugadores, apartado c);
D1, D2 y D3: corresponden a las preguntas a), b) y c) para 6 jugadores;
E1, E2 y E3: corresponden a las preguntas a), b) y c) para 8 jugadores.

Los resultados se presentan desde dos puntos de vista. Primero, se realiza un estudio cuantitativo sobre la puntuación media del grupo de 70 estudiantes y se recoge el porcentaje de éxito de cada ítem. Se aprovecha el estudio previo realizado con alumnos de secundaria para comparar porcentajes de éxitos. En segundo lugar, se realiza un análisis cualitativo, observando las estrategias y los errores cometidos por los estudiantes, las dificultades y cómo buscan respuestas.

3.3. Resultados cuantitativos de los estudiantes para profesores

Para puntuar los ítems se codificó cada respuesta de forma dicotómica, como 1 = bien y 0 = mal o blanco, por lo que la puntuación de la actividad va de 0 a 9 puntos.

La puntuación media del total de los 70 estudiantes es de 5,14 puntos, según se recoge en la Tabla 1. Sólo tres estudiantes alcanzan los 9 puntos que es la máxima puntuación. En la Tabla 2, fila de profesores, se recogen los resultados relacionados con el éxito a cada uno de los nueve ítems de los que consta la actividad.

Los ítems correspondientes a diagramas de árbol son A, D1 y E1, y obtienen mayor porcentaje de éxito según se muestra en la Tabla 2. El primer ítem A, rellenar el árbol para cuatro jugadores, lo resuelven con éxito la totalidad de los estudiantes (100%). No les resulta tan fácil la construcción del árbol para 6 jugadores, ítem D1, que responden correctamente menos de la mitad de los estudiantes (45%). La pregunta, E1, construcción del árbol para 8 jugadores, presenta un resultado un poco mejor (66%). Para hallar el número de partidos parece que es determinante el tamaño del árbol. Para cuatro jugadores, ítem B, la pregunta tiene un alto éxito (80%), que se reduce para seis (36%), D2, y para ocho (53%), E2, jugadores. En cuanto al número de partidos en que participa el campeón, es llamativo que para seis, D3, muy pocos dan una respuesta (7%) y no saben seguir un camino para el campeón.

3.4. Comparación de resultados de profesores en formación y alumnos de secundaria

En la Tabla 1 se puede apreciar que en los dos grupos la media de las puntuaciones obtenidas es casi la misma, apenas superada por los alumnos de secundaria. De hecho, la diferencia de puntuación entre los dos no es estadísticamente significativa ($t = -1.704$, $p = 0.09$).

Tabla 1: Estadísticos de grupo

Grupo	*n*	Puntuaciones		
		Media	*Desviación típica*	*Error típico de la media*
Profesores	70	5,1429	2,43933	,29156
Secundaria	127	5,7402	2,30669	,20469

Cuando la comparación se realiza por ítems, Tabla 2, los resultados son apreciablemente peores para los futuros profesores.

Tabla 2: Porcentajes con respuestas correctas de cada ítem

	A	B	C	D1	D2	D3	E1	E2	E3
Profesores	100	80	75,71	45,71	35,71	7,14	65,71	52,86	51,43
Secundaria	95,28	77,29	74,80	61,42	47,24	10,24	88,19	57,48	61,42

4. ESTUDIO DE CASOS

Se consideran las soluciones aportadas para las cuestiones relativas a seis y ocho jugadores, realizando un análisis cualitativo según estrategias de resolución.

4.1. Árbol para seis jugadores

Entre los estudiantes que responden a la pregunta d) sobre un árbol con seis jugadores, se muestran cinco casos que resumen las estrategias seguidas y que suponen patrones diferentes.

CASO 12d

Este estudiante recurre a un árbol doble, Figura 2, sin completar con nombres de jugadores en las casillas. El modelo es el ideal, en el sentido de que es puro, abstracto y esquemático. Lo que concuerda con la madurez que se le supone a un estudiante universitario.

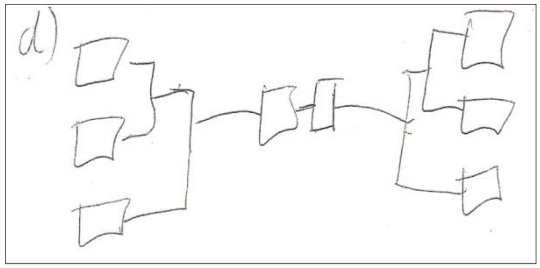


Figura 2. Árbol doble, 12d

CASO 38d

El caso 38d difiere del anterior, el árbol no es doble y, además, lo personaliza. Aunque recoge las distintas rondas, se observa en la Figura 3 que no coloca correctamente los emparejamientos, los jugadores Luis y Juan que sitúa en Cuartos de Final deberían estar en Semifinales, pues son los que no juegan la primera ronda. Elige a Luis, que ha jugado dos partidos, como el campeón de este torneo y, por tanto, no se da cuenta que, al personalizar, comete un error que no le permite ver otro posible ganador. Es decir, no se da cuenta que hay dos posibilidades para el ganador en lo que se refiere al número de partidos jugados.

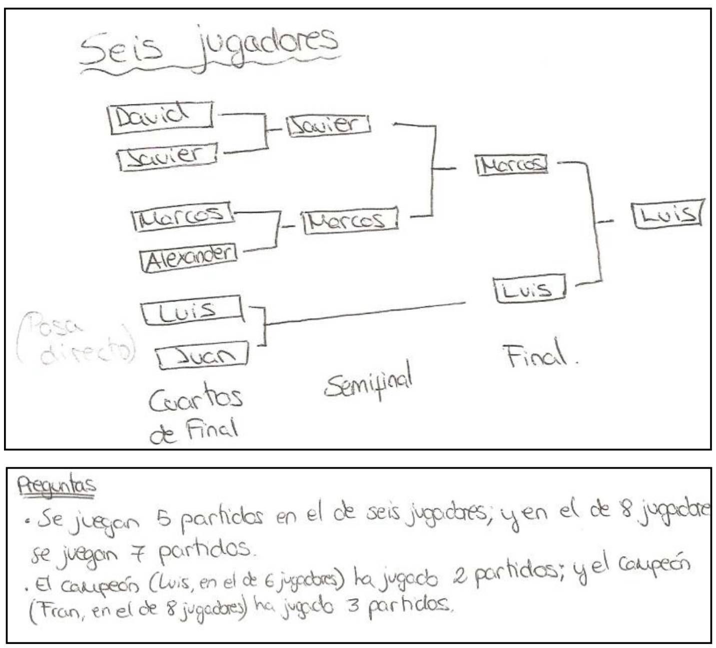


Figura 3. Árbol y respuesta a preguntas, 38d

CASO 49d

Este estudiante, Figura 4, sin llegar a personalizar con nombres, sí que marca el ganador con una cruz, y esto le impide detectar la otra solución posible para el número de partidos que juega el ganador, con lo que comete el mismo error que el caso 38d.

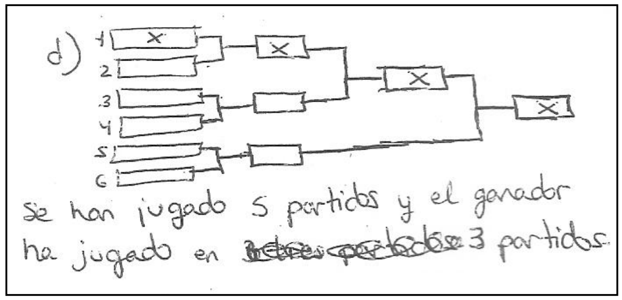


Figura 4. Árbol, 49d

CASO 54d

Se observa en la Figura 5 como, al encontrarse con un número impar de jugadores en la segunda ronda, resuelve organizando un triangular. Sin embargo, no llega a definir las normas de este tipo de enfrentamiento, ni a explicarlo. Además la representación no es un árbol en el sentido matemático de grafo.

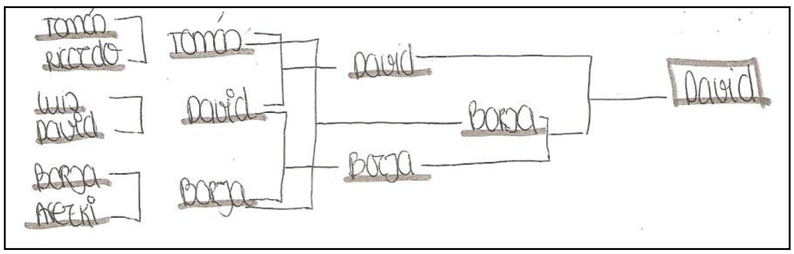


Figura 5. Triangular, 54d

CASO 55d

El caso 55d también presenta una respuesta en forma de triangular, Figura 6, en la que define y explica el mismo, dando una solución si se produce un triple empate entre los tres jugadores en la segunda ronda. De hecho, completa su respuesta escribiendo: *La final se juega un triangular a enfrentamiento único y en caso de triple empate el de mejor resultado*.

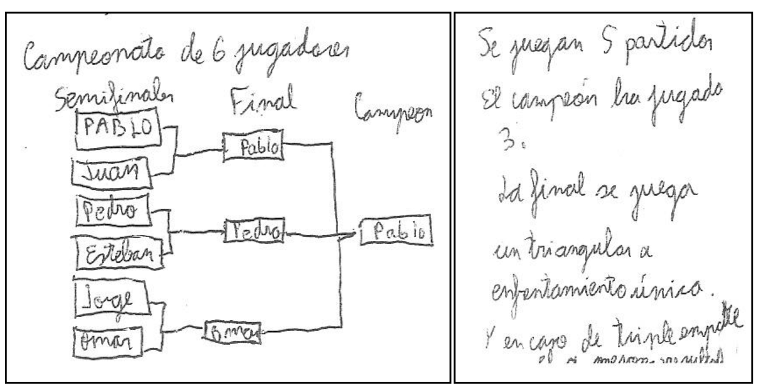


Figura 6. Triangular con respuestas de partidos, 55d

En la pregunta d), construir un árbol para seis jugadores, sólo dos estudiantes trazan un árbol doble como el que se recoge en la Figura 2, el resto resuelve la planificación del torneo con una representación análoga a la que le muestra en el enunciado de la actividad con cuatro jugadores, Figura 1, realizan tres parejas y es en la segunda ronda cuando se plantean cómo seguir la organización del torneo. A partir de aquí surgen dos estrategias. En la primera plantean un árbol si en la primera ronda juegan cuatro jugadores y los otros dos jugadores se incorporan en la segunda, estrategia seguida por el 94% de los estudiantes que responden correctamente esta cuestión, corresponde a las Figuras 3 y 4. La final la juega el campeón de los cuatro primeros jugadores con el que sale ganador de la pareja que juega sólo en la segunda vuelta. La segunda estrategia plantea una primera vuelta en la que juegan los seis jugadores, de la que resultan tres ganadores y con estos plantean un triangular. Las respuestas de este tipo corresponden a las Figuras 5 y 6. Muchos de los estudiantes que optan por esta "solución", proponen que si estos tres jugadores se enfrentan entre sí, de ahí ha de salir el campeón. Salvo excepciones como el caso de la Figura 6, que trata de explicar las reglas y condiciones del triangular, la mayoría de los futuros profesores no muestran conocer que la relación "ganar a" no es transitiva, lo que puede llevar a un empate triple entre los jugadores, razón por la que esta respuesta no es válida.

4.2. Árbol con 8 jugadores

En las respuestas a la pregunta e), torneo de ocho jugadores, se recogen dos variantes.

CASO 8e

El caso 8e personaliza sólo con letras, y une dos cuadros de cuatro jugadores para obtener el cuadro de ocho jugadores, que, además, coincide con la configuración estándar que se utiliza en las competiciones deportivas cuando se muestran en prensa las eliminatorias entre jugadores o equipos. Hay siete estudiantes que construyen un árbol doble como se recoge en la Figura 7, son el 15% de los que contestan bien.

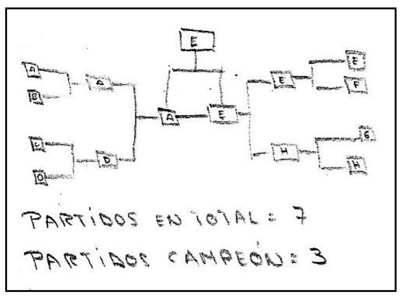


Figura 7. Árbol, 8e

CASO 49e

La Figura 8 muestra el gráfico típico que ha elaborado la mayoría de los estudiantes que responden correctamente a esta cuestión. En este caso 49e, va marcando el posible ganador como guía para poder responder a la pregunta sobre cuántos partidos juega el campeón. Este estudiante, el mismo cuya aportación se recoge en la Figura 4, mantiene su estrategia para encontrar el campeón marcando las casillas del gráfico.

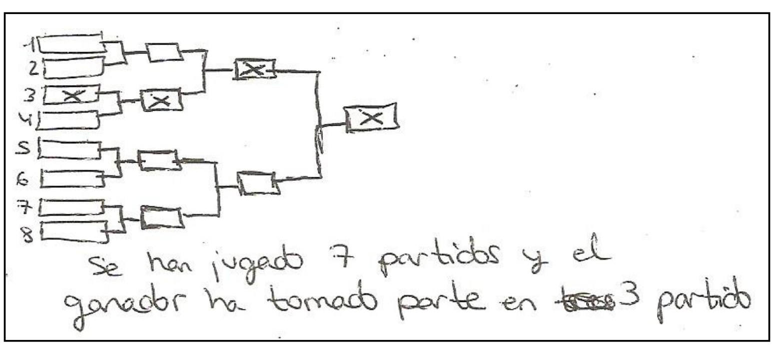


Figura 8. Árbol, 49e

5. CONCLUSIONES Y REFLEXIÓN

Los resultados muestran que, respecto al primer propósito, relación deportes y matemáticas, los estudiantes entienden la situación que se les plantea, aunque el contexto en el que se desarrolla, una competición deportiva, les resulta extraño en el contexto de una clase de didáctica de la matemática. A grandes rasgos, las producciones de los estudiantes responden a dos comportamientos. Aquellos que, a partir del árbol con cuatro jugadores, lo reproducen para ocho jugadores, siendo quizás éste, el comportamiento esperado en una clase de matemáticas, aunque su razonamiento y pensamiento matemático no les permite abstraerse para conseguir la solución general a las preguntas. Y el proceder de los que recurren a sus conocimientos deportivos para responder y continuar la secuencia cuando aumenta el número de jugadores. Ese conocimiento de la vida cotidiana les lleva a situaciones que no les permite responder con éxito a preguntas sobre el número de partidos jugados en los que participa el campeón.

El segundo propósito, el uso de los diagramas de árbol en la resolución de problemas y observar las estrategias, lleva a varias reflexiones. Se puede considerar que la experiencia proporciona información de lo que los estudiantes piensan sobre la construcción de cuadros de competición, pudiéndose detectar distintas estrategias de solución. En la construcción del árbol con seis jugadores es donde surgen las producciones más interesantes, ya que la tarea que tienen que realizar no es mera reproducción, sino que han de adaptar el modelo propuesto. Además, es significativo señalar cómo intentan plantear sistemas de competición que sean, además de lógicos, justos para todos los jugadores. Surgen estrategias que llevan a plantear soluciones alternativas a la correcta, pero que no se pueden considerar como totalmente erróneas. Así, muchos estudiantes consideran que cuando hay tres jugadores debe ganar el mejor de los tres. El triangular sería una opción válida si no hubiese condiciones matemáticas implícitas que hacen que su estrategia falle y que los estudiantes desconocen. Es el caso de las relaciones de orden y su aplicación desde el punto de vista práctico y, en concreto, la relación de transitividad que aplican para encontrar el campeón y que no se verifica en el caso de un triangular.

Sobre trabajar un proceso de generalización cercana y lejana, para observar pautas o buscar patrones ante la generalización numérica y algebraica, se desiste después de observar las dificultades y concepciones erróneas que arrastran los estudiantes y que se observan en los casos particulares o generalización cercana. Esto no impide que algunos sí que lleguen a deducir que lo más cómodo para planificar es que el número de jugadores sea una potencia de dos, es decir, lo más que llegaron fue a escribir esta secuencia. A posteriori, se esperaba realizar una discusión sobre los errores y dificultades, que fuese motivo de reflexión, como una ayuda profesional y su posible adaptación a primaria.

Esta experiencia ratifica la importancia del conocimiento del profesor según modelo de Shulman, pues se observa que fallan los contenidos matemáticos, debido a que su formación en combinatoria y probabilidad ha sido escasa, tienen un mínimo conocimiento de la matemática discreta y nulo en grafos. Así, trazan árboles donde las aristas se superponen o duplican los vértices, cometiendo errores similares a los alumnos de secundaria, como conectar los jugadores, vértices del grafo, por más de un camino, pues desconocen totalmente la idea de representación de árbol como un grafo. Los futuros profesores no parece que posean mayor formación en este sentido que los alumnos de secundaria.

El hecho de que un alto número de estudiantes deje en blanco las cuestiones sobre el número de partidos jugados en total y por el ganador tiene como consecuencia que los porcentajes de éxito sean bajos en estas cuestiones, siendo incluso peores que los de los alumnos de secundaria. El relativo peor resultado, puede deberse al tiempo disponible ya que en esta experiencia sólo dispusieron de media hora, mientras que en secundaria tuvieron toda la hora de la clase de matemáticas. Además, en secundaria habían tenido instrucción previa en combinatoria y probabilidad, mientras que para los fututos profesores, la actividad es anómala en clase de didáctica de las matemáticas. Si bien, a posteriori, varios solicitan que se profundice en esa relación de las matemáticas con la planificación de competiciones deportivas, ya que saben que entre sus múltiples competencias, estará organizar actividades deportivas en el centro escolar.

Referencias

Antequera, A.T., Espinel, M.C. (2009). Diagramas de árbol como destrezas cotidianas de estudiantes de secundaria. *Actas XIV Jaem*, Girona.

Cañadas, M.C., Figueiras, L. (2009). Razonamiento en la transición de las estrategias manipulativas a la generalización. En M.J. González, M.T. & J. Trujillo (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 161-172. Santander: SEIEM.

DeBellis, V.A., Rosenstein, J.G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM,* 36, 2, 46-55

Espinel, M.C. (1995). La presencia de la matemática discreta en las competiciones deportivas. *Boletín Sociedad "Puig Adams"*, 47, 47-57.

Godino, J.D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.

Hernández, J., Socas, M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas. *Suma,* 16, 82-90.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 2, 147-164