# UNA EXPERIENCIA EN EL AULA, EN LA BÁSICA SECUNDARIA: CONCEPTUALIZACIÓN DEL *KUID*

**Carmen Samper de Caicedo**
**Leonor Camargo Uribe**
**Cecilia Leguizamón de Bernal**
*Profesoras Universidad Pedagógica Nacional*

## 1 Introducción.

En este cursillo se pretende ejemplificar cómo se estructura y desarrolla un estudio investigativo en el aula. Para ello, se hace un recuento del proceso seguido por el equipo de investigación que adelanta el proyecto: *Desarrollo del Razonamiento a través de la geometría euclidiana* para el estudio investigativo que realizó en torno a la tarea de conceptualizar un objeto geométrico. Inicialmente se presentan los fundamentos teóricos relativos al razonamiento en esta tarea y después el estudio que se llevó a cabo con estudiantes de Educación Básica Secundaria, con el cual se buscaba determinar los tipos de razonamiento que se manifiestan durante el desarrollo de actividades que apuntan hacia la conceptualización.

## 2 Aspectos teóricos relativos a la tarea de conceptualizar en geometría.

### 2.1 Concepto versus Imagen conceptual.

Una de las actividades más frecuentes en matemáticas es la construcción de conceptos. Los conceptos geométricos, tanto de objetos como de relaciones, son el fundamento para el desarrollo del conocimiento geométrico, sobre el que descansa el sentido espacial, y el dominio de un corpus teórico (sistemas axiomáticos), construido este último a través de la demostración. La actividad de conceptualizar se ha restringido, en ocasiones, al establecimiento de una correspondencia entre definiciones formales o nombres con una representación visual del concepto o la relación. Así, para explicar qué es un cuadrilátero, se da una definición y se dibujan algunos ejemplos de cuadriláteros; para explicar qué son rectas paralelas, se recurre igualmente a una definición formal seguida de dos o tres dibujos. Esta forma de presentación ignora que la conceptualización descansa sobre una suerte de experiencias de construcción, visualización, exploración de propiedades, elaboración de explicaciones y clasificación, entre otras.

Como consecuencia de este tipo de tratamiento, se produce una cadena de incomprensiones que no permiten el acceso a un conocimiento genuino. Por ejemplo, si la imagen conceptual de triángulo que tiene un alumno está restringida sólo a triángulos isósceles, probablemente tendrá la idea de que las alturas, para cualquier triángulo, son segmentos que están siempre en el interior del triángulo y que dividen a la base en dos segmentos congruentes. Si la idea anterior persiste, el análisis de casos en donde la altura es exterior al triángulo se sale de las posibilidades de comprensión por parte del estudiante.

Por el contrario, la actividad de conceptualizar debe poner en correspondencia al concepto, objeto matemático, o relación, determinado por una definición formal, con lo que Vinner ha denominado la "imagen conceptual" o representación operativa de éste, formada por imágenes visuales y propiedades que se establecen a través de las experiencias vividas con él. Una cosa es el concepto y otra la imagen conceptual. Cada persona tiene uno o mas prototipos de un concepto, los cuales son los primeros que vienen a la mente al momento de enfrentarse a alguna tarea que lo involucre. Entre más y mejores experiencias se tengan, la imagen conceptual se acerca más al concepto porque, como lo afirman Vinner y Hershkowitz: "*adquirir un concepto significa, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto, tal como éste está concebido por la comunidad matemática.*" [citado por Jaime, Adela et al., 1992] .

Muchas veces se cree tener éxito con los estudiantes en la conceptualización de un objeto geométrico porque identifican sus representaciones. Es muy probable que los alumnos discriminen correctamente los trapecios entre un conjunto de figuras geométricas, pero, ¿es ésto suficiente para decir que poseen el concepto de trapecio? Al hacer la identificación visual, ¿están considerando realmente todas las propiedades necesarias y suficientes de éste? Conviene ser cautos, pues puede suceder que al pedir a un estudiante que haga una representación gráfica de un trapecio, la imagen visual de la representación sea correcta, pero al solicitarle que escriba las propiedades del trapecio pueda obviar obvie alguna propiedad necesaria, como tener exactamente un par de lados opuestos paralelos, poniendo en evidencia lo lejos que está la imagen conceptual del concepto mismo.

Este hecho muestra que la conceptualización combina procesos cognitivos de visualización con la construcción de una definición asociada a una imagen visual. Generalmente la imagen visual se aproxima a la representación del objeto tal como lo acepta la comunidad matemática y por eso se tiene la tendencia a creer que el estudiante tiene el concepto claro. Pero si la definición que construye el estudiante es deficiente, se presentarán problemas al escribir la definición, o al hacer uso de las propiedades del objeto geométrico en la resolución de problemas o en demostraciones.

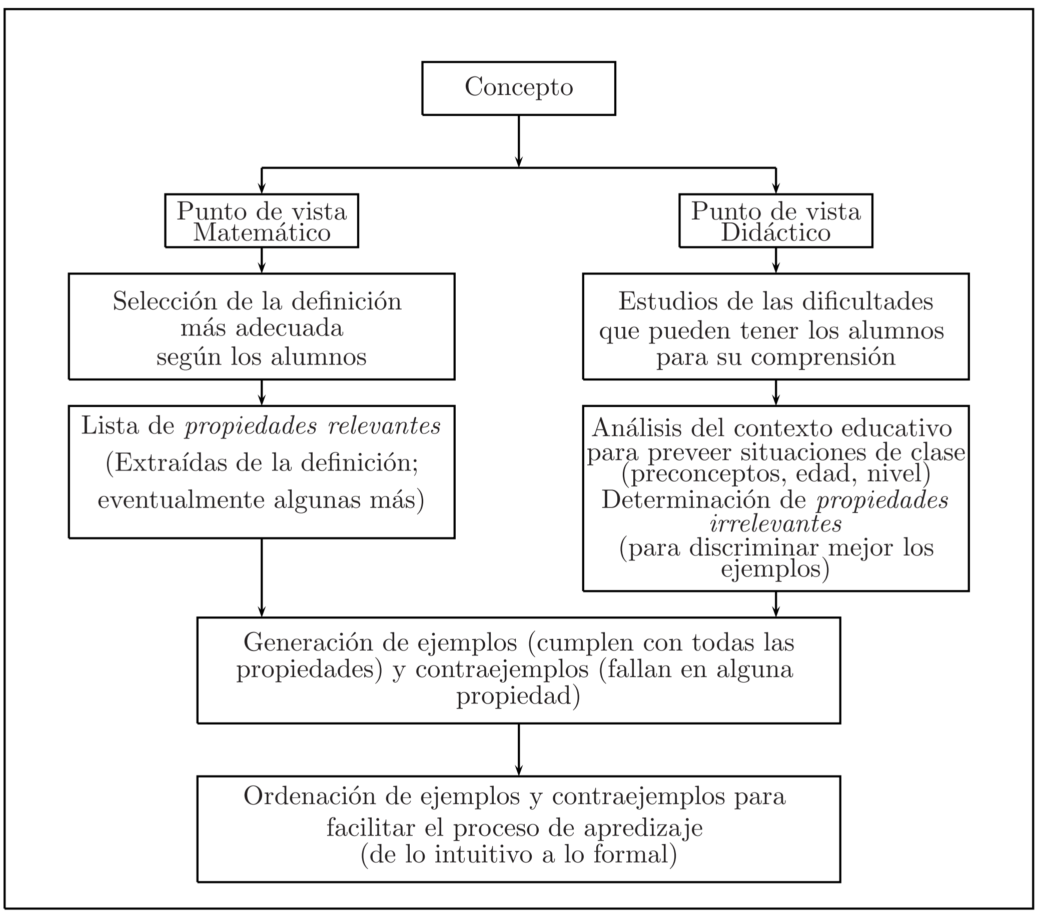


**Figura 1.** Recomendación didáctica para construir situaciones de conceptualización.

En el cuadro de la figura 1, se presenta una recomendación didáctica para diseñar actividades en torno a la construcción de conceptos que hace explícita la necesidad de hacer un análisis en paralelo, desde la matemática y la didáctica, sobre el concepto y las propiedades relevantes del mismo que guiarían la construcción de una secuencia de ejemplos y contraejemplos del concepto a trabajar. El esfuerzo didáctico debe centrarse en ampliar la imagen conceptual del objeto geométrico, de tal suerte que se destaquen todas y cada una de las características y relaciones que lo determinan.

## 2.2 Tipos de razonamiento en la actividad de conceptualización.

La teoría propuesta por los esposos Van Hiele es muy útil para comprender la complejidad del razonamiento en el aprendizaje de la geometría. Una tarea que puede ser analizada a la luz de dicha teoría es la de conceptualizar, como lo ha demostrado la investigación empírica [Clements y Battista, 1992], pues se establece el nexo entre el estado de evolución en la adquisición, por el estudiante, de un concepto o relación y las posibilidades de éxito que éste tiene al enfrentarse a otras actividades geométricas como las de resolver problemas, investigar y demostrar. A continuación se describen los tipos de razonamiento propuestos por los esposos Van Hiele, enfocando la atención en el acercamiento a la construcción de un concepto y presentando algunas características e indicadores de cada uno de los tipos de razonamiento específicos de esta tarea.

