Una introducción a la teoría de grafos

Germán Combariza
Profesor del Colegio Santa María Bogotá-Colombia.
Bogotá, Colombia
gcombar@yahoo.com.

Resumen

Con Frecuencia encontramos artículos que hablan sobre los radicales cambios de la educación matemática y cómo esta se sigue enseñando de la misma forma y con el mismo enfoque que hace más de cien años. Lo que no se encuentra son propuestas nuevas ni textos que permitan otro enfoque de la materia.
El siguiente artículo pretende mostrar una nueva propuesta para las aulas de clase. Usando un tema tan "sencillo" como es *La Teoría de Grafos* se quiere mostrar una opción de trabajo para estudiantes de educación media que permita abrir camino a problemas muy complicados partiendo de enunciados sencillos cuya solución es más cercana a un juego que a una demostración matemática[1].

1. Algo de Historia.

Durante los últimos 200 años las matemáticas han sufrido bastantes cambios, pero el contenido que se sigue enseñando en las aulas de clase parece intacto. Los libros que sirven de guía para las clases actuales están hechos con un modelo de vida que caducó hace ya bastante tiempo.

Cuando comenzaron a aparecer los primeros libros de matemáticas estos estaban dirigidos a un público con unas necesidades y un contexto muy distinto al

[1]Algunos de los resultados requeridos en el artículo no se demostrarán en su totalidad, en la mayoría de los casos sólo dará una idea de la demostración formal, la demostración completa se puede leer en la bibliografía.

que tenemos en la actualidad. Cerca de 1800 las matemáticas eran una necesidad cotidiana de todo artesano, mercader, tendero y demás, de aquí que los libros dedicaran gran parte de su contenido (sino todo) a enseñar propiedades de los números enteros y sus operaciones más básicas, dejando a un lado la deducción y creando una visión errónea de las matemáticas que las acercó más a la "numerología".

Con la creación de una máquina que puede hacer cálculos 1'000.000 veces más rápido que el cerebro humano como el computador, se abrió camino a nuevas tendencias de educación matemática, permitiendo así explorar nuevas ideas para la enseñanza de esta. Así, el problema de calcular se convirtió en programar, dejando un espacio para comenzar a enseñar conceptos más abstractos como parte de las matemáticas que den una proyección sobre la educación de la misma.

En el colegio Santa Maria hemos optado por ensenãr matemáticas con dos enfoques muy importantes. El primero; matemáticas aplicadas, que permiten que el alumno comprenda que los conceptos más básicos como los de *pendiente de una recta e intersecciones de rectas* pueden ser útiles para calcular puntos de equilibrio entre las pérdidas y las ganancias de una empresa.

El segundo enfoque que se pretende dar a las matemáticas es tratar que el alumno comprenda que estas son una ciencia racional. La lógica humana permite llegar a conclusiones a través de la razón, ya sea por comparación, inducción o deducción, se pretende que el alumno sea capaz de reconocer y deducir verdades partiendo de otras usando solamente su razón.

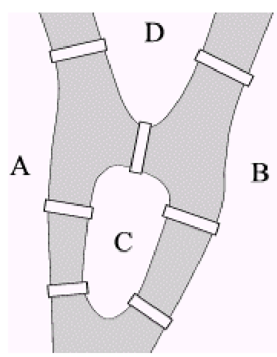
Se escogió *la teoría de grafos* como tema principal porque permite que el alumno tenga un sentido geométrico de los algoritmos que está usando. Además el tema es tan extenso que permite ser tan riguroso o tan flexible como el maestro desee.

2. Introducción a la Teoría de Grafos.

2.1. Motivación.

La teoría de grafos es una de las ramas más importantes de las matemáticas modernas, comenzó en el siglo XVIII por una de las mentes más grandes que ha existido. En 1736 el matemático Suizo Leonhard Euler publicó un artículo llamado *Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis*, en español *La solución de un problema referente a la geometría de posición*. En este artículo aparece la solución al famoso problema de los puentes de Königsberg.

Königsberg era un puerto en la antigua Alemania, que actualmente pertenece a Rusia y se llama Kaliningrado, situado en la costa sur del mar Báltico, cerca de la desembocadura del rio Pregel. El rio dividía la ciudad en cuatro áreas de tierra separadas, y había siete puentes que le permitían a los habitantes de Königsberg cruzar el rio para poder trasladarse de una parte a otra de la ciudad como lo muestra la siguiente figura.



(2.1.1)

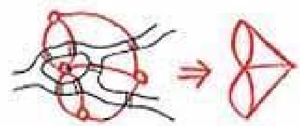
Figura: 1

La pregunta que intrigaba a los habitantes de Königsberg es la siguiente.

¿Será posible caminar por toda la ciudad cruzando cada uno de los siete puentes exactamente una vez?.

Cuando Euler se encontró con el problema de los puentes de Königsberg sus habitantes pensaban que no se podía, pero hasta el momento no había ningún argumento que comprobara sus presentimientos.

La idea de Euler fue bastante sencilla pero genial para su época. Euler hizo un *modelo matemático* del problema. Es decir, sólo tomó la información relevante de este y se deshizo de hechos como la longitud de los puentes, o el área de cada región, y se concentró en la relación entre las ciudades y los puentes, nombrando a cada ciudad como un punto y a cada puente simplemente como una línea que une dos ciudades, de la siguiente manera.



(2.1.2)

Figura: 2

Lo anterior es lo que vamos a conocer como grafo, ciertos puntos unidos con líneas. Vemos que en el caso de los puentes de Königsberg el grafo despoja de toda información superflua al problema y convierte le pregunta de sus ciudadanos en la siguiente.

¿Es posible trazar la figura (2.1.2) sin despegar el lápiz del papel y sin volver a trazar ninguna porción de una línea?.

Más adelante mostraremos la respuesta que dió Euler a este problema y otros aún más generales, pero antes se hace necesaria la introducción de algunos conceptos básicos.

2.2. Definiciones Básicas.

Definición 1. *Un Grafo* **G=(V,A)** *es una colección de puntos llamados vértices* **V***, unidos por líneas llamadas aristas* **A***. Cada arista une dos vértices.*

Ejemplo 1. .

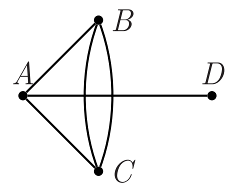


Figura: 3

En este caso el conjunto de vértices está formado por los puntos

$$V = \{A, B, C, D\}$$

y las aristas

$$A = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, C\}\}.$$

Las aristas no tienen que ser líneas rectas, pueden ser arcos, segmentos curvos, etc. El caso en que una arista conecta a un vértice con él mismo también está permitido, y en este caso le llamamos *lazo*. También está permitido el caso en que más de una arista conecta los dos mismos vértices. A estas aristas se le llaman *aristas múltiples.*

En el ejemplo anterior no hay lazos, pero sí dos aristas múltiples que unen los vértices B y C.

En algunos casos es útil que las aristas tengan alguna dirección. En este caso por ejemplo la arista que une los puntos X y Y se puede notar por $\overrightarrow{\{X, Y\}}$ o solamente por (X, Y). Por ejemplo

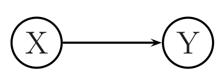


Figura: 4

A estos grafos los llamaremos *grafos dirigidos*, pero están por fuera del tema a tratar en este artículo.

2.3. Isomorfismo

Esta sección se puede trabajar de varias maneras: se pueden tomar solamente las definiciones formales como preliminares a las aplicaciones de la teoría de grafos de las siguientes secciones, o como segunda opción, se podría ver cada definición como una necesidad o una respuesta a una pregunta que probablemente no sea tan atractiva como las preguntas de las secciones siguientes.

Ahora trataremos algunos conceptos básicos de la teoría de grafos. Comenzamos nuestra discusión motivados por la siguiente pregunta:

¿Cuándo dos grafos son equivalentes?, por ejemplo **¿Son los dos grafos de la figura 2.3.1 equivalentes?**

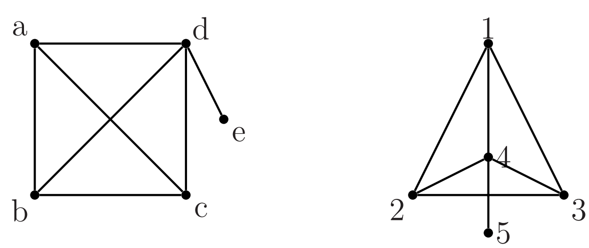


Figura: 5 (2.3.1)

¿Qué significa que dos grafos sean equivalentes?. El mismo grafo puede ser dibujado de maneras muy distintas, por tanto se hace necesaria una definición formal, a saber.

Definición 2. *Dos grafos son isomorfos si existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de estos y además esta correspondencia respeta las aristas. Esto es: llamemos $G = (V, A)$ el primer grafo y $H = (U, B)$ el segundo. Un isomorfismo $\phi : G \to H$ es una función que cumple; $\phi_v : V \to U$ es biyectiva y $\{a, b\} \in A \Leftrightarrow \{\phi_v(a), \phi_v(b)\} \in B$ para todo a, b en V. ϕ_v se entiende como la restricción del isomorfismo a los vértices, por abuso de notación se usará ϕ por ϕ_v.*

Es claro que en la figura 2.3.1 existen vértices "especiales", en este caso lo vértices e y 5 del primer y segundo grafo respectivamente. Lo que hace especiales a estos vértices es el número de aristas que los conectan con los demás vértices, esto da lugar a lo siguiente:

Definición 3. *El grado de un vértice v es el número de aristas que lo contienen y este número se nota por $deg(v)$.*

Definición 4. *Dos vértices u, v se dicen adyacentes o vecinos si existe una arista que los contiene, esto es si $\{u, v\} \in A$.*

En el caso de la figura 2.3.1 se tiene que $deg(e) = deg(5) = 1$ mientras que el grado de cualquier otro vértice excepto sus vecinos es 3. Esto induce cómo construir un isomorfismo ϕ de G en H, pues se debe tener entonces $\phi(e) = 5$. Ahora, para que el isomorfismo respete aristas es necesario que los vecinos de e vallan a los vecinos de 5 por tanto $\phi(d) = 4$, por la misma razón se puede tomar $\phi(a) = 1$, $\phi(c) = 4$ y $\phi(b) = 3$. Es fácil ver que la función ϕ resulta un isomorfismo de G en H.

Otro concepto básico es el de *subgrafo*.

Definición 5. *Un subgrafo de un gafo es un subconjunto de vértices del grafo original, y un conjunto de aristas entre estos.*

En la figura 2.3.1 si se suprimen los vértices e y 5 se tienen dos grafos de cuatro vértices todos adyacentes, con esta idea se ve fácilmente que los dos grafos deben ser isomorfos. Más general, a un grafo de n vértices todos unidos entre sí se le llama grafo completo y se nota por K_n. Por ejemplo K_1 es un grafo con un sólo vértice, K_2 es un grafo con dos vértices y una arista que los une. Los grafos de la figura 2.3.1 suprimiendo los vértices e y 5 son isomorfos a K_4.

Un problema similar pero de complejidad menor gracias a las previas definiciones es el siguiente:

Ejemplo 2. *Son los grafos de la siguiente figura isomorfos?.*

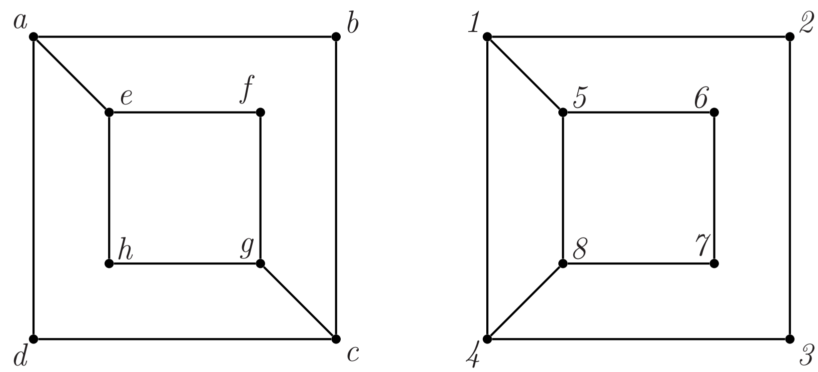


Figura: 6

Ambas gráficas tienen 8 *vértices y* 10 *aristas. Los vértices* a, e, g, c *y* $1, 5, 8, 4$ *tienen grado* 3*, mientras que los demás grado* 2*, pero el vértice* 5 *es vecino del vértice* 1 *y el vértice* 8*, ambos de grado tres condición que no se cumple en el primer grafo. Por tanto los grafos no son isomorfos.*

Más aún, si se miran los subgrafos de cada grafo compuestos por lo vértices de grado 2 *se tiene que en el segundo subgrafo aparecen las aristas* $\{6, 7\}, \{2, 3\}$ *mientras que en el primero no aparece ninguna arista, sólo los vértices* h, f, b, d*. Este es otro argumento por el cual no pueden ser isomorfos.*

A un grafo con n vértices pero ninguna arista se le llama *grafo nulo* y se nota por N_n, en el ejemplo anterior el primer subgrafo de los vértices de grado dos es isomorfo a N_4.

Ejemplo 3. *Son los siguiente grafos isomorfos?*

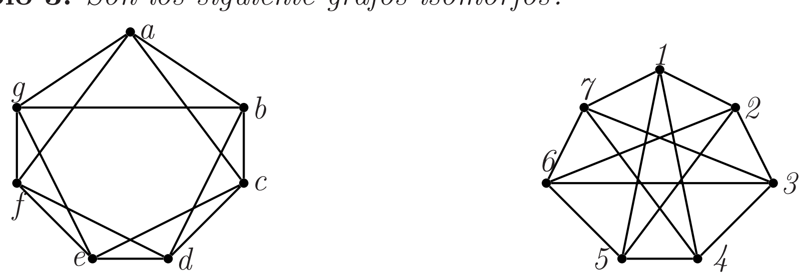


Figura: 7 (2.3.2)

Los dos grafos tienen 7 *vértices y* 14 *aristas. Cada vértice tiene grado* 4. *Ahora si se toman los subgrafos que forman los vértices vecinos de* 1 *y a se obtienen las siguientes figuras*

Figura: 8

Estos dos subgrafos claramente son isomorfos, así que este método no nos mostró ninguna diferencia entre los grafos. Resta comenzar a construir un isomorfismo para los grafos de la figura 2.3.2, lo cual podemos hacer usando los subgrafos, pues estos dan condiciones sobre el isomorfismo. Una mejor idea para mostrar que los grafos son equivalente es la siguiente.

Dado un grafo $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{A})$ su *complemento* es un grafo $\bar{\mathbf{G}} = (\mathbf{V}, \bar{\mathbf{A}})$ con el mismo conjunto de vértices pero ahora las aristas entre estos son precisamente las aristas que no aparecen en $\mathbf{G}$. Por ejemplo el complemento del grafo completo K_n es precisamente el grafo nulo N_n. Dos grafos $\mathbf{G_1}, \mathbf{G_2}$ son isomorfos si y solo si sus complementos $\bar{\mathbf{G}}_\mathbf{1}, \bar{\mathbf{G}}_\mathbf{2}$los son. La siguiente figura muestra el complemento de los grafos que aparecen en la figura 2.3.2.

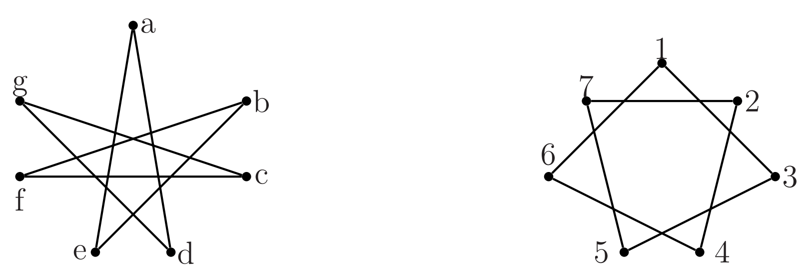


Figura: 9

Es fácil mostrar que los grafos anteriores son isomorfos al siguiente grafo,

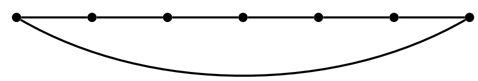


Figura: 10

por tanto los grafos de la figura 2.3.2 también deben serlo.

Definición 6. *Una trayectoria es una sucesión de vértices con la propiedad de que cada vértice es adyacente al siguiente y tal que en la correspondiente sucesión de aristas todas las aristas son distintas. Es permitido que un vértice aparezca en una trayectoria más de una vez.*

Un circuito es una trayectoria que comienza y termina en el mismo vértice.

Los complementos de los grafos de la figura 2.3.2 son ambos isomorfos a un circuito de longitud 7 esto es un circuito con 7 vértices.

Definición 7. *Un grafo es conexo si cualesquiera dos de sus vértices se pueden unir por un trayectoria.*

Un grafo que no es conexo se dice que es disconexo, este está formado por varios pedazos, a los pedazos se les dice componentes conexas.

El primer grafo de la siguiente figura es conexo, mientras que el segundo y el tercero no lo son. El segundo grafo tiene dos componentes conexas y el tercero tres componentes.

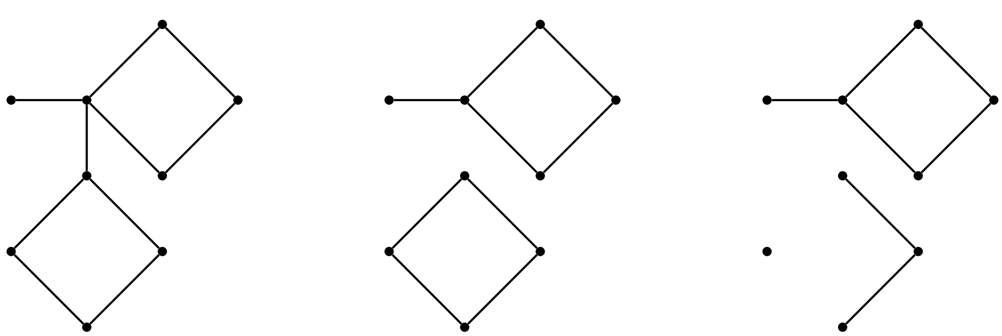


Figura: 11

3. Problemas y Aplicaciones de la Teoría de Grafos.

3.1. La Firma del Diablo.

Un juego infantil que para todos es muy conocido consiste en tratar de dibujar ciertas figuras sin levantar el lápiz del papel y sin volver a trazar ninguna porción de línea. Por ejemplo:

¿Es posible trazar las siguiente gráficas sin volver a trazar ninguna porción y sin levantar el lápiz del papel, terminando en el punto de inicio?, terminando en un punto distinto al de inicio?.

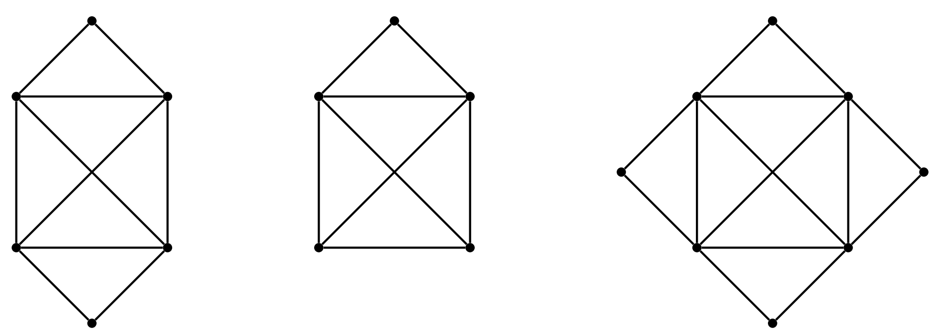


Figura: 12

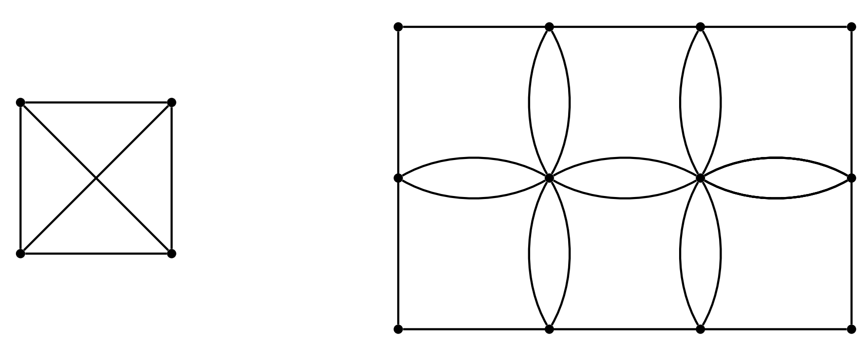


Figura: 13

El juego de la firma del diablo consiste en responder las preguntas planteadas, saber cuales de las siguientes gráficas se pueden trazar sin levantar el lápiz. En las primeras gráficas, es posible llegar a conclusiones por medio de ensayo y error, pero las últimas gráficas son mucho más complicadas, para esto necesitamos utilizar algunos conceptos de la sección anterior y estudiar la solución que dió Euler al problema de los puentes.

3.2. Trayectorias y Circuitos Eulerianos.

Una *Trayectoria de Euler* es una trayectoria que recorre todas las aristas de un grafo conexo. Análogamente, un *Circuito de Euler* es un circuito que recorre todas las aristas de un grafo conexo.

En las secciones anteriores se dejaron abiertas preguntas, como la de los puentes de Königsberg y la firma del diablo, es claro que todas estas preguntas se resumen a **encontrar un circuito de Euler** en los grafos correspondientes, esto motiva a una pregunta un poco más general.

¿Para qué grafos existe un circuito de Euler?.

¿Para qué grafos existe una trayectoria de Euler?.
Los dos siguientes teoremas dan respuesta a esto.

Teorema 1 (Existencia de trayectorias de Euler). *.*

1. *Si un grafo tiene más de dos vértices de grado impar, entonces no puede tener una trayectoria de Euler.*

2. *Si un grafo conexo tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces tiene por lo menos una trayectoria de Euler. Cualquier trayectoria de Euler debe iniciar en uno de los vértices de grado impar y terminar en el otro.*

Una explicación sencilla del anterior teorema es la siguiente. Euler observó que para encontrar una trayectoria en un grafo que cruce una sola vez cada arista es necesario que cada vez que la trayectoria tome una arista para llegar a un vértice, debe haber otra arista distinta que permita abandonarlo para poder continuar con el recorrido.

De esta manera si un vértice tiene grado impar existe una arista más que llega al vértice que las que salen de él, o viceversa, esto convierte al vértice en un punto final o punto inicial. Por tanto para que exista una trayectoria de Euler es necesario que exista a los más dos vértices de grado impar.

La existencia de la trayectoria cuando el grafo es conexo se verá mas adelante con *el algoritmo de Fleury*.

Ahora, sino se desea una trayectoria sino un circuito de Euler es necesario que el punto final coincida con el punto inicial, por tanto el grafo no puede tener vértices de grado impar como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2 (Existencia de circuitos de Euler). .

1. *Si en un grafo algún vértice tiene grado impar, entonces no puede tener un circuito de Euler.*
2. *Si todos los vértices de un grafo conexo tienen grado par, entonces hay por lo menos un circuito de Euler.*

Un caso que al parecer queda por fuera de nuestro análisis preliminar es, ¿Qué pasa con el grafo si solo tiene un vértice de grado impar?, pregunta que se responde con el siguiente lema y corolario.

Lema 1. *En cualquier grafo la suma de los grados de todos los vértices es igual a dos veces el número de aristas.*

Demostración. Si se suman todas las aristas de un grafo cada una de estas contribuye en uno al grado de cada uno de los vértices que la definen, por tanto al contar las aristas se están contando dos veces los grados de cada vértice, de tal manera al sumar las grados de los vértices estos son el doble del número total de aristas. □

Corolario 1. *Cualquier grafo tiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración. Por el lema anterior se sabe que la suma de los grados de todos los vértices de una grafo debe ser un número par, y una suma impar de números impares es también impar, de igual forma la suma par de números pares es par, por lo que es imposible que un grafo tenga un número impar de vértices con grado impar. □

3.3. Conclusiones.

Luego de entender la teoría presentada en las secciones anteriores es posible argumentar una respuesta al problema de los puentes de Königsberg.

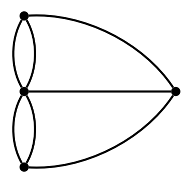


Figura: 14

El grafo asociado a este problema tiene en total cuatro vértices, todos de grado impar, por tanto se puede concluir que no existe ni una trayectoria de Euler y mucho menos un circuito de Euler, por lo que es imposible entonces visitar las cuatro ciudades cruzando cada puente una sola vez.

Es un buen momento para observar cómo un problema tan "sencillo"es capaz de motivar toda una teoría que permite resolverlo argumentando de la mejor manera su solución. Con estas herramientas es fácil entonces saber si el juego de la firma del diablo tiene o no solución, esto es:

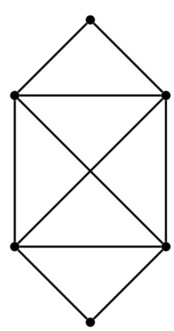


Figura: 15

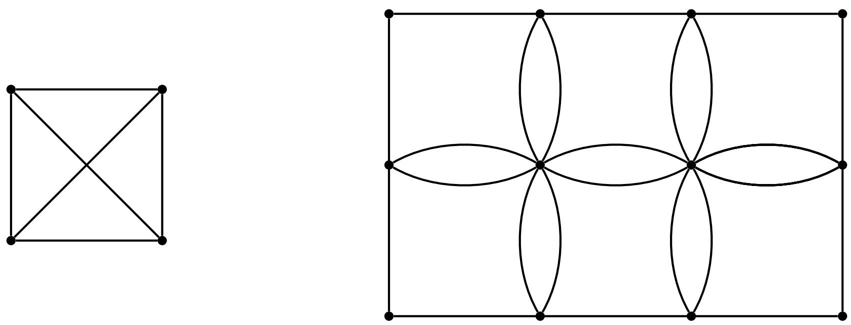


Figura: 16

Los anteriores grafos tienen todos sus vértices de grado par, por tanto tienen circuitos de Euler, mientras el Siguiente grafo tiene una trayectoria de Euler pero no un circuito, pues tiene dos vértices de grado impar.

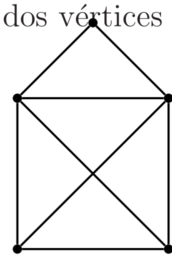


Figura: 17

El siguiente grafo no tiene ni circuitos de Euler ni trayectorias de Euler, pues tiene más de dos vértices de grado impar.

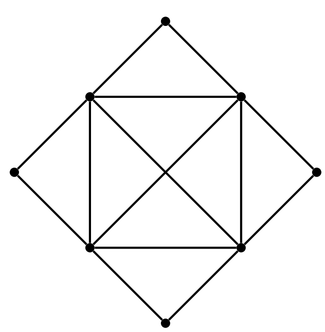


Figura: 18

3.4. El Algoritmo de Fleury

Gracias a los teoremas de Euler es posible saber si un grafo dado tiene trayectorias o circuitos de Euler, lastimosamente estos teoremas no indican la manera ed encontrar dicho recorrido. En esta sección se mostrarán una serie de instrucciones muy sencillas conocidas como *El algoritmo de Fleury* las cuales permitirán encontrar una trayectoria o circuito de Euler en caso de que este exista. Una definición preliminar necesaria es la de *puente*. Un **puente es una arista tal que al quitarla grafo se convierte en un grafo disconexo**.

Los pasos a seguir en **El Algoritmo de Fleury** para encontrar una trayectoria de Euler son los siguientes:

1. Verificar que el grafo cumpla con las hipótesis expuestas en el teoremas trayectorias de Euler.
2. Escoger un vértice de grado impar. En caso de que no exista, se puede escoger cualquier vértice.
3. En cada paso, recorre cualquier arista disponible, eligiendo un puente solo cuando no halla alternativa. Al recorrer la arista borrarla y continuar el proceso hasta que todos lo vértices tengan grado cero.

Esto se ve más claro con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. *Es posible dibujar el siguiente grafo sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ningún trazo?.*

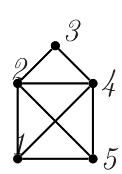


Figura: 19

En otras palabras se desea encontrar una trayectoria de euler para el grafo. Aplicando el algoritmo de Fleury se tiene lo siguiente.

Como vértice de partida se pueden escoger el vértice 1 *o el vértice* 5. *Sin pérdida de generalidad escogemos el vértice* 1. *Ahora se puede escoger cualquier arista, tomando la arista* $\{1,5\}$ *se tiene*

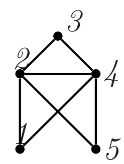


Figura: 20

Desde el vértice 5 *es posible llegar a los vértices* 2 *y* 4, *como ninguna de las aristas que los unen son puentes podemos tomar cualquiera; sin perdida de generalidad tomamos la arista que nos deja en el vértice* 2.

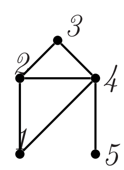


Figura: 21

De igual forma, cualquier arista es válida, así que tomamos la arista $\{2,4\}$ *y obtenemos el siguiente grafo.*

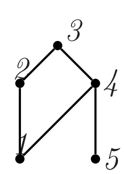


Figura: 22

En este grafo el vértice 4 *tiene tres vértices vecinos, el vértice* 5, *el vértice* 3 *y el vértice* 1, *pero la arista* $\{4,5\}$ *es un puente, de tal manera tomamos la* *arista* $\{4, 3\}$ *que no es un puente y obtenemos:*

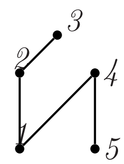


Figura: 23

Desde el vértice 3 *solo hay una posibilidad, el vértice* 2*.*

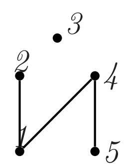


Figura: 24

De nuevo, desde el vértice dos solo hay una posibilidad, el vértice 1 *y desde este solamente el vértice* 4

Figura: 25

Y por último desde el vértice 4 *hasta el vértice* 5*, y tenemos nuestra trayectoria Euleriana que comenzó en el vértice* 1 *y terminó en el vértice* 5 *terminando con un grafo isomorfo al grafo nulo con* 5 *vértices* N_5*.*

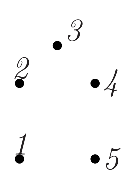


Figura: 26

3.5. Circuitos Hamiltonianos

En las secciones anteriores la preocupación fue encontrar circuitos que recorrieran todas las aristas. Un problema cuyo enunciado es muy parecido pero su solución sustancialmente diferente es el de encontrar circuitos que recorran todos los vértices.

Definición 8. *Una Trayectoria (circuito) Hamiltoniana es una trayectoria (circuito) que recorre cada vértice de un grafo exactamente una vez.*

Estos circuitos reciben este nombre en honor a Willian Rowan Hamilton quien en 1857 puso sobre cada de un dodecaedro[2] el nombre de alguna ciudad importante y se preguntó si era posible visitar las veinte ciudades exactamente una vez, con la condición que podia viajar de una ciudad a otra solo si estaban en caras consecutivas en el dodecaedro.

Ejemplo 5. *Los dos siguiente grafos tienen varios circuitos hamiltonianos que parten de los puntos A y 1 respectivamente.*

Figura: 27

Desafortunadamente nose conocen aún criterios para determinar si un grafo tiene o no un circuito de Hamilton, en contraste con la sencillez de los circuitos y trayectorias Eulerianas. Al respecto solo se pueden dar respuestas parciales sobre la existencia de dichos circuitos, por ejemplo si un grafo tiene "muchas"más aristas que vértices es probable que tenga un circuito hamiltoniano como en el siguiente ejemplo.

[2]Un dodecaedro es uno de los cinco sólidos platónicos que consta de 20 vértices, 30 aristas y 12 pentágonos como caras.

Ejemplo 6. *Considere el grafo completo con cinco vértices K_5.*

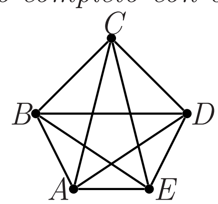


Figura: 28 (3.5.1)

Es claro que el grafo anterior tiene circuitos de Hamilton, por ejemplo el circuito $\{A, B, C, D, E\}$.

Ahora imaginemos por un momento que los vértices del grafo 3.5.1 son ciudades y sus aristas posibles caminos entre estas cada una con una valor distinto como lo muestra la siguiente tabla:

Ciudades	A	B	C	D	E
A	\$0	\$1850	\$1190	\$1520	\$1330
B	\$1850	\$0	\$1210	\$1500	\$2000
C	\$1190	\$1210	\$0	\$1740	\$1200
D	\$1520	\$1500	\$1740	\$0	\$1990
E	\$1330	\$2000	\$1200	\$1990	\$0

(3.5.2)

Tabla: 1

Así por ejemplo para viajar de la ciudad A a la ciudad B el valor es de \$1850. Una pregunta interesante sería la siguiente.

¿Cuál de todos lo circuitos Hamiltonianos que comienzan en A tiene el menor costo?.

Este tipo de problemas se conocen como *El Problema del Agente Viajero* y entre sus posibles soluciones encontramos las siguientes.

3.5.1. Algoritmo de Fuerza Bruta.

Este algoritmo consiste en listar todos los posibles circuitos del grafo y mirar cuál de estos tiene el menor costo y ese circuito sería la solución a nuestra pregunta. Este algoritmo funciona muy bien en este caso, pero más adelante veremos las complicaciones que trae.

Para la figura 3.5.1 necesitamos encontrar todos los posible circuitos que comienzan en A, lo cual es muy sencillo de la siguiente manera. La segunda ciudad posible para visitar puede ser cualquiera de las cuatro restantes, pues el grafo es completo, para la tercera ciudad se tienen tres posibilidades distintas a las dos ciudades ya visitadas, para la cuarta ciudad a visitar existen dos posibilidades, y para la última ciudad a visitar antes de volver a A solo hay un posibilidad, de tal forma que hay $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ posibles circuitos hamiltonianos que comienzan a A. Si encontramos el costo de cada uno de ellos según la tabla 3.5.2, vamos a notar que el camino más económico que sale de A y vuelve a A visitando todas las ciudades es el circuito $\{A, D, B, C, E, A\}$ con un valor de \$6760. Este proceso se puede llevar a cabo en unos quince o veinte minutos. A continuación se presentará otro algoritmo no tan efectivo pero más rápido.

3.5.2. Algoritmo Ambicioso.

El algoritmo ambicioso consiste en tomar la ruta más económica entre cada ciudad. Por ejemplo, según la tabla 3.5.2 partiendo de la ciudad A la ciudad mas económica es la ciudad C (\$1190), desde la ciudad C la ciudad más económica para ir distinta a A es la ciudad D (\$1200), desde E, descartando las anteriores es D (\$1990) y el luego volver de D a A (1990) para un total de \$7730 usando el circuito $\{A, C, E, D, B\}$, costo que excede en \$970 a la solución dada por el algoritmo de fuerza bruta, pero el tiempo que toma esta solución en general es significativamente menor.

En este caso la diferencia de tiempo no es muy notable , pues el grafo solo tiene cinco vértices, pero en el caso de un grafo completo de diez vértices la diferencia de tiempo es muy grande. En el algoritmo ambicioso solo se toma unos minutos encontrar una posible solución al problema del agente viajero, mientras que en el algoritmo de fuerza bruta se tienen que calcular el costo de $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 362880$ posibles circuitos hamiltonianos. Si una persona es capaz de analizar dos circuitos por minuto le llevaría a cabo 3000 horas examinarlos todos, esto es cuatro meses enteros trabajando las 24 horas del día.

3.6. Grafos Planares

Definición 9. *Un grafo se dice planar si puede ser dibujado en un plano sin que ninguna de sus aristas se cruce.*

Que un grafo pueda ser dibujado con sus aristas cruzadas no significa que el grafo no sea planar, por ejemplo los grafos de la figura 2.3.1 son isomorfos, sin embargo en uno de ellos las aristas se cruzan y en el otro no.

Ejemplo 7.

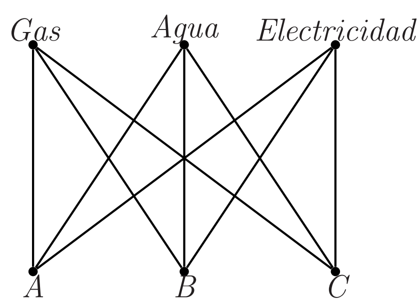


Figura: 29 (3.6.1)

El juego de los **servicios públicos** *consiste en encontrar un grafo isomorfo al anterior en el que ningún par de aristas se crucen. El grafo anterior se conoce como* $K_{3,3}$.

Ejemplo 8. *El grafo completo de cinco vértices* K_5 *no es un grafo planar.*

Es claro que un subgrafo de un grafo planar debe ser planar, por tanto K_4 *es un grafo planar pues es un subgrafo de* K_5 *que sin pérdida de generalidad se puede ver como el siguiente grafo.*

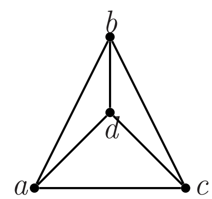


Figura: 30

Para que el quinto vértice e de K_5 sea vecino del vértice d es necesario que esté dentro de alguno de los triángulos abd, adc o bdc. Pero si está en algún triángulo es imposible que sea vecino del vértice que no hace parte del triángulo por ejemplo si el vértice e está dentro del triángulo abd es imposible que la arista que une los vértices e y c no crucen otra.

Teorema 3. *Si G es un grafo planar conexo, entonces cualquier representación gráfica del grafo donde no se crucen sus aristas cumple que el número de regiones delimitadas por G más el número de vértices de G menos el número de aristas de G es siempre igual a dos. $V - A + C = 2$.*

Corolario 2. *Si G es un grafo planar conexo con más de una arista, entonces el número de aristas es menor o igual que tres veces el número de vértices menos seis. $A \leq 3V - 6$*

Ejemplo 9. *El grafo completo con cinco vértices K_5 no es planar. Otra demostración más sencilla.*

El grafo K_5 tiene cinco vértices $V = 5$ y diez asistas $A = 10$. Entonces $3V - 6 = 9$, lo que contradice el anterior corolario, por tanto no es planar.

Teorema 4. *Un grafo es planar si y solo si no contiene subgrafos isomorfos a K_5 o $K_{3,3}$.*

4. Teoría de juegos.

En este capítulo mostraremos como se puede aplicar la teoría de grafos a un juego en particular.

El juego consiste en ordenar los siguiente cubos de colores en una pila de tal manera que en cada cara de la pila no se repita ningún color.

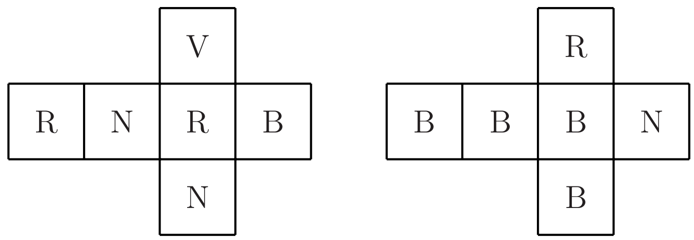


Figura: 31

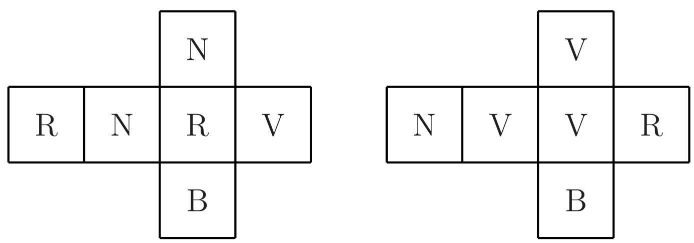


Figura: 32

Cada letra representa un color en cada una de las caras de lo cubos: R=Rojo, N=Negro, B=Blanco, V=Verde.

Cada uno de los cubos se puede rotar de 24 maneras distintas, por tanto para los 4 cubos se puede organizar la pila de $24^4 = 331776$ maneras. Si una persona es capaz de revisar 4 de estas maneras por minuto le tomaría 82944 minutos revisar todos los posibles casos, esto es 1382 horas o 57 días, casi dos meses trabajando todos los días las 24 horas del día, de tal manera que el problema por ensayo y error se puede tornar imposible, pero gracias a teoría de grafos no tomará más de 10 minutos dar una solución.

Para comenzar se le va a asociar un multigrafo al problema de la siguiente manera. Cada vértice representa uno de los cuatro colores, y las aristas unen los colores que están en caras opuestas en algunos de los cubos. Los números de las aristas pueden ser $1, 2, 3$ o 4 según el cubo al que correspondan.

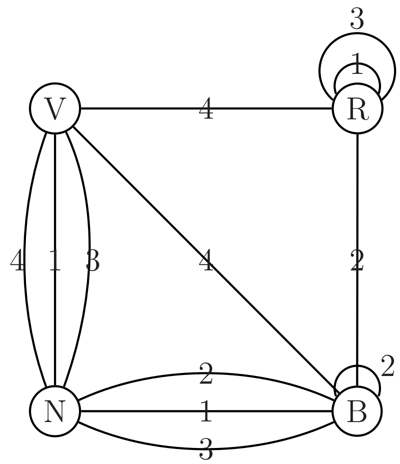


Figura: 33

El siguiente paso a seguir es *Partir* este grafo en dos subgrafos de tal manera en cada uno aparezca cada vértice una sola vez, por ejemplo

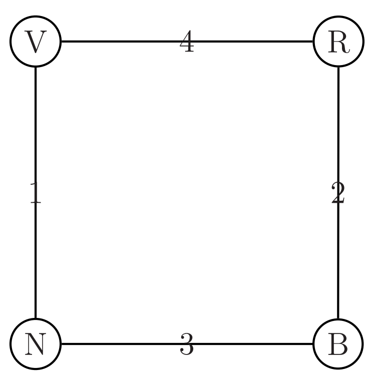


Figura: 34

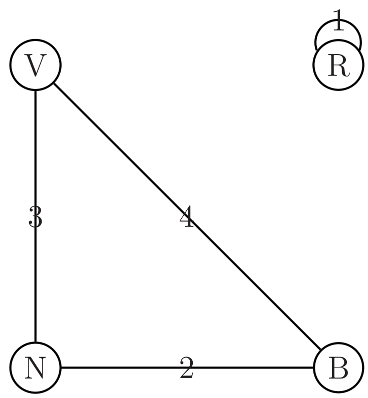


Figura: 35

Ahora mostraremos como cada uno de estos subgrafos nos indica como organizar lo cubos. Usando el primer subgrafo escogemos un vértice, V por ejemplo y ponemos el color Verde del primer cubo al frente, por tanto el color Negro queda atrás. Luego recorremos el grafo en el sentido de las agujas del reloj continuando con el mismo proceso, esto es: el tercer cubo queda con su lado Negro adelante y su lado Blanco atrás, el segundo cubo con su color Blanco adelante y el Rojo atrás, y por último el cuarto cubo con el color Rojo adelante y el Verde atrás. Por la manera en la que escogimos los subgrafos no vamos a tener colores repetidos en estas caras de la pila. Para las otras dos caras, hacemos el mismo proceso con el otro subgrafo escogido.

Bibliografía

[1] Calvin Clawson, *Misterios Matemáticos*, Diana, 1999.

[2] Chris Godsil, and Gordon Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.

[3] Jonathan Gross, and Thomas Tucker, *Topological Graph Theory*, Dover Publications, 1987.

[4] Morris Kline, *Matemáticas para estudiantes de Humanidades*, Fondo de Cultura Económica, 1967.

[5] Madsen, Id and Jørgen Tornehave, *From Calculus to Cohomology*, Cambridge University Press, 1997.

[6] Willian Massey, *Introducción a la Topología Algebráica* Reverté, 1967.

[7] Elias Micha, *Matemáticas Discretas*, Limusa, 1998.

[8] Simon Singh, *El Ultimo Teorema de Fermat*, Norma, 1999.

[9] Alan Tuker, *Applied Combinatorics*, Jhon Wiley & Sons, 1980.