DE LA GENERACIÓN ESPONTÁNEA DE LAS FÓRMULAS DE VOLUMEN A SU CONSTRUCCIÓN

William Fernando Estrada
Universidad de Pamplona.

Resumen.

En la primera parte del artículo el autor muestra que las fórmulas de volumen del prisma, pirámide y esfera no se justifican adecuadamente a los estudiantes. Esta afirmación la sustenta a partir de un análisis sucinto de lo que aparece en los textos que tradicionalmente dominan la enseñanza y de su experiencia como docente. En la segunda parte da a conocer una propuesta para construir las fórmulas del volumen de un prisma y una pirámide cualquiera; del área del círculo y la semiesfera y con base en ésta última, obtener la del volumen de la esfera. Termina con la descripción de las ventajas de la estrategia.

El Problema.

Un problema de la enseñanza del volumen en la educación básica secundaria es: *¿Cómo justificar las fórmulas del volumen de los sólidos elementales (prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera)?* Las propuestas que hacen los textos que dominan tradicionalmente la enseñanza en los colegios no es satisfactoria. Dicha presentación se puede resumir así:

a.) No se justifica la fórmula del volumen de un prisma y de una pirámide cualquiera. En el primer caso sólo se llega a justificar la del prisma de base rectangular. En el segundo caso, lo más que se hace es ilustrar gráficamente que un prisma triangular recto se puede descomponer en tres pirámides de base triangular, nunca se demuestra que estas pirámides tienen el mismo volumen.

b.) En la mayoría de textos se acude al proceso de llenado y comparación para determinar el volumen del cilindro, el cono y en muy pocos casos se sigue este procedimiento para el caso de la esfera. La dificultad con este método es que los profesores no cuentan por lo general con los elementos requeridos y con frecuencia se conforman con relatarles la situación a los estudiantes.

c.) En nueve de los diez textos que se revisaron aparece de forma espontánea la fórmula del volumen de la esfera. Sólo en un texto, se justifica con base en el método de Arquímedes. Se nota también un escaso uso del principio de Cavalieri como método fundamental para determinar el volumen de sólidos inclinados y como base esencial para el desarrollo del concepto de infinitesimal.

Esta forma de presentar las fórmulas de volumen que aparece en los textos, suele reproducirse en la enseñanza que la mayoría de los profesores ponen en práctica con sus estudiantes. Por mi experiencia como profesor de matemáticas en varios colegios y por diálogos sostenidos con mis colegas en diversas ocasiones, he podido constatar que los profesores de matemáticas del nivel secundario carecemos de una estrategia que utilice procedimientos matemáticos fundamentales y sencillos para convencer a nuestros alumnos sobre la razón por la cual el volumen de los sólidos elementales se puede calcular con las fórmulas disponibles para ello.

Cuando le he preguntado a mis colegas sobre cómo convencen ellos a los estudiantes de que el volumen de un prisma cualquiera es el producto de su base por la altura, suelen responder que por analogía con la manera como se calcula el volumen de un prisma rectangular. De igual manera, cuando he indagado sobre cómo persuadir a los estudiantes de que el volumen de una pirámide cualquiera es la tercera parte del producto de su base por la altura, algunos responden que a través de la descomposición de un prisma triangular recto en tres pirámides triangulares de igual volumen; sin embargo, no saben por qué el volumen es el mismo. Otros responden que esto se puede lograr mediante un proceso de llenado y comparación de una pirámide y un prisma de igual base y altura. Cuando he realizado la misma pregunta para el caso de la esfera, responden que a través de llenar una esfera y un cilindro cuya base sea igual al círculo diametral de la esfera y cuya altura coincida con el diámetro de ésta.

Estas respuestas dejan ver que los profesores de matemáticas del nivel secundario contamos solamente con los métodos de analogías y llenado para justificar la fórmulas de volumen de los sólidos elementales. Me parece que estos procedimientos son adecuados y se deben llevar a cabo cuando ya no existe posibilidad alguna de realizar un procedimiento matemático para justificar alguna idea matemática. Mientras se puedan utilizar argumentos matemáticos al alcance de nuestros alumnos para sustentar alguna idea matemática, es conveniente usarla, ya que esto enriquece la estructura conceptual de nuestros alumnos. No se puede abusar de las analogías como recurso didáctico y no siempre en las escuelas existe el material requerido para hacer los experimentos de llenado y comparación, por esto es conveniente contar con una estrategia al alcance del maestro y efectiva a la hora de justificar las fórmulas de volumen a nuestros estudiantes.

La importancia de construir una fórmula matemática es que el alumno difícilmente la olvida o si no la recuerda, puede utilizar el procedimiento para reconstruirla. En el proceso de construcción de una fórmula matemática el alumno pone en juego los conocimientos que posee y en este sentido, dicho aprendizaje es significativo, pues un aprendizaje significativo no quiere decir que responda solamente a los intereses del estudiante, sino que permite que éste ponga en juego lo que ya sabe para elaborar y descubrir nuevos saberes. En la medida que el estudiante pone en juego lo que sabe para construir un nuevo conocimiento, este conocimiento se vuelve significativo para él.

Por otro lado, la enseñanza actual de la matemática parte del supuesto que aprender matemáticas es hacer matemáticas. El propósito es que los estudiantes valoren la matemática como una forma de comprender el mundo, la utilicen para resolver problemas y adquieran confianza en sí mismos, en sus ideas y en sus métodos. Los resultados no son más importantes que los caminos que conducen a estos (Abrantes, 1996). Por esta razón, la construcción de las fórmulas de volumen por parte de los alumnos es un asunto prioritario que los maestros deben asumir con responsabilidad.

Cuando el alumno conoce el proceso por el cual se llega a una fórmula matemática, entonces puede utilizarla con solvencia y seguridad, reconociendo sus alcances y limitaciones; incluso encuentra cierto placer cada vez que la usa,pues ella representa todo un proceso de construcción que le ha exigido esfuerzo. Pero cuando utiliza una fórmula matemática de manera mecánica, sin saber cómo surge y por qué sirve para lo que sirve, la olvida pronto y con frecuencia la emplea de manera incorrecta. Para que una fórmula tenga sentido para quien la usa, se requiere que éste la haya construido, pues de lo contrario la fórmula carece de alma y por tanto de vida.

Justificar las fórmulas a nuestros estudiantes no es más que lograr que ellos mismos las justifiquen; es decir, que elaboren los argumentos y construyan el camino que permita llegar a ellas. Convencer a los estudiantes de una verdad matemática, es conseguir que ellos la acepten por convicción, a través de un viaje emprendido por ellos mismos y en el que el maestro es un invaluable compañero. La enseñanza actual de la matemática exige que el estudiante construya la ideas matemáticas a partir de los conceptos matemáticos que posee, utilizándolos en su calidad de herramientas.

En consecuencia si aprender matemática es hacer matemática, entonces más importante que una respuesta, es el camino o los caminos que conducen ésta. Si antes importaba las fórmulas como tales, hoy en día es más relevante construirlas, pues al hacerlo se está haciendo matemáticas y por lo tanto, aprendiendo matemáticas.

Objetivo.

En virtud de la problemática planteada anteriormente es conveniente contar con una propuesta alterna para justificar las fórmulas de volumen de los sólidos elementales[1] que esté al alcance de los alumnos y del maestro. Así, el objetivo central de este trabajo es *mostrar una estrategia para la construcción de las fórmulas de volumen de los sólidos elementales que sea significativa, formativa y práctica para los estudiantes.*

Se quiere que sea significativa para el estudiante en la medida que éste pueda hacer uso de los conocimientos que posee para comprender nuevos conceptos. En este sentido la estrategia debe ser una secuencia lógica donde cada etapa es fundamental para el desarrollo y comprensión de la siguiente.

Al mismo tiempo, se quiere que sea formativa, es decir, que contribuya a la

[1]Por sólidos elementales se entenderá los siguientes sólidos geométricos: prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera.

organización estructurada del pensamiento del estudiante. Es por esto que se requiere una propuesta con una estructura interna coherente que le ayude al alumno a estructurar jerárquicamente conceptos y procedimientos, para lo cual es importante que le brinde también la oportunidad de desarrollar su capacidad de representación simbólica, es decir, de expresar a través de un lenguaje simbólico fenómenos y objetos de la realidad.

Igualmente que sea práctica, esto es, que favorezca el carácter instrumental de la matemática, de modo que los conceptos y procedimientos se conviertan en herramientas que el estudiante puede usar al interior de la matemática para hacer matemática, o fuera de ésta, para aplicarlas en otros ámbitos del conocimiento y la vida humana.

Específicamente, los objetivos de la propuesta son:

- Desarrollar un procedimiento formal, pero al alcance de los alumnos, que permita construir la fórmula del volumen de un prisma y una pirámide cualquiera.
- Desarrollar un procedimiento de carácter heurