CÓNICAS EN GEOMETRÍA DINÁMICA DINAMIZACIÓN CON EL PAQUETE RYC

Carlos Abel Álvarez Pérez
Grupo Pentagogía
Escuela Colombiana de Ingeniería.
calvarez@escuelaing.edu.co

Introducción.

Cuando escuchamos hablar sobre cónicas es probable que nos venga a la mente el nombre Apolonio, que sin duda es el investigador más grande sobre dicho tema, pero no es el único ni el primero en trabajar esta temática. En la tabla 1 se muestra un resumen cronológico sobre los mas importantes matemáticos que han trabajado sobre este apasionante tema desde la antiguedad hasta el siglo XIX.

Les coniques chez les Grecs	Les coniques chez les Arabes	Les coniques au XVIc Siècle	Les coniques au XVIIc Siècle	Les coniques au XVIIIc Siècle	Les coniques au XIXc Siècle
600 a.C – 500	500 – 1500	1500 – 1600	1600 – 1700	1700 – 1800	1800 – 1900
Menechm	Les traductions arabes de l'oenvre d'Apollonius	Les traductions arabes de l'oenvre d'Apollonius	Kepler	L'hopital	Brianchon
Euclide	Frères Banu Musa	Werner	Cavalieri	Euler	Quetelet
Archimède	Thabit Ibn Queea	Maurolico	Fermat	R.Simson	Dandelin
Apollonius	Ibrahim Sinan	Guidobaldo del del monte	Descartes	Boscovitch	Pncelet
Dioclès	Al-Sijzi		Schoolen	Hugh Hamilton	Chasles
Pappus	Al-Quhi		Desarges		Steiner
Serenus	Ilin Sahi		Pascal		Von Staudi
Proclus	Al-Haytham		Mydorge		
Eutocius	Omar Khayyam		Grégoire de Saint Vincent		
Anthemius	Al-Tusi		John Wallis		
	Al-Kashi		Jan de Witt		
			Philippe de la Hire		
			Newton		

Tabla 1: Fuente. Les caractérization des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'ensegnants: ètude d'une sequence d'activitiés et COnception d'un hyperdocument interactif. Vinceno Bongiovani. Universite Joseph Fourier, Sciences Technologie Medecine. 2002.

Apolonio representa la grandeza técnica especializada, el virtuosismo geométrico por excelencia, por esta razón los trabajos que sobre cónica fueron escritos antes que el suyo no han sido conservados. Aún la obra maestra de Apolonio "las cónicas" no se conoce hoy en toda su integridad más de la mitad de ella permaneció oculta para el mundo occidental hasta que fué publicada por Edmond Halley en 1970.

Sin lugar a dudas el nacimiento de las cónicas está directamente relacionado con los antiguos problemas griegos sobre la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo, la bisección del ángulo, la inconmensurabilidad de ciertos segmentos y la paradoja de Zenon. Menecmo, hacia 350 a.c., se ocupa del problema clásico de la duplicación del cubo (construir un cubo de doble volumen que otro dado) redujo el problema al de la construcción de las dos medias proporcionales entre 2 y 1. En nuestro lenguaje, si encontramos x e y, tales que

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{1}$$

Entonces

$$x^2 = 2y, \quad y^2 = x,$$

y así

$$x^3 = 2y^3$$

Es decir, el cubo de lado x es de volumen doble que el de lado y.

En general el problema de las dos medias proporcionales entre a y b consister en hallar x e y, tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Su resolución se reduce a hallar la intersección de la curva

$$x^2 = ay$$

con la curva

$$xy = ab$$

Es así como que aparece lo que nosotros llamamos parábola e hipérbola equiláteras.

Menecmo introduce estas curvas como secciones de un cono circular recto por un plano perpendicular a un generatriz. Por eso la parábola fué llamada y con esta, terminología aparece todavía en Arquimedez, sección de cono rectángulo (es decir, sección de un cono cuyo ángulo de apertura es recto, cortado por un plano perpendicular a una generatriz). La elipse era la sección de cono acutángulo y la hipérbola (hasta Aplonio, solo se consideró una rama de ella) la seccion de cono obtusángulo.