*Tipo 1: Visualización o Reconocimiento*

Un razonamiento de tipo visualización o reconocimiento se caracteriza porque se hace sobre formas geométricas, con base en su apariencia y en posibles transformaciones visuales sobre imágenes de estas formas. El concepto adquirido corresponde a la imagen figural de éste, concebida como la imagen física que ilustra al concepto. Aquí los prototipos fijos promueven características irrelevantes del concepto pues se razona sobre formas geométricas basándose en su apariencia, sin llegar a encontrar o ligar propiedades de éstas. Por ejemplo, el rectángulo sólo es rectángulo si uno de sus lados está en posición horizontal. La conceptualización del objeto se reduce a la imagen conceptual fruto únicamente de las características perceptuales globales.

En términos del razonamiento geométrico propio de la conceptualización, las acciones cognitivas se dirigen a la descripción de las características globales de la imagen figural, ligadas a las imágenes físicas. El razonamiento se centra en consideraciones visuales de carácter estático y los objetos sobre los cuales se razona están referidos a conceptos básicos. Las figuras se agrupan porque tienen la misma forma. Por ejemplo, un cuadrado no tiene la misma forma que un rectángulo y, por tanto, no pertenece a la clase de los rectángulos. Algunos indicadores, evidencia de un razonamiento de este tipo, se enumeran en la tabla 1.

| *Indicadores para el razonamiento tipo visualización o reconocimiento* |
| --- |
| - Percepción global de las figuras. No se reconocen explícitamente las partes que componen las figuras ni las relaciones entre ellas. |
| - Inclusión de atributos irrelevantes en las descripciones, generalmente de tipo físico o visual, tales como la orientación y el tamaño. La imagen conceptual del objeto geométrico está muy ligada al modelo físico del mismo. Se hace referencia a prototipos visuales para caracterizar las figuras. Las descripciones están basadas en semejanzas físicas globales que se expresan en frases como: "*se parece a una puerta...*", "*tiene forma de cono*", "*parece un cono boca abajo*", "*es redondo como una moneda*". |
| - Identificación de formas geométricas en objetos físicos. |
| - Percepción de cada figura como ente individual. No se reconocen características en las figuras que podrían ser atribuidas a otras figuras para agruparlas en una misma clase, ni se piensa en usar las propiedades para caracterizar una clase de figuras. |
| - Uso del lenguaje cotidiano y vocabulario impreciso en las descripciones para comparar, identificar, describir y escoger figuras. Son frecuentes expresiones como "*está torcido*", "está deforme", "*este lado es más largo*", "*es más gordo que*", entre otros. |
| - Elaboración de selecciones incorrectas a partir de propiedades que no son constitutivas de la figura. Por ejemplo: "*El cuadrado no es un rombo porque no tiene una punta hacia arriba*". |
| - Uso incorrecto de las propiedades que determinan una figura y omisión de las condiciones necesarias. Al tener un listado de propiedades de una figura que debe ser descubierta, centran su atención sólo en algunas de ellas e ignoran las demás. |

**Tabla 1.** Indicadores razonamiento tipo 1

*Tipo 2 : Análisis o Descripción*

El razonamiento de este tipo se caracteriza porque los alumnos razonan sobre los conceptos mediante el análisis informal de partes constitutivas y de atributos de los objetos. El razonamiento es de tipo experimental. Se establecen propiedades de las formas de los objetos geométricos a través de la observación, medición, dibujo y elaboración de modelos, entre otros. Los objetos sobre los cuales se razona son las propiedades que usan para clasificar figuras. Por ejemplo, "*todos los rectángulos tienen dos lados largos y dos cortos*". La conceptualización del objeto se basa en un listado exhaustivo de propiedades, algunas veces incluyendo más de las necesarias, pues se hace más énfasis en aquello que distingue una figura de otra, que en lo que las asemeja.

La imagen conceptual sigue ligada a la imagen física. Sin embargo, aquella adquiere un carácter más dinámico si se le compara con la que se obtiene en el tipo de razonamiento anterior, porque se atiende más a los componentes de la figura que a una percepción global de la misma. Algunos indicadores de este tipo de razonamiento se enumeran en la tabla 2.

| *Indicadores para el razonamiento tipo análisis o descripción* |
|---|
| - Reconocimiento de las figuras geométricas como conformadas por partes o elementos y dotadas de propiedades matemáticas. |
| - Establecimiento de propiedades de las figuras mediante la experimentación y posterior generalización de éstas. |
| - Dificultad para establecer relaciones entre las propiedades detectadas y, por ende, para realizar clasificaciones a partir de estas entre las propiedades y obtener clasificaciones inclusivas. |
| - Clasificación de figuras a través de atributos sencillos, por ejemplo, a través de las propiedades de los lados de una figura sin tener en cuenta ángulos o simetrías. Las clasificaciones son disyuntas, pues tienen más peso las propiedades diferenciadoras: "*el cuadrado no es rectángulo pues tiene todos sus lados iguales*". |
| - Construcción de definiciones en términos de un listado exhaustivo de propiedades, sin identificar las necesarias ni las suficientes. |
| - Descripción informal de los componentes de una figura, utilizando adecuadamente el vocabulario usual. |
| - Reconocimiento de figuras concretas como representantes de familias. |
| - Comparación explícita de formas teniendo en cuenta las propiedades de sus componentes. |
| - Descripción de tipos de formas mediante el uso explícito de sus propiedades en lugar de los nombres respectivos. |
| - Selección correcta pero limitada de figuras, en una tarea de clasificación, porque se "inventan" propiedades que no son parte sustancial del objeto, pero si de la imagen conceptual que tienen. Por ejemplo, "*el cuadrado no es un rombo porque todos sus ángulos son congruentes*". |

**Tabla 2.** Indicadores razonamiento tipo 2

*Tipo 3: Clasificación o abstracto relacional*

Los objetos sobre los cuales se razona son las relaciones entre propiedades de aquellas figuras que conforman una clase, pues se acepta que la figura es sólo un representante de ésta. La imagen conceptual adquiere un carácter representativo y, por tanto, se pueden hacer ordenaciones lógicas entre las clases de figuras. La conceptualización del objeto se centra en la enunciación de las propiedades necesarias y suficientes aun cuando hay limitaciones en las imágenes conceptuales. Algunos indicadores de este tipo de razonamiento se enumeran en la tabla 3.

| *Indicadores para el razonamiento tipo abstracto - relacional* |
| --- |
| - Reconocimiento de cómo la combinación de propiedades puede dar lugar a una determinada figura.<br>- Establecimiento de propiedades comunes e interrelaciones entre diferentes tipos de figuras.<br>- Organización de propiedades descubiertas en las figuras, determinando cuáles son consecuencia de otras. Esta organización es la primera manifestación de la deducción.<br>- Habilidad para clasificar formas de acuerdo con una serie de atributos matemáticos precisos.<br>- Uso de argumentos informales para justificar la clasificación de figuras. El razonamiento no se basa en teoremas conocidos sino en experiencias previas a través de la manipulación directa de objetos.<br>- Distinción entre propiedades necesarias y suficientes de un concepto, pero restringidas a una imagen conceptual.<br>- Habilidad para modificar definiciones, aceptar definiciones equivalentes y hacer referencia explícita a éstas en sus explicaciones. |

**Tabla 3.** Indicadores razonamiento tipo 3

*Tipo 4: Deducción formal*

En este tipo de razonamiento, los objetos sobre los cuales se razona son las relaciones entre propiedades de las clases de figuras, en el contexto de un sistema matemático axiomático. En la imagen conceptual priman las propiedades del representante de la clase sobre la imagen visual de éste. La conceptualización conlleva a la enunciación de las propiedades necesarias y suficientes. Algunos indicadores de este tipo de razonamiento, en la tarea de conceptualizar, se enumeran en la tabla 4.

| *Indicadores para el razonamiento tipo deducción formal* |
|---|
| - Aceptación de definiciones equivalentes y selección de la más útil para un proceso de demostración o en resolución de problemas. |
| - Deducción de información nueva acerca de una figura teniendo en cuenta información previa. |
| - Reconocimiento de definiciones que pueden referirse a una serie de figuras las cuales no están en una categoría o clase determinada. |
| - Reconocimiento de cuándo y cómo utilizar elementos auxiliares en una figura. |
| - Solución de problemas que involucran aspectos geométricos del concepto. |

**Tabla 4.** Indicadores razonamiento tipo 4

# 3 Estudio Investigativo: Conceptualización del *Kuid*.

## 3.1 Contexto de aplicación.

La experiencia investigativa se llevó a cabo en el primer semestre de 2002, en un colegio privado de la ciudad de Bogotá, con una población estudiantil de estrato socio-económico medio alto. En su mayoría, los docentes del área de matemáticas son egresados de la Universidad Pedagógica y mantienen lazos estrechos con las actividades académicas que la Universidad realiza. Como lo consideran provechoso para sus alumnos, están dispuestos a colaborar con experiencias de aula innovativas y/o investigativas y se manifiestan interesados con los resultados de dichos estudios.

El lugar de aplicación fue el salón usual asignado al grupo de estudiantes, el cual goza de óptimas condiciones físicas para el trabajo académico, por la amplitud del espacio, buena ventilación e iluminación. Durante la experiencia se contó con materiales de escritorio, apoyo tecnológico y papelería necesarios para la aplicación. Sin embargo, dado que el grupo era numeroso (45 estudiantes), el nivel de ruido era elevado, y el desplazamiento de los miembros del equipo investigador por el aula, para el seguimiento puntual a los grupos de trabajo, no era fácil.

## 3.2 Población.

0Se escogió un grupo de grado noveno compuesto por estudiantes cuyas edades oscilaban entre 14 y 16 años. De acuerdo a la programación establecida en la institución, el grupo tomó un primer nivel de geometría euclidiana con intensidad de 10 horas semanales, durante el primer semestre del año 2001. En el momento de la aplicación de la experiencia, se encontraba cursando un segundo nivel de geometría euclidiana. Las temáticas que se habían trabajado hasta el momento, se enumeran en la tabla 5.

| **Primer nivel: Semestre I de 2001** | **Primer nivel: Semestre I de 2001** |
|---|---|
| -Conceptos básicos y postulados de la Geometría Euclidiana.<br>-Razonamiento inductivo y deductivo en geometría.<br>-Triángulos y Congruencia: postulados de congruencia.<br>- Prueba de teoremas relativos a ángulos opuestos por el vértice, ángulos exteriores, suma y resta de segmentos y mediante postulados básicos.<br>- Rectas y planos paralelos, teoremas de rectas paralelas.<br>-Triángulos, clasificación y teoremas especiales.<br>-Cuadriláteros y Polígonos | -Teorema Fundamental de la Proporcionalidad.<br>-Postulados de Semejanza de Triángulos.<br>-Teoremas de Semejanza LLL y LAL<br>-Teorema de Tales<br>-Teorema de Pitágoras.<br>-Razones trigonométricas.<br>-Círculos: definiciones básicas<br>-Líneas del círculo.<br>-Cuerdas y distancias del círculo.<br>-Rectas perpendiculares a cuerdas<br>-Angulos inscritos |

**Tabla 5.**

Como se puede apreciar, la aproximación curricular a la geometría euclidiana se hace en términos de la construcción de un sistema axiomático deductivo, con algo de formalidad. Las temáticas van acompañadas de actividades de construcción con regla y compás y con el software Cabri. Esto llevó al equipo de investigación a suponer que el grupo de estudiantes tenía un conocimiento bien cimentado sobre los conceptos implícitos en las actividades y no se tendrían dificultades de comprensión al momento de proponerles las construcciones.

## 3.3 Descripción de la tarea.

Para el estudio investigativo se analizaron las producciones de los estudiantes correspondientes a tres actividades diseñadas para lograr la coneptualización de el *kuid*, objeto geométrico inventado por el equipo de investigación. En cada una de las actividades se pretendía aprovechar al máximo las construcciones como elemento potenciador del razonamiento. Al proponer una construcción que implícita o explícitamente establece una propiedad geométrica, se esperaba que ésta activara en los estudiantes acciones cognitivas que les permitiera encontrar otras propiedades, que enriquecieran la información sobre el objeto construido y dieran pautas para conceptualizarlo. A continuación se presentan dos definiciones equivalentes de *kuid*, que se esperaba construyeran los estudiantes una vez hubieran desarrollado el módulo. También se da una descripción de las tres actividades señalando para cada una de ellas, los prerrequisitos, los objetivos, los materiales necesarios y las instrucciones para su ejecución.

*Un kuid es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y un par de ángulos opuestos congruentes.*

*Un kuid es un cuadrilátero en el cual cada lado tiene un lado adyacente congruente.*

**Actividad 1**

*Prerrequisitos:*

- Construcciones con regla y compás o manejo de software educativo para geometría dinámica, de triángulos equiláteros, rectas perpendiculares, triángulos isósceles.
- Conceptos: segmentos congruentes, cuadrilátero, simetría axial, de triángulos equilátero, isósceles, rectángulo, escaleno, hipotenusa, cuadrilátero, simetría axial. En esta actividad, el uso de la noción de simetría no exige el concepto formal sino intuitivo de ésta.
- Diferenciación de triángulos según las medidas de sus lados y sus ángulos.

*Descripción:*
Se busca construir, a partir de diferentes tipos de triángulos y haciendo uso del concepto de simetría, distintos ejemplos de *kuids*. De este modo se generan lados congruentes de manera implícita. El propósito de la actividad

es que los estudiantes identifiquen características del *kuid* tales como: tener dos pares de lados adyacentes congruentes, un par de ángulos opuestos congruentes y una diagonal sobre un eje de simetría. Las conclusiones a las que pueden llegar los alumnos serán producto del proceso intuitivo seguido.

*Materiales:*

Calculadoras o computadores con programa de geometría dinámica, o papel calcante, regla y compás.

*Instrucciones:*

En la siguiente actividad, construirán varios tipos de triángulos y su imagen simétrica con respecto a alguno de sus lados, generando un cuadrilátero.
*Calculadora o computador:*

1. Se debe hacer la construcción del tipo de triángulo que se solicita asegurándose que el computador o la calculadora lo reconozcan como un triángulo y no como la unión de segmentos.

2. Se debe usar simetría axial para construir el cuadrilátero según las instrucciones correspondientes que aparecen en la tabla 6.

*Regla y compás:*

1. Las construcciones deben hacerse con regla y compás cuando lo exige el tipo de triángulo para asegurar exactitud en las características propias de éste.

2. Se debe doblar el papel calcante sobre el lado correspondiente del triángulo, según las instrucciones, para calcar la imagen simétrica de éste.

*Construcciones:*

| **Tipo de triángulo** | **Eje de simetría** |
|---|---|
| Triángulo equilátero | Cualquier lado |
| Triángulo rectángulo | Hipotenusa |
| Triángulo isósceles (no rectángulo) | Cualquier lado |
| Triángulo escaleno (no rectángulo) | Cualquie lado |

**Tabla 6.**

## Actividad 2

*Prerrequisitos:*

- Construcciones con regla y compás: rectas perpendiculares.
- Conceptos: simetría axial, cuadrilátero, diagonal.
- Diferenciación entre eje de simetría y diagonal contenida en un eje de simetría.

*Descripción:*

Las tareas que aquí se realizan destacan una propiedad del *kuid*: por lo menos una diagonal del cuadrilátero está contenida en un eje de simetría. El estudiante debe ser consciente del concepto de simetría axial porque, a partir de un eje de simetría, debe construir el cuadrilátero. Mientras que en la primera actividad obtenía el cuadrilátero por simple calcado o uso de la herramienta "simetría axial", ahora debe realizar el proceso de construcción iniciando con la elección de un eje de simetría. Por primera vez el estudiante es responsable de la construcción que hace.

La característica del *kuid* trabajada es esencial, pues con ella se logra generar todos los tipos de *kuid*, pero es posible que el estudiante se quede corto en la producción de las figuras prototipos. Por ejemplo, entre aquellas con dos ejes de simetría están los cuadrados y los rombos que no son cuadrados, y probablemente el rombo no surja como un cuadrilátero con dicha propiedad.

Con esta actividad, posiblemente el alumno no encuentre información nueva sobre el concepto de *kuid*; se refuerzan las conclusiones dadas en la actividad anterior y se prepara para la siguiente. Sin embargo, yace implícita otra propiedad del *kuid*: las diagonales o las rectas que las contienen son perpendiculares, propiedad que se trabaja intensamente en la actividad que sigue.

Los diferentes ejercicios de esta actividad van ampliando el significado de la propiedad en torno a la cual se está trabajando: simetría. Por primera vez se introducen, en el proceso de conceptualización del *kuid*, contraejemplos como herramienta necesaria para destacar atributos esenciales del *kuid*.

*Instrucciones:*

1. Dibuje varios cuadriláteros para los cuales ninguna diagonal está en un eje de simetría. ¿Qué propiedad común tienen fuera de la ya nombrada?

2. Dibuje varios cuadriláteros para los cuales exactamente una diagonal está en un eje de simetría. ¿Qué propiedad común tienen fuera de la ya nombrada?

3. Dibuje varios cuadriláteros para los cuales las dos diagonales están en ejes de simetría. ¿Qué propiedad común tienen fuera de la ya nombrada?

4. Los cuadriláteros que satisfacen las condiciones expuestas en los numerales 2 y 3 son *kuids*. ¿Qué propiedades comunes tienen?

## Actividad 3

*Prerrequisitos:*

- Construcciones con regla y compás: rectas perpendiculares, punto medio.

- Conceptos: rectas perpendiculares, cuadrilátero, bisectriz de un segmento, diagonal de un cuadrilátero, polígono, polígonos convexos.

- Diferenciación entre diagonal y la recta que la contiene, entre diagonales perpendiculares y rectas perpendiculares que contienen a las diagonales.

- Reconocimiento de la diagonal como segmento que puede no estar totalmente en el interior del polígono.

*Descripción:*

Esta actividad lleva a la construcción de ejemplos de cuadriláteros con una propiedad común: las rectas que contienen las diagonales son perpendiculares. A pesar de ser ésta una propiedad necesaria del *kuid*, como no es suficiente, se construyen cuadriláteros que no son *kuids* (ejercicio 1). De nuevo se introducen contraejemplos para enfatizar que se necesitan más condiciones fuera de esta propiedad para que la figura sea *kuid*. El contraste entre las figuras que son *kuids* y aquellas que no lo son ayuda a determinar, precisamente, la condición que es suficiente para obtener un *kuid*.

No sólo se solicita la construcción de cuadriláteros con unas propiedades específicas sino se propone un ejemplo de un cuadrilátero no convexo en cada ejercicio, para que los alumnos analicen si cumple las condiciones dadas para la construcción. El propósito es ampliar el panorama de posibles ejemplos, puesto que comúnmente este tipo de cuadrilátero no surge fácilmente como objeto de estudio.

Cada ejercicio propuesto es consecuencia del juego alrededor de la siguiente propiedad del*kuid: la recta que contiene a una diagonal es mediatriz de la otra diagonal.* Desglosando las partes que constituyen esta característica, surgen tres casos:

- Las diagonales son perpendiculares y se bisecan mutuamente.
- Las diagonales son perpendiculares y una de ellas biseca a la otra.
- Las rectas que contienen las diagonales son perpendiculares y una de ellas biseca a una diagonal.

Estos casos dan lugar a distintos tipos de *kuid*. Por tal razón, la actividad lleva no sólo a la construcción de *kuid* sino que, colateralmente, ejemplifica cómo debe ser el análisis de afirmaciones geométricas y sus interpretaciones.

Como la actividad gira en torno a la construcción de un cuadrilátero para el cual las rectas que contienen a sus diagonales son perpendiculares, se exige que el estudiante descubra cómo debe proceder para construir ese tipo de cuadrilátero. No se procede, como se hace tradicionalmente, dibujando primero el cuadrilátero, sino que debe construir inicialmente las diagonales y luego el cuadrilátero.

Es importante notar que la actividad hace énfasis en una propiedad del *kuid* que posiblemente no fue percibida en la tarea anterior. Latente en ambas actividades está la característica esencial del *kuid*, a la cual se debe estar aproximando el alumno. En la primera actividad, el acercamiento al concepto de *kuid* es perceptual, mientras que en ésta se exige un proceso de razonamiento más elaborado ya que exige la construcción de figuras que cumplen condiciones dadas.
*Instrucciones:*

1. Un cuadrilátero cumple las siguientes condiciones:

   - Las rectas que contienen sus diagonales son perpendiculares.
   - Ninguna recta que contiene una diagonal biseca a la otra diagonal.

   (a) Dibuje varios cuadriláteros que cumplan las condiciones.

   (b) ¿La siguiente figura (fig. 2) cumple las propiedades mencionadas? Explique su respuesta.

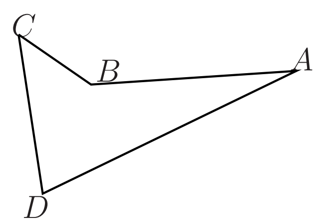


**Figura 2.**

   Los cuadriláteros que cumplen las condiciones anteriores no son *kuids*.

2. Un cuadrilátero cumple las siguientes condiciones:

   - Las rectas que contienen las diagonales son perpendiculares entre si.
   - Las diagonales se bisecan mutuamente.

   (a) Dibuje varios cuadriláteros que cumplan las condiciones.

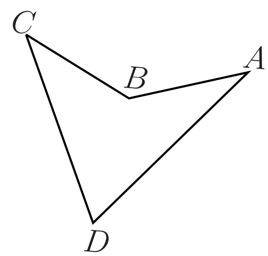


**Figura 3.**

(b) ¿La figura 3 cumple las propiedades mencionadas? Explique su respuesta.

(c) ¿Qué otras propiedades comunes tienen los cuadriláteros que cumplen las condiciones expresadas en 2?

3. Un cuadrilátero cumple las siguientes condiciones:

- Las rectas que contienen las diagonales son perpendiculares entre si.
- Exactamente una de las diagonales es bisecada por la otra o por la recta que contiene esa diagonal.

(a) Dibuje varios cuadriláteros que cumplan las condiciones.

(b) ¿La figura 4 cumple las propiedades mencionadas? Explique su respuesta.

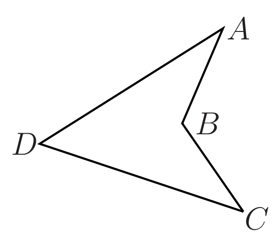


**Figura 4.**

(c) ¿Qué otras propiedades comunes tienen los cuadriláteros que cumplen las condiciones expresadas en 3?

4. Los cuadriláteros que satisfacen las condiciones expuestas en los numerales 2 y 3 son *kuids*. ¿Qué propiedades tienen en común?

## 3.4 Descripción de la aplicación.

Se conformaron nueve (9) grupos de a cinco estudiantes, organizados libremente de acuerdo a sus intereses, con el fin de propiciar la discusión entre ellos. Se solicitó consignar el consenso del grupo, respecto de cada actividad, en una sola copia, para facilitar el proceso de análisis. La experiencia se realizó en tres sesiones de las asignadas al espacio de la clase de geometría. Cada sesión tuvo una duración de hora y media. La distribución de las actividades y las fechas de aplicación aparecen en la tabla 7.

| **Sesión** | **Fecha** | **Hora** | **Actividades** |
|---|---|---|---|
| 1 | Miércoles 6 de marzo de 2002 | 1:00 pm a 2:30 pm | Se desarrollaron las actividades 1, 2 y se dio un primer vistazo a la actividad 3. |
| 2 | Viernes 8 de marzo de 2002 | 7:00 am a 8:30 am | Se continuó con la actividad 3, posteriormente se realizó la actividad 5. |
| 3 | Lunes 11 de marzo de 2002 | 1:00 pm a 2:30 pm | Se desarrolló la actividad 4 y se concluyó con la actividad 6. Al final del taller se invitó a los alumnos a puntualizar una posible definición de *Kuid*. |

**Tabla 7.**

Como el tiempo para desarrollar cada una de las actividades no se consideró una variable a controlar, no se llevó un registro preciso de éste y cada grupo trabajó a su propio ritmo. Acabada cada actividad, el grupo recibía la siguiente.

## 3.5 Unidades de análisis e indicadores.

Para dar cuenta del razonamiento que se favorece en la actividad de conceptualización se consideraron las siguientes unidades de análisis:

- **Evolución del razonamiento respecto al concepto de *kuid***, en términos de la posibilidad de integrar las propiedades estudiadas en diferentes acercamientos constructivos del *kuid*, en una definición de este objeto geométrico.

- **Evolución del razonamiento respecto a otros conceptos presentes en las actividades,** con la idea de observar el enriquecimiento conceptual sobre dichos objetos.

- **Procedimientos usados en las construcciones realizadas**, a objeto de indagar sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes al pedirles la ejecución de las construcciones.

Los indicadores para las dos primeras Unidades de Análisis se presentan en la tabla 8. Para la tercera Unidad, se recogieron en forma espontánea, evidencias del razonamiento.