El desarrollo de la teoría de las cónicas debió ser muy rápido pues ya hacia fines del siglo IV a.c., existieron dos obras importantes. La primera es de Aristeo, El libro de los lugares sólidos y la segunda la de Euclides, también perdida, cuyo contenido debió ser, en sus lineas fundamentales el que se encuentra en los cuatro primeros libros de Las Cónicas de Apolonio, si bien menos general y menos sistemático.

Apolonio había captado cómo con la genración del cono circular oblicuo de dos

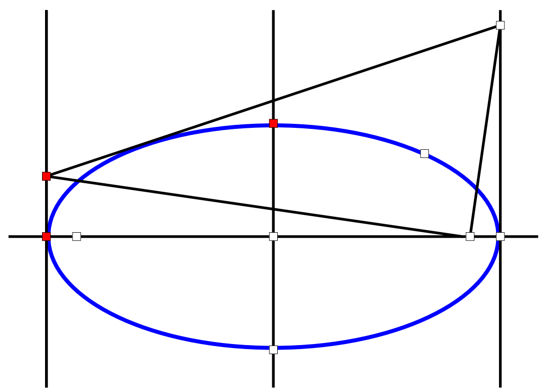
$$p = \frac{2b^2}{a}$$

hojas, seccionado por un plano se daba lugar a los diferentes tipos de cónicas. Esta consideración de un solo cono permite la obtención de las tres cónicas según la inclinación diversa del plano y además identificará la hipérbola como una curva con dos ramas. En estos puntos importantes se aparta de sus antecesores del campo, logrando una visión más unitaria y mejor sistmatizada del tema. Estudia las secciones circulares del cono, paralelas y antiparalelas a la base; introduce el parámetro que llama lado recto

$$p = \frac{2b^2}{a}$$

Establece las propiedades de ordenada y abscisa de las cónicas; considera el centro, ejes, diámetros conjugados, tangentes,... y ataca el problema de la construcción de la cónica dados diversos elementos de las mismas.

La obra de Apolonio consta de 8 libros en los que estudia todo lo que hoy se conoce como cónicas y más. Como ejemplo se presenta la proposición 45 del libro tercero en la se establece como desde un foco se ve bajo un ángulo recto el segmento determinado por un tangente cualquiera a la elipse entre las tangentes en los vértices de las mismas.



La geometría dinámica y el paquete Regla y Compás.

El software de geometría dinámica genera nuevos ambientes de aprendizaje que favorecen actividades de exploración de propiedades y relaciones geométricas, que pueden ser verificadsas mediante el uso de exploración de mecanismos de control que están incorporados en el programa. El software cuenta con una serie de herramientas que permiten desarrollar a plenitud los diferentes temas sobre geometría plana e incluso sobre algunas representasiones tridimensionales. Una de las principasles ventajas de esta herramienta es que permite animar las construcciones geométricasconservando sus propiedades básicas, es decir, que le agrega mivimiento a la clásica geometría euclidiana.

Cuando se resuelve un problema utilizando un problema de geometría dinámica regularmente se viven tres procesos: exploración, construcción y justificación. En algunos casos es posible que adicionalmente se requiera de una

"demostración".
En el mercado se encuentra una buena variedad de paquetes computacionales para el desarrollo de geomtría dinámica, entre otros, El Cabri-géomètre, El Wingeom y el RyC. A continuación se resaltan algunas de las mas importantes características de RyC, de manera que usted pueda compararlo con otros programas de geometría.

- Funciona bajo Windows 95, $OS/2$, Linux, Apple Machintosh, Solaris y otras plataformas con Java.
- Es software libre, incluso el código fuente puede obtenerse bajo una licencia GNU.
- Documentación en $HTML$, Tutorial y Demos.
- Simulación de construcciones de Geometría euclidiana plana con Regla y Compás.
- Inrefaz moderna e intuitiva con shortcuts, descripción de íconos, ventanas de diálogo y menús.
- Modo visual en el que se construye con el ratón.
- Creación automática de puntos y de intersecciones.
- Posibilidad de fijar la longitud de los segmentos, posición de puntos radios de circunferencias y amplitud de águlos.
- Posibilidad de truncar las circunferencias.
- Posibilidad de ocultar construcciones intermedias.
- Objetos de colorers que pueden ocultarse ocultando el color.
- Posibilidad de mostrar los nombres y los valores de los objetos.
- Posibilidad de cambiar el número de decimales por separado para ángulos y magnitudes.
- Construcción rápida de perpendiculares, paralelas y puntos medios.
- Lugares geométricos de puntos.

- Macros para facilitar la repetición de construcciones.
- Definición de ejercicios de construcción que pueden funcionar localmente o en un navegador.
- Presentación de construcciones y ejercicios en internet con un navegador normal.
- Las construcciones también pueden diseñarse en un navegador de texto.
- Impresión de construcciones.
- Expresiones aritméticas para definir magnitudes, longitud de segmentos, radios de circunferencias y amplitud de ángulos, así como coordenadas de puntos.
- El programa evoluciona rapidamente.
- Naturalmente versiones futuras tendrán otras potencialidades.

Algunas definiciones básicas sobre cónicas.

Como se recordó en la introducción histórica, las cónicas han sido estudiadas desde hace mucho tiempo y a través de todos estos añoshan sido caracterizadas de diversas formas. A continuación se enuncian algunas de las definiciones más comunes:

Definiciones griegas hasta antes de Apolonio.
Parábola: Sección de cono rectángulo cortado por un plano perpendicular a una generatriz.

Elipse: Sección de cono acutángulo cortado por un plano perpendicular a una generatriz.

Hipérbola: Sección de cono obtusángulo cortado por un plano perpendicular a una generatriz. Se considera solo una rama de la hipérbola.

Definiciones de Apolonio.
Apolonio presenta las tres curvas cónicas como la intersección de un cono circular oblicuo de dos hojas seccionado por un plano, donde las diferentes curvas se obtienen según la inclinación del plano y además identifica la hipérbola como una curva con dos ramas.

Como lugares geométricos.
Parábola: Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que equidistan a un punto fijo y una recta en el plano. El punto no debe estar en la recta.
Elipse: Es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano cuyas distanciasa dos puntos fijos tienen suma constante.
Hipérbola: Es el lugar geométrico de todod los puntos en plano cuyas distancias a dos puntos fijos tienen diferencia constante.

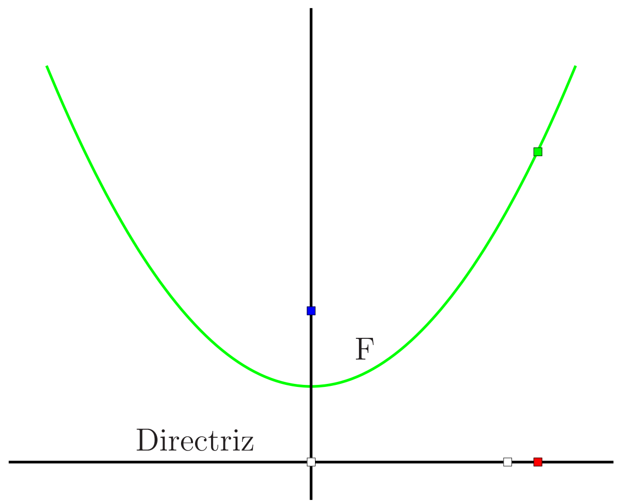
Desde la geometría analítica.
La gráfica cartesiana de cualquier ecuación de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

en donde a, b, c no son todas nulas, es una sección cónica. Excepto cuando la gráfica no existe o es un par de rectas. Mas exactamente la anterior ecuación representa:
Una parábola si, $b^2 - 4ac = 0$.
Una elipse si, $b^2 - 4ac < 0$.
Una hipérbola si, $b^2 - 4ac > 0$.

Algunas construcciones básicas.
A partir de las definiciones geométricas sobre cónivcas y apoyándose un poco en las definiciones analíticas es posible construir, con su respectiva justificación, las curvas cónicas utilizándo el software RyC. A continuación se presentan algunas construcciones básicas, sobre ideas de dichas curvas. Algunas de estas construcciones (su justificación) han surgido en el seminario sobre RyC que se ha desarrollado en la E.C.I. bajo la coordinación de el Dr. Ernesto Acosta.

La Parábola.
Para hacer la construcción de la parábola que se muestra en el applet se tiene en cuenta que la distancia entre cualquier punto de la parábola y el foco es igual a la distancia entre ese mismo punto y la directriz.



La Elipse.
Para construir la elipse que se muestra en el applet se ha utlizado el concepto de parametrización de una curva que se estudia normalmente en los cursos de cálculo.

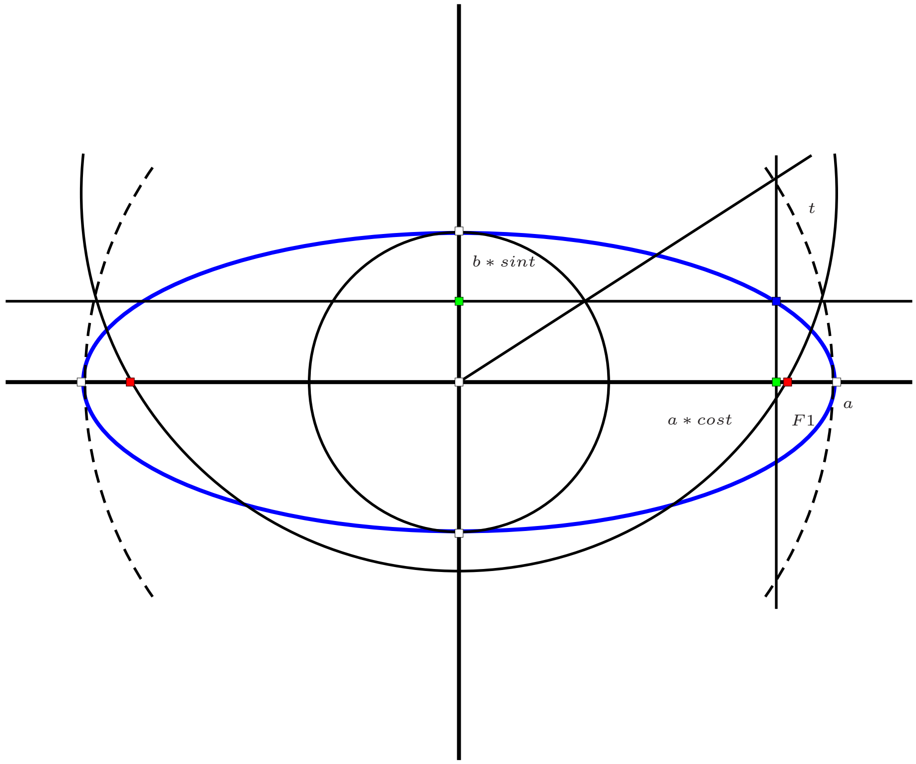
Justificación.
Si se toman los ejes de la elipse copmo un sistema de coordenadas se puede observar que las proyecciones del punto móvil sobre los ejes son:

$$x = acost, \quad y = bsent$$

de donde

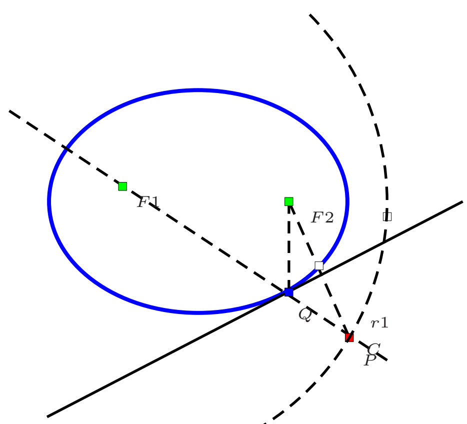
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2(cost)^2}{a^2} + \frac{b^2(sent)^2}{b^2} = 1$$

la cual justiica que la traza del punto móvil sea realmente una elipse con eje mayor $2a$ y eje menor $2b$.



Elipse e Hipérbola.

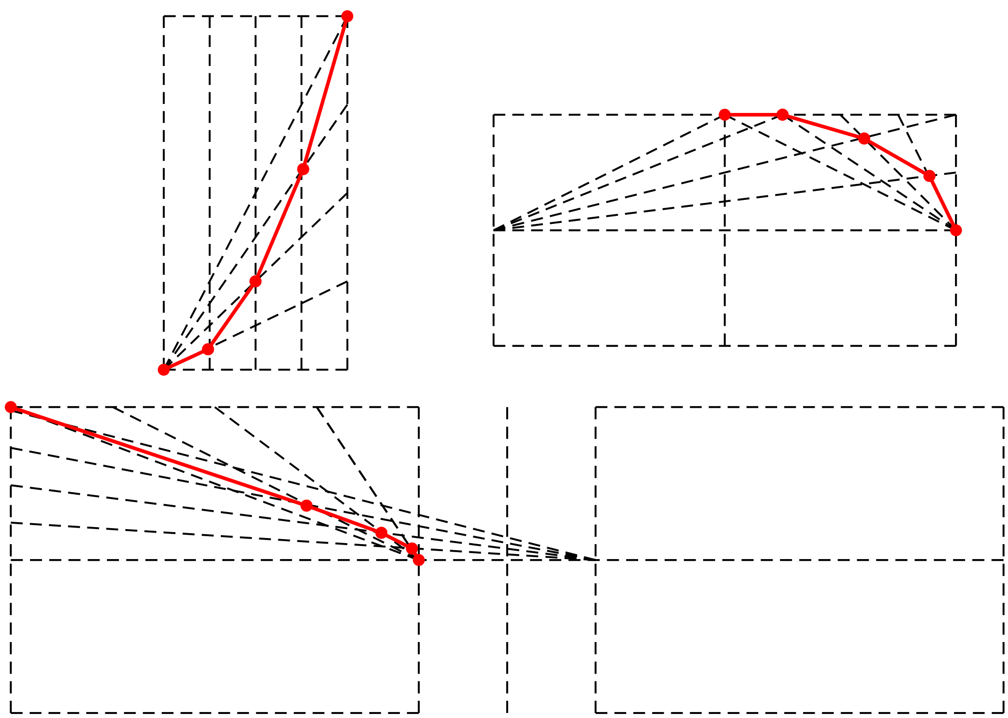
La construcción que se muestra a continuación utiliza la definición geomtrica de la suma y la diferencia de las distancias para construir tanto la elipse como la hipérbola, sobre un mismo esquema.



Justificación.

Obsérvese que, por construcción, el triángulo $PQF2$ es isósceles, es decir, que $d(P,Q) = d(P,F2)$. Por tal razón, cuendo el punto $F2$ se encuentra en el interior de la circunferencia C se cumple que $d(F1,Q) + d(F2,Q) = d(F1,P)$, además $d(F1,P)$, es constante luego la traza del punto Q cuando P se desplaza sobre C es una elipse. Por otro lado, si $F2$ se encuentra en el exterior de la circunferencia C, entonces $d(F1,Q) - d(F1,Q) = d(F1,P)$, así que en este caso la traza es una hipérbola.

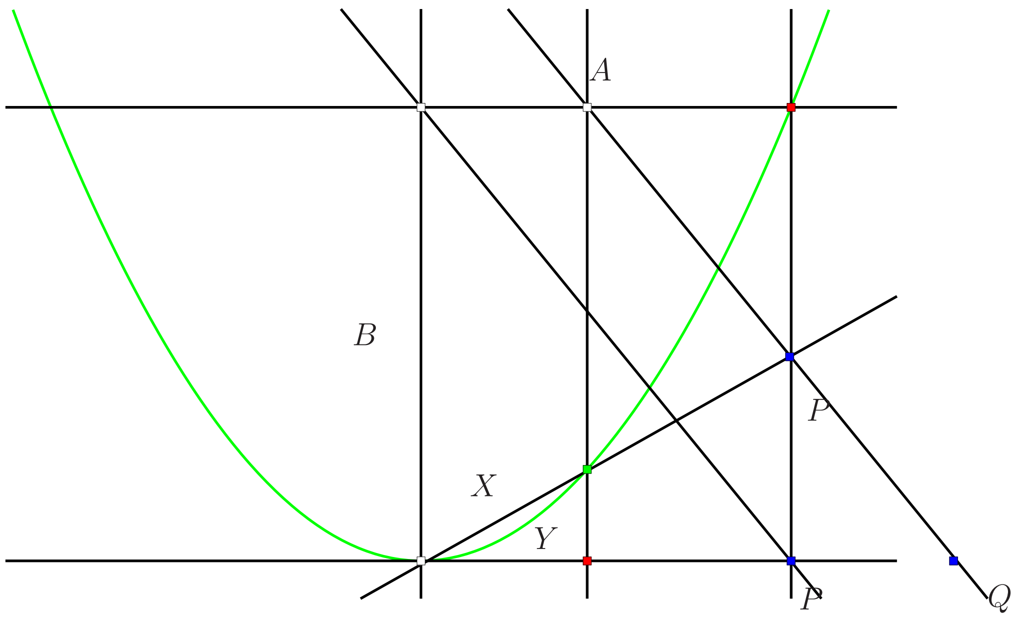
En un curso de métodos gráficos o de dibujo para ingeniería es comun ver las siguientes construcciones para "pintar" las curvas cónicas.



Pero como profesores de matemáticas surge inmediatamente la pregunta ¿són estas curvas realmente cónicas?. Pues la respuesta es sí, a continuación se presentas las dinamizaciones de las anteriores construcciones y la justificación de por qué realmente son cónicas.

La Parábola.

Para poder dinamizar la construcción se necesita tomar un punto móvil que sirva como parámetro y además de hacer igual cantidad de divisiones en cada segmento no puede ser uno por uno, pero para este último detalle se puede utilizar una recta paralela a la diagonal y así se garantiza la igualdad de los divisores.



Ahora para garantizar que realmente se trata de una parabola observense las siguientes relaciones:

$$\frac{RP}{A} = \frac{Y}{X} \qquad \frac{B}{A} = \frac{PR}{X}$$

de donde se tiene

$$PR = \frac{B}{A}X$$

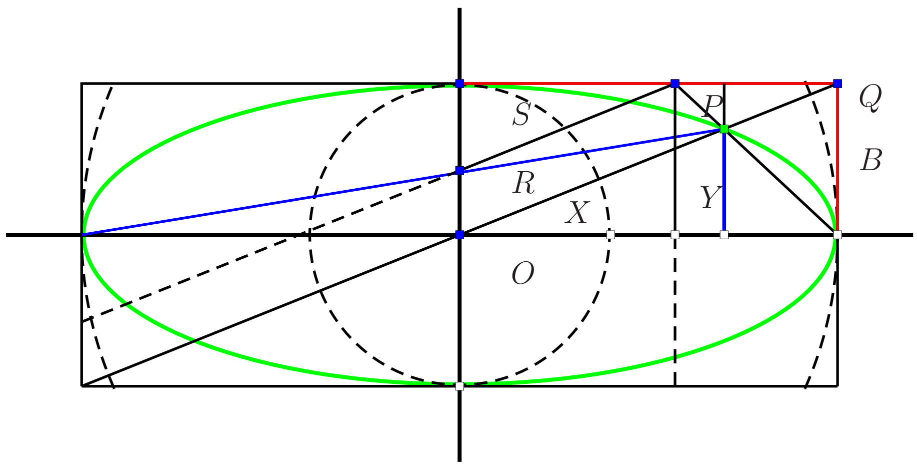
así que

$$\frac{\frac{B}{A}X}{A} = \frac{Y}{X} \ \ \textit{esto es} \ \ Y = \frac{B}{A^2}X^2$$

con lo cual queda demostrado que realmente la traza corresponde a una parábola.

La Elipse.

Para dinamizar esta construcción se hace un proceso similar al realizado para la parábola y se obtiene la construcción que se mmuestra en el siguiente applet,



Ahora para garantizar que se trata de un elipse se pueden ver las siguientes relaciones:

$$\frac{Y}{X+A} = \frac{RO}{A} \qquad \frac{B}{PQ} = \frac{Y}{A-X} \qquad \frac{A}{B} = \frac{PQ}{RO}$$

de donde se tiene,

$$PQ = \tfrac{A}{B}RO \text{ de donde } \frac{B}{\frac{A}{B}RO} = \frac{Y}{A-X}$$

$$RO = \frac{B^2(A-X)}{AY}$$

$$\frac{Y}{X+A} = \frac{\frac{B^2(A-X)}{AY}}{A} = \frac{B^2}{YA^2}(A-X)$$

así que

$$A^2Y^2 = B^2(A^2 - X^2)$$

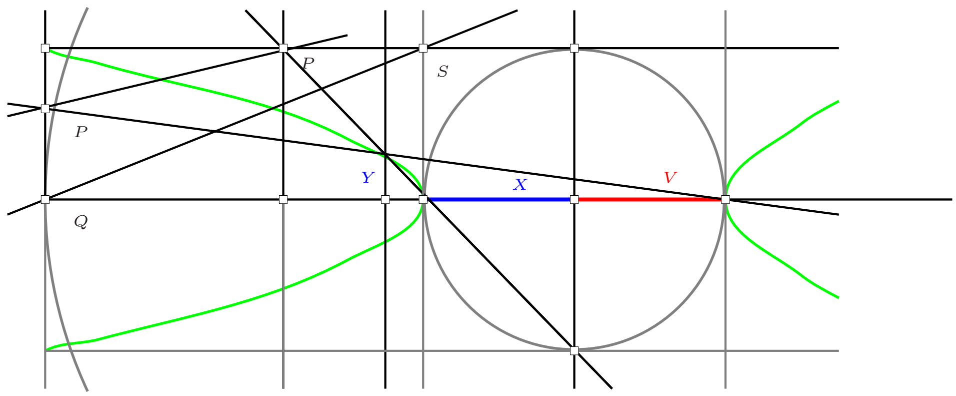
$$A^2Y^2 + B^2X^2 = A^2B^2$$

$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$

Por tanto la curva es efectivamente un elipse.

La Hipérbola.

Para dinamizar esta construcción se sigue un proceso similar a las dos anteriores y se obtiene el siguiente applet,



donde se pueden observar las siguientes relaciones:

$$\frac{PQ}{A+2V} = c \qquad \frac{A}{B} = \frac{RS}{PQ} \qquad \frac{B}{RS} = \frac{Y}{X-V}$$

así que, despejando y reemplazando sucesivamente se tiene,

$RS = \frac{(PQ)A}{B}$

$\frac{B}{\frac{(PQ)A}{B}} = \frac{Y}{X-V}$ de donde $PQ = \frac{B^2(X-V)}{AY}$

entonces

$\frac{B^2(X-V)}{AY(A+2V)} = \frac{Y}{V+X}$

$B^2X^2 - (A^2 + 2AV)Y^2 = B^2V^2$

Lo cual comprueba que la curva obtenida es realmente una hipérbola.

Bibliografía.

- Les caractérization des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'ensegnants: étude d'une equence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif. Vicenzo Bongiovanni. Universite Joseph Forurier, Sciences Technologie Medecine. Francia, 2002.

- Exploración, construcción, argumentación y demostración en la solución de un problema. Fabiola Rodríguez, Leonor Camargo y Ernesto Acosta. Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas Grupo Coordinador del Ministerio de Educación, Bogotá, 2002.

- Página principal de RyC.

- http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/apolonio/apolonio.html