**Indicadores:**

| **Tipo** | **Evolución en la conceptualización de *kuid*** | **Evolución en la conceptualización de otros objetos geométricos** |
|---|---|---|
| 1 | No se logra ver la figura como un todo sino como la unión de dos triángulos.Se caracteriza la figura mediante un nombre prototípico.Se enfatiza en propiedades no comunes o irrelevantes más que en propiedades comunes. | Los objetos sobre los que se razona son clases de figuras prototípicas reconocidas por tener la misma forma. El razonamiento se centra en consideraciones visuales, en donde las figuras se perciben como un todo. |
| 2 | Se hace una lista exhaustiva de propiedades consecuencia de las construcciones que han hecho en ésta o en actividades anteriores. | Los objetos sobre los que se razona son clases de figuras percibidas en términos del conjunto de propiedades que asocian a dichas figuras. Los alumnos razonan sobre los conceptos por medio de un análisis informal de las partes constitutivas y sus atributos. |
| 3 | Se deducen algunas propiedades a partir de otras. Se efectúa una clasificación de la tipología de *kuid* Se evidencian propiedades que resultan de relaciones entre las partes, dando inicio a una inferencia:<br>-Lados adyacentes congruentes<br>-Un par de ángulos opuestos congruentes<br>-Rectas que contienen diagonales perpendiculares | Los objetos sobre los cuales se razona son propiedades de las clases de las figuras, es decir, se razona sobre las relaciones entre las partes constitutivas de la figura. La conceptualización del objeto se centra en la enunciación de las propiedades necesarias y suficientes aún cuando hay limitaciones en las imágenes conceptuales. |

**Tabla 8.**

## 3.6 Sistematización y análisis de las producciones de los estudiantes.

Para dar cuenta de la evolución de los estudiantes en la conceptualización del *kuid* se clasificaron los grupos de trabajo en tres modalidades, de acuerdo al desempeño observado.
Modalidad I: En esta modalidad se consideraron aquellos grupos de trabajo, (1 y 7), cuyo desempeño refleja un buen dominio geométrico y quienes desde la primera actividad lograron una conceptualización del *kuid* bastante aceptable. Por tanto, las producciones fueron muy parecidas a lo largo de todas las actividades.
Modalidad II: Aquí se ubicaron aquellos grupos de trabajo, (2, 3, 4, 6), en los que se observó un avance significativo en la conceptualización del *kuid* desde razonamientos tipo 1 y 2 hacia una un razonamiento propio del tipo 3.
Modalidad III: Pertenecen a ésta aquellos grupos, (5, 8 y 9) en los que no se observó progreso en la conceptualización del *kuid* . Como es natural en una clase numerosa (45 alumnos), existe grandes diferencias en la producción de los grupos conformados. En estos equipos de trabajo las actividades propuestas no generaron progresos significativos en su razonamiento.
A continuación se presenta el seguimiento realizado al trabajo de algunos grupos representativos de cada una de las modalidades de trabajo, según las unidades de análisis y los indicadores establecidos.

- *Evolución en la conceptualización del kuid*
  *Categoría I (Grupos 1 y 7)*
  *Seguimiento al grupo 1*

<table>
<tr><td colspan="2">Actividad 1<br><br>Los alumnos de esta modalidad se destacan por la buena preparación geométrica que poseen. Esto se verifica en el análisis exhaustivo que hacen del kuid, en la actividad, cuando enumeran propiedades como: “tenemos 2 pares de lados adyacentes congruentes y los ángulos opuestos son congruentes ”<br>El proceso que siguieron los integrantes de este grupo para obtener estas conclusiones, se evidencia en la conversación entre este grupo y una de las investigadoras, quien actuaba como profesora. Este se transcribe a continuación:<br>P: ¿Qué propiedades han descubierto?<br>E1: Que los ángulos opuestos son congruentes.<br>P: ¿Y como descubrieron eso?<br>E1: Porque tenemos un triangulo así (haciendo referencia al triangulo que había dibujado ) entonces cuando lo dibujamos acá (por medio de la simetría), vemos que éste es congruente con éste (señalando los ángulos).<br>P: ¿Tienen más propiedades comunes?<br>E2: Es que no se cómo decir una cosa, que este lado adyacente es congruente con éste pero éste no es con este otro. ¿Cómo hago para decir que este lado ya no es congruente con éste?<br>P: ¿Por qué? ¿Cuántos lados adyacentes tienes?<br>E2: Uno, no, hartísimos...<br>P: Un par,¿no? Tienes un par. Tienes este par de lados adyacentes congruentes. ¿Eso es lo que tienes que decir?<br>E2: Ah, entonces tenemos que tienen dos pares de lados adyacentes congruentes.<br>Aun cuando otros grupos llegaron a esta caracterización del kuid, la forma de expresar sus conclusiones, identificando claramente los lados y ángulos a los cuales se refieren, muestran razonamiento de tipo 3. Además, el grupo 1 descubre propiedades que no son consecuencia misma del trabajo realizado en la actividad “si trazamos las rectas que unan los ángulos opuestos, se forman ángulos rectos”. Lo anterior es evidencia de su capacidad para buscar relaciones, no sólo de las partes constitutivas del objeto geométrico estudiado, sino también de otros entes geométricos relacionados con él.</td></tr>
<tr><td>Actividad 2<br><br>En la actividad se centra la atención en las diagonales de los cuadriláteros como ejes o no de simetría. Aquí el grupo 1 reafirma las propiedades que obtuvieron en la actividad anterior pero expresa en un lenguaje más preciso y conciso, sus diagonales son perpendiculares.</td><td>Actividad 3<br><br>Como detectaron desde un principio las características esenciales del kuid, se podría pensar que esta actividad, en la cual se juega con la posibilidad de que las rectas que contienen las diagonales sean mediatrices, no enriquecerían su conceptualización del kuid. Sin embargo, el grupo 1 enuncia propiedades más allá de las que esperábamos: si trazamos las diagonales se forman por lo menos 2 triángulos isósceles y por lo menos forman un par de triángulos congruentes, las diagonales. Esto muestra que ya construyen relaciones relevantes que llevan a un conocimiento más profundo del kuid, deduciendo propiedades intrínsecas que no son producto de una simple percepción visual. Esto es evidencia de razonamiento de tipo 3.</td></tr>
</table>

**Tabla 9.**

- *Evolución en la conceptualización del kuid*
  *Categoría II (Grupos 2,3,4 y 6)*
  *Seguimiento al grupo 2*

| **Actividad 1** | **Actividad 2** |
|---|---|
| El grupo 2, al igual que los grupos 4 y 6 no logra extraer propiedades comunes de los cuadriláteros mismos: "*siempre tienen formas parecidas*". Por esta razón se clasificó aquí en un razonamiento tipo 1. | En la actividad 2, el protagonista es el cuadrilátero, en contraste con el uso del triángulo en la primera actividad, como herramienta para crear un cuadrilátero. Es posible que este hecho haya sido clave para evidenciar un razonamiento del tipo 2. Los estudiantes dan respuestas como la siguiente: "*Observamos que tienen un par de lados congruentes y un par de ángulos congruentes*", mostrando progreso claro en su habilidad para analizar las partes constitutivas de los *kuid* obtenidos. |
| **Actividad 3** | |
| Con el ánimo de llevar a los estudiantes a deducir las propiedades esenciales del *kuid*, en la actividad se busca, a través de la construcción de *kuids* que difieren por propiedades relacionadas con las diagonales o las rectas que contienen a éstas, que descubran las propiedades comunes a todas las figuras resultantes. El grupo 2 no produce información nueva respecto de la actividad anterior. Por tanto, no se evidencia otro tipo de razonamiento. | |

**Tabla 10.**

- *Evolución en la conceptualización del kuid*
  *Categoría II (Grupos 2,3,4 y 6)*
  *Seguimiento al grupo 3*

| **Actividad 1** | **Actividad 2** |
|---|---|
| Al afirmar, que todos los *kuid* son cometas, los integrantes de este grupo expresan la propiedad que los coloca en dicha clase: dos pares de lados adyacentes congruentes. Este hecho se clasifica como razonamiento tipo 2 frente a la conceptualización del *kuid*. | El grupo 3 muestra avance en la conceptualización pero no traspasa el umbral para producir un razonamiento propio del tipo 2. Sin embargo, expresan las características comunes de forma puntual, "*tienen 2 pares de lados congruentes y los ángulos opuestos al eje de simetría son congruentes*". |
| **Actividad 3**<br><br>El grupo tiene certeza total de algunas propiedades del *kuid* ya que en la parte 1 dicen BD y AC no son ejes de simetría y no tienen lados congruentes, (por tanto, no son *kuids*). Estas propiedades están ligadas a las actividades anteriores, mostrando cuánto han aprendido sobre el *kuid*. Concluyen que los lados adyacentes deben ser congruentes, evidenciando un claro avance en su conceptualización. La conclusión muestra el proceso de razonamiento efectuado: tienen al menos un eje de simetría y por eso los ángulos opuestos al eje de simetría son congruentes, los lados adyacentes a un ángulo son congruentes (los lados que los conforman) los dos lados restantes también son congruentes, indicando de forma indirecta que los *kuid* tienen por lo menos dos pares de lados adyacentes congruentes. Como ya identifican la relación entre los lados congruentes, esta afirmación refleja un razonamiento de tipo 3. | |

**Tabla 11.**

- *Evolución en la conceptualización del kuid*
  *Categoría II (Grupos 2,3,4 y 6)*
  *Seguimiento al grupo 4*

<table>
<tr><th>Actividad 1</th><th>Actividad 2</th></tr>
<tr><td>En contraste con el grupo 3, los alumnos del grupo 4 no logran extraer propiedades comunes de los cuadriláteros mismos. Todos están divididos por un par de triángulos. Muestran un nivel elemental en sus observaciones, lo que indica un razonamiento tipo 1.</td><td>El hecho de que el cuadrilátero haya sido el protagonista de la actividad fue clave para el cambio en el tipo de razonamiento de los alumnos. Esto se evidencia en las respuestas cuando introducen afirmaciones como “al menos 2” lados congruentes y 2 ángulos congruentes, mostrando así cómo pasan del caso particular de los rombos, donde los lados del cuadrilátero son $\simeq$, para incluir los bumeranes y las cometas, en los cuales identifican dos pares de lados $\simeq$. Estos productos de razonamiento se clasifican en tipo 2.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Actividad 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">Con el ánimo de llevar a los estudiantes a deducir las propiedades esenciales del kuid, se busca en la actividad, a través de la construcción de kuids que se diferencien por propiedades relacionadas con las diagonales o las rectas que contienen a éstas, que descubran las propiedades comunes a todas las figuras resultantes. Aún cuando el grupo no alcanza a descubrir que los lados congruentes son adyacentes, si muestran progreso porque concluyen tienen por lo menos dos pares de lados congruentes y tienen un par de ángulos congruentes. Pasan de dos lados congruentes a dos pares de lados congruentes pero no identifican la relación más específica de los lados congruentes: ser adyacentes.</td></tr>
</table>

**Tabla 12.**

- *Evolución en la conceptualización del kuid*
  *Categoría II (Grupos 2,3,4 y 6)*
  *Seguimiento al grupo 6*

| **Actividad 1** | **Actividad 2** |
|---|---|
| Los alumnos de este grupo no lograron extraer propiedades comunes de los cuadriláteros mismos. Afirmaciones como "*a excepción del triángulo equilátero e isósceles, al ubicar un lado común como diagonal, siempre se forman cuadriláteros diferentes por cualquier lado*" muestran un nivel elemental en sus observaciones, quedando clasificadas en un razonamiento tipo 1. | El grupo muestra un avance al descubrir que "*las diagonales siempre deben ser perpendiculares entre ellas*", propiedad que no se había explicitado en ninguna de las actividades anteriores. Sin embargo, no logran concentrarse en las partes constitutivas del *kuid* para mencionar las relaciones existentes entre ellas, aspecto necesario para acercarse a la definición del *kuid*. A pesar de esto, siguen viendo al *kuid como formado o se puede dividir en* 4 △ *iguales* afirmación clasificada como razonamiento tipo 1. |
| **Actividad 3** | |
| En esta actividad, el grupo muestra un avance en su razonamiento, ya de tipo 2, porque logran deducir la existencia de dos ángulos congruentes, mostrando que están desconfigurando la figura para observar las partes que la conforman, pero no descubren la relación entre los ángulos congruentes ni las relaciones entre los lados del *kuid*. A pesar de esto, ofrecen una definición del *kuid*: "*mientras las diagonales sean perpendiculares, las figuras serán kuids*", definición que no tiene asidero con los resultados que obtuvieron en el numeral 1 de esta actividad. Esta parte de la actividad no logró cambiar la fijación que, desde la Actividad 1, tenían respecto a esta característica. | |

**Tabla 13.**

- *Evolución en la conceptualización del kuid*
  *Categoría III (Grupos 5,8, y 9)*
  *Seguimiento al grupo 5*

| **Actividad 1** | **Actividad 2** |
|---|---|
| A lo largo de la serie de actividades, el grupo 5 se caracterizó por una conceptualización del *kuid* basada en la imposibilidad de tener una percepción global de la figura, anclándose en la construcción realizada en esta actividad. Es decir, siempre ven al cuadrilátero como una figura conformada por dos triángulos congruentes, el uno la imagen simétrica del otro con respecto a un lado. Por eso, la caracterización se reduce a la existencia de "*dos pares de lados congruentes*", razonamiento de tipo 1. | Como la actividad centraba la atención en la simetría con respecto a una de las diagonales, los estudiantes hicieron el análisis con base en la construcción de la primera actividad. A partir de ello, identificaron la existencia de *dos ángulos congruentes.* Trataron de relacionar las partes congruentes de los triángulos producidos al construir la diagonal, como lo muestran la frase de un estudiante quien dice: "*que un eje de simetría lo divide en 2 triángulos congruentes*" y las marcas sobre las figuras que señalan los lados que son congruentes entre si. Sin embargo el análisis está basado siempre en los dos triángulos y no logran una imagen global del *kuid* a partir de la construcción propuesta. Por esto se dice que su razonamiento continúa siendo del tipo 1. |
| **Actividad 3** | |
| Ni siquiera después de la actividad, en donde se busca centrar la atención en la perpendicularidad de las diagonales de los diferentes tipos de *kuid*, se logra un cambio en la conceptualización del *kuid*, porque siguen enunciando las mismas propiedades que descubrieron en las actividades anteriores. | |

**Tabla 14.**

- *Evolución en la conceptualización del kuid*
  *Categoría III (Grupos 5,8, y 9)*
  *Seguimiento al grupo 8*

<table>
<tr><th>Actividad 1</th><th>Actividad 2</th></tr>
<tr><td>A diferencia del grupo 5, el grupo 8 aprovecha mejor la actividad 1, producto, quizá, de mejores estrategias de análisis matemático de las figuras. En esta actividad, obtienen un abanico muy variado de opciones, entre las cuales se encuentran cuadriláteros cóncavos y convexos. Usan como estrategia para referirse a los cuadriláteros obtenidos, el nombrar los vértices, hecho que aunque no parece significativo, les brinda la posibilidad de identificar el cuadrilátero resultante como figura global y centrarse en él para identificar las propiedades. Concluyen que un kuid tiene por lo menos dos lados congruentes y por lo menos dos ángulos congruentes. El uso de cuantificadores y el hecho de que den un listado de propiedades, muestra razonamiento de tipo 2 respecto a la conceptualización del kuid.</td><td>A pesar de seguir mostrando evidencias de razonamiento tipo 2, el grupo refina su posición al afirmar tiene dos pares de lados congruentes y un par de ángulos congruentes, pero no logran avanzar en la conceptualización misma del kuid , pues no identifican la relación entre los lados congruentes.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Actividad 3</th></tr>
<tr><td colspan="2">Al igual que el grupo 5, no se percibe un cambio en la conceptualización del kuid, porque los estudiantes no detectan nuevas propiedades.</td></tr>
</table>

**Tabla 15.**

- *Evolución en la conceptualización del kuid Categoría III (Grupos 5,8, y 9) Seguimiento al grupo 9*

| **Actividad 1** | **Actividad 2** |
|---|---|
| Actividad 1 Este grupo aprovecha mejor la actividad 2, producto quizás de mejores estrategias de análisis matemático de las figuras. También comenzó con un razonamiento propio del tipo 2. Hacen referencia a las propiedades que surgen de las construcciones para establecer propiedades de los *kuid* que obtuvieron: *todos los* kuids *tienen dos lados congruentes pero uno tiene dos pares de lados y ángulos congruentes*. | Al igual que el grupo 6, este grupo se siente capaz de dar una definición de *kuid Es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados y ángulos congruentes*, pero no logran avanzar en la conceptualización misma del *kuid*, pues no identifican la relación entre los lados congruentes y que sólo es necesario un par de ángulos congruentes. |
| **Actividad 3** | |
| Desafortunadamente, los alumnos del grupo 9, quienes poseían un potencial promisorio, cometieron muchos errores en la actividad 3, lo que impidió que avanzaran en la conceptualización del *kuid*, al no tener representaciones figurales apropiadas. | |

**Tabla 16.**

*Evolución del razonamiento en la conceptualización de otros objetos geométricos:*

Aun cuando el interés principal de la investigación giraba alrededor del razonamiento en torno a la conceptualización del *kuid*, no puede pasar desapercibido el hecho de que las actividades "juegan" con otros conceptos y que, por tanto, se pueden evidenciar ejemplos donde se nota razonamiento de distintos tipos, según la clasificación de Van Hiele, respecto de ellos. A continuación se relatan algunas experiencias registradas durante la ejecución de las actividades, las cuales que ilustran este hecho, identificando los conceptos que están involucrados.

- **Triángulos y cuadriláteros**

El nivel de los estudiantes en el manejo de conceptos geométricos relacionados con los tratados en las actividades propuestas, su capacidad de abstraer como un todo las figuras construidas y de identificar las partes constitutivas de ésta, se refleja en la forma de comunicar sus observaciones sobre triángulos y cuadriláteros, como se evidencia en las afirmaciones hechas por los estudiantes, al finalizar la actividad 1. Las hay muy elementales, en donde se refieren a propiedades irrelevantes, como el grupo 2, cuando afirma que "*todos salen de un triángulo, no importa el tamaño*" situándose como razonamiento de tipo 1 respecto de la conceptualización de triángulos y cuadriláterios; o aquellas donde se evidencia confusión pero nombran muchas propiedades como: "*En cada cuadrilátero, cada triángulo comparte un lado común*" (grupo 4), "*En general, todos están divididos por un par de triángulos*" (grupo 4), "*Un cuadrilátero es un triángulo con un eje de simetría*" (grupo 9), clasificados como de tipo 2 de razonamiento.

Por otro lado, están aquellas afirmaciones que muestran un mayor dominio del lenguaje y de otros conceptos geométricos involucrados en las actividades. Los alumnos de los grupos 6, 1 y 8 se basan en la visualización; el primero para describir los posibles resultados de las construcciones en la actividad 1: "*A excepción del triángulo equilátero, al ubicar un lado común como diagonal, siempre se forman cuadriláteros diferentes*"; los otros dos grupos para extraer información: "*tienen por lo menos un ángulo mayor o igual a 90°*" (grupo 8) y "*Si trazamos las rectas que unan los ángulos opuestos se forman ángulos rectos*" (grupo 1), manifestando razonamiento de tipo 3. Además, están aquellos que hacen inferencias basados en las conexiones que logran con sus conocimientos previos, logrando un razonamiento tipo 4 de: "*Como los cuadriláteros están formados por dos triángulos congruentes invertidos, entonces debe haber por lo menos dos segmentos congruentes*" (grupo3). Esta deducción es hecha al tener en cuenta que el cuadrilátero fue creado a partir de un triángulo y su imagen simétrica, con respecto a la recta que contiene un lado, la cual se convierte en diagonal del cuadrilátero.

La siguiente afirmación del grupo 5, al finalizar la actividad 1: "*Que por el lado que se dobla no hace parte de los lados del cuadrilátero sino que lo divide en dos triángulos congruentes*" contrasta significativamente con la del grupo 7 que afirma: "*Cada pieza tiene exactamente otra igual por que partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes*" o la del grupo

3: "*Como los cuadriláteros están formados por dos triángulos congruentes invertidos entonces debe haber por lo menos dos segmentos congruentes*". Los primeros muestran la dificultad de ver al cuadrilátero independiente de la unión de los dos triángulos y por consiguiente no perciben la relación entre los lados del cuadrilátero. Los otros usan esa unión para deducir que en el cuadrilátero se obtienen pares de partes constitutivas congruentes. Esto muestra la gran diferencia entre los razonamientos tipo 2 y tipo 4, respecto al concepto de cuadrilátero.

**Cometas o rombos**

Los alumnos del grupo 3 expresan sus conclusiones de la actividad 1 de forma sintética al decir: "*Todos son cometas pero el (a)(un cuadrado) y el (c) (un rombo) además de esa característica son rombos*". Están mostrando su capacidad de efectuar clasificaciones, resultado de razonamiento tipo 3 de Van Hiele en estos conceptos. El grupo 6 va más allá cuando expresan: "*Siempre son rombos, las diagonales son perpendiculares y bisectrices de los ángulos*", al concluir la sección de la actividad 2, donde se construyen cuadriláteros para los cuales las dos diagonales son ejes de simetría, deducción hecha de sus construcciones, mostrando un razonamiento tipo 4.

**Ejes de simetría**

El concepto usado para construir *kuids* en las actividades 1 y 2 fue el de eje de simetría. Estas actividades ayudaron al avance de la conceptualización de *kuid*. Al finalizar la actividad 1, se tiene el siguiente diálogo entre una de las investigadoras, quien actuaba como profesora, y un alumno del grupo 9:

P: *¿Me puedes decir qué es un* kuid? E: *De acuerdo a lo que hemos analizado acá, que una de las diagonales tiene que ser un eje de simetría, tan solo una, y que al ser eje de simetría, un lado va a ser congruente al otro lado, a la otra parte. Ah, me confundí, que un lado va a ser congruente al otro que sea consecutivo el cual divide el eje de simetría y eso tiene que cumplirse al haber dos pares de lados adyacentes congruentes.*

Al solicitar un cuadrilátero cuyas diagonales fueran ejes de simetría, muchos alumnos dibujaron inmediatamente un rectángulo no cuadrado, puesto que pensaban, como lo expresan los grupos 5 y 9: "*que un eje de simetría lo divide en 2 triángulos congruentes*" propiedad que sí tienen las diagonales de un paralelogramo más no la de ser ejes de simetría. Sólo al pedirles que doblaran el papel por alguna de las diagonales y ver que no coincidían los triángulos, cambiaron su aseveración.

Como resultado de la percepción visual, los grupos 1, 5, 8 y 9 deducen como propiedad de los cuadriláteros con dos diagonales ejes de simetría que "*tienen dos pares de lados paralelos*", razonamiento tipo 3. El grupo 6, ante la misma tarea, afirma "*Las diagonales son ejes de simetría y que para ello, los lados deben ser correspondientes*". Para los cuadriláteros con exactamente una diagonal eje de simetría, dicen: "*Encontramos que sólo hay dos posibilidades de forma: La a y la b, éstas se pueden alterar, pero sin que se cambie el eje de simetría*". Estos análisis son muestra de razonamiento tipo 4 respecto a este concepto. El grupo 3, también concluye el paralelismo de los lados del cuadrilátero que tiene dos diagonales ejes de simetría y para aquellos con una diagonal eje de simetría afirman "*tienen dos pares de lados congruentes los cuales deben estar separados por el eje de simetría*" deducción válida en torno a este concepto, que se ubican como razonamiento tipo 4. El grupo 4 explica que el cuadrilátero con ambas diagonales ejes de simetría queda dividido en cuatro triángulos con "*por lo menos 2 lados congruentes*", resultado de un razonamiento tipo 4. En igual nivel se encuentra el grupo 7 al afirmar que: "*como el cuadrilátero tiene sólo un eje de simetría, tiene un par de ángulos congruentes que son opuestos a ese eje*".

### Diagonal de un cuadrilátero

Los estudiantes manifiestan buen dominio de este concepto, eje de las actividades 2 y 3. El uso de las expresiones **recta que contiene a la diagonal y diagonal** fue aceptado con mucha naturalidad, hecho que se evidencia en la explicación ofrecida por el grupo 8: "*No cumple las condiciones porque las diagonales no se bisecan mutuamente a pesar de que las rectas que contiene las diagonales son perpendiculares entre si*", cuando se pregunta en la actividad 3 si la figura (fig. 5) dada:

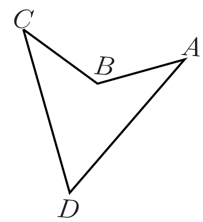


**Figura 5.**

cumple las condiciones:

- Las rectas que contienen las diagonales son perpendiculares entre si.
- Las diagonales se bisecan mutuamente.

*Las construcciones geométricas:*
Como componente trasversal en las actividades propuestas está el uso de construcciones con regla y compás como instrumento para ligar la percepción visual con características, propiedades o relaciones geométricas de una figura. Con las construcciones se busca que los alumnos logren mayor riqueza de ejemplos y realizar configuraciones de las figuras para determinar las características esenciales del *kuid*, paso indispensable para formar el concepto correspondiente y potenciar el razonamiento en torno a él. Esto se pudo evidenciar en la conversación que surgió cuando dos estudiantes del mismo grupo obtuvieron cuadriláteros muy distintos, al construir la imagen simétrica de un triángulo rectángulo en la actividad 1. Uno de ellos insistía en que el otro se había equivocado en su construcción, y por tanto, solicitó el aval de una de las investigadoras.
P: *¿Ambos siguieron las instrucciones*?
E1: *Es que yo construí un triangulo especial de 45, 90 y entonces, al hacer la simetría, me dio un cuadrado.*
P: *¿Y qué pasó con los demás?*
E1: *Que ellos no hicieron el proceso bien.*
E2: *A mi me dio una "pirámide", es que no lo hice de 45-90, sino de 30-60.*
P: *Y resultaron figuras muy distintas. ¿Ambos siguieron mis instrucciones, o no? Entonces todas las figuras que resultaron son correctas. ¿Hubo diferencias solamente con el triangulo rectángulo?*

E4: *No. También con el escaleno.*
P: *Con el triángulo escaleno también resultaron cuadriláteros muy distintos, ¿cierto? Pero todos siguieron mis instrucciones. Entonces todas las figuras son ejemplos de* kuids.

A partir de la actividad 2, se evidencia en los grupos, el uso de conocimientos geométricos para construir cuadriláteros con las condiciones exigidas. Por ejemplo, el grupo 4 explica cómo logran construir el cuadrilátero con ambas diagonales ejes de simetría: cada triángulo debe tener por lo menos 2 lados congruentes para que al formar el cuadrilátero tenga 2 diagonales que sean ejes de simetría, configurando el polígono a partir de partes que lo constituyen. El grupo 1, al decidir que el cuadrilátero descrito puede ser un cuadrado, lo construye, no por medio de rectas perpendiculares sino usando cuatro segmentos tangentes a una circunferencia donde los puntos de tangencia son extremos de diámetros perpendiculares entre si. El grupo 9, concluye que dicho cuadrilátero debe tener diagonales perpendiculares y, por tanto, construyen las rectas perpendiculares inicialmente para luego unir por medio de segmentos puntos en ellas.
Tanto en la Actividad 3, donde todos los cuadriláteros deben cumplir que las rectas que contienen las diagonales sean perpendiculares, como en la Actividad 1, donde se necesitaba un triángulo rectángulo, los estudiantes hicieron uso de la escuadra, de construcciones clásicas de la mediatriz de un segmento, o propiedades conocidas, como un ángulo inscrito en una semicircunferencia, para obtener ángulos rectos.

# 4 Conclusiones.

El estudio investigativo relativo a la tarea de conceptualización se realizó con el objeto geométrico, *kuid*, desconocido dentro de los comúnmente estudiados en geometría, con miras a crear y mantener el interés de los estudiantes, y porque los propósitos de la investigación así lo exigían. No se propone que se conviertan en objeto de enseñanza; lo que se pretende es mostrar diferentes actividades que posibilitan y favorecen el razonamiento a través de la conceptualización, si se busca atender al proceso de construcción de los conceptos centrando la atención en diversas propiedades que poseen. Mediante el análisis delas propiedades relevantes e irrelevantes, se quiere consolidar una imagen conceptual más cercana a la aceptada por la comunidad matemática. Sin embargo, el tipo de actividades propuestas y muchas otras que se pueden crear, se pueden prever para llegar al concepto de cualquier objeto geométrico. Si bien el diseño y realización de actividades para favorecer la formación de un concepto geométrico demanda tiempo, se sugiere dedicar los espacios necesarios para este tipo de actividades en clase, ya que éstas favorecen el desarrollo del razonamiento a través de las interacciones de los estudiantes, así como la apropiación de un lenguaje especializado, y el establecimiento de relaciones entre conceptos, lo cual permite la ampliación de la imagen conceptual del objeto geométrico en particular y de otros que el estudiante conoce. Incluso, el maestro puede aprovechar la oportunidad para verificar qué tan bien manejan, los alumnos, conceptos que consideran saben.

## Bibliografía.

[1] Arnal, J. et al. (1992). *Investigación Educativa. Fundamentos y Metodología*, Barcelona: Labor.

[2] Bartolini, M; BOERO, P (1998).*Teaching and Learning Geometry in Context.* En Mammana C; Villani V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[3] Battista, M. y Clements, D. (1995). *Geometry and Proof*, The Mathematics Teacher. Vol. 88, No. 1, pp. 48 - 53.

[4] Ben Chaim, D et al (1989).*The role of Visualization in the Middle School Mathematics Curriculum. En HITT F (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo.*, Revista Educación Matemática. Vol. 10, no. 1, abril.

[5] Bishop (1980). *¿Cuáles son algunos obstáculos para el aprendizaje de la geometría?* . Revista Estudios en Educación Matemática: Enseñanza de la Geometría. Ed. Morris Robert, vol. 5. Unesco pp. 183 - 208

[6] Brousseau G (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse d'état, Université de Bourdeaux 1.

[7] Brumfield (1973) *Conventional approaches using synthetic Euclidean geometry*,En Henderson (eds) *Geometry in the mathematics curriculum*, Yearbook, Reston VA, NCTM, pp 95 - 115.

[8] Burger, W. y Shaughnessy, M. (1986). *Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry*, Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 17, No. 1, pp. 31 - 48.

[9] Camargo, L. y Samper, C. (1999). *Desarrollo del razonamiento Deductivo a través de la Geometría Euclidiana*. Tea: Tecne, Episteme y Didaxis. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, No 5.

[10] Clemens, S et al (1989). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* Addison Wesley Iberoamérica. S. A.

[11] Clements, D. y Battista, M. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning.* En Grouws, Douglas (ed.), Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics. NCTM, New York.

[12] Crowley, M. (1987). *The Van Hiele Model of the development of geometric thought.* En NCTM Learning and Teaching Geometry K-12, 1987 Yearbook. Reston.

[13] DE Guzman, M (1996). *El rincón de la pizarra*, En Placencia I et al (1998). *Visualización y creatividad*. En Revista Educación Matemática. Vol. 10, No. 1, p. 102 - 120.

[14] Duval, R (1998). *Geometry from a cognitive point of view*, En Mammana C; Villani I V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the $21^{st}$ Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[15] Duval R (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle; Instituto de Educación y Pedagogía.

[16] Ernst P (1994). *Constructivism - Which form provides the most adequate theory of mathematics learning?*. En Mammana C; Villani V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the $21^{st}$ Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[17] Farrell, M (1987). *Geometry for Secondary School Teachers*. En NCTM, Yearbook; Learning and teaching geometry, k -12; Reston Virginia, p 236- 250.

[18] Gardner (1983). *Frames of Mind: The Theory of multiple intelligences*. New York, NY: Basic Books.

[19] Glaeser, G (1986). *La Didactique experiméntale des mathématiques. 2$^o$ partie: La conception génetiqué*. Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg.

[20] Gravemeijer, K (1998). *About Reasoning in Geometry*. En Mammana C; Villani V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[21] Greeno (1980). *Some examples of Cognitive task analysis with instructional implications*. En: Snow et al. (eds). Aptitude, learning and instruction, Vol 2, NJ, Lawrence Erlbaum.

[22] Gutierrez, A. Y Jaime, A. (1989). *Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele*. Revista Enseñanza de las Ciencias, 7(1), 89-95.

[23] Hadamard, J (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. En Placencia I et al (1998). *Visualización y creatividad*. En Revista Educación Matemática. Vol. 10, No. 1, p. 102 - 120.

[24] Hershkowitz, Vinner y Bruckeimer. (1987). *Activities with Teachers Based on cognitive research*. En NCTM, Yearbook; Learning and teaching geometry, k -12; Reston Virginia, p 222 - 236.

[25] Hershkowitz, R (1989). *Visualización en Geometría*. Revista: Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, pp 61 - 76.

[26] Hershkowitz, R (1998). *About Reasoning in Geometry*. En Mammana C; Villani V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21$^{st}$ Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[27] Hoffer, A. (1990). *La Geometría es más que demostración*. En: Notas de Matemática. No 29, Abril. pp. 10 - 24.

[28] Jaime, A.; Chapa, F. y Gutierrez, A. (1992). *Definiciones de Triángulos y Cuadriláteros: Errores e Inconsistencias en Libros de Texto de E. G. B*. Epsilon No 23, Madrid. pp. 49 - 62.

[29] Jaime, A. y Gutierrez, A. (1992). *Una Propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El Modelo de Van Hiele*. En: Teoría y Práctica en Educación Matemática. Editores Llinares, S. y Sánchez, M. V. Sevilla, pp. 295 - 389.

[30] Mayberry, J. (1983). *The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers*. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 14, No. 1, pp. 58 - 69.

[31] NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Madrid.

[32] Piaget e Inhelder (1967). *The Child's conception of space*. New York: W.W. Norton y Co.

[33] Placencia, I. et al (1998). *Visualización y creatividad*. En Revista Educación Matemática. Vol. 10, No. 1, p. 102 - 120.

[34] Romero, I. (1997). *La introducción del número real en la enseñanza secundaria: Una experiencia de investigación-acción*. Editorial Comares con la colaboración del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

[35] Samper C; Camargo L; Leguizamon C. (2001). *Razonamiento en Geometría*. Revista EMA, Investigación e innovación en Educación Matemática. Volumen 6, No2, marzo de 2001.

[36] Senk, S. (1989). *Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs.*; Journal for Research in Mathematics Education. Vol 20, No. 3, pp. 309 - 321

[37] Schoenfeld (1986). *On having and using geometric knowledge*. En Hiebert (ed) Conceptual and procedural knowledge, The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[38] Serra, M. (1998). *Discovering Geometry: an inductive approach*. Key Curriculum Press; San Francisco.

[39] Tymocko (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Birkhäuser. En Mammana C; Villani V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the $21^{st}$ Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[40] Usinkin (1982). *Van Hiele leveles and achievement in secondary school geometry*. Final Report of the Cognitive Development and Achievement in secondary School Geometry Projet. Chicago University, Department of Education..

[41] Van Hiele (1959). *La penseé de l'enfant et la géometrie. Bulletin de l'APMEP, No. 198, pp 199 - 205.*

[42] Van Hiele (1984). *The Didactics og Geometry in the lowest class of secondary school*. En Fuys et al. (eds) English translation of selected writings of DINA van Hield - Geldof and Pierre van Hiele. Brooklyn NY: Brooklyn College, School of Education.

[43] Van Hiele (1986). *Structura and Insight*. Orlando: Academic Press.

[44] Vergnaud G (1997). *The Nature of Mathematical Concepts*. En NUNES T et al (1997) Learning and Teaching Mathematics: An International Perspectives, Psychology Press.

[45] Von Glaserfeld (1988). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. En HERSHKOWITZ, R (1998). *About Reasoning in Geometry*. En Mammana C; Villani V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the $21^{st}$ Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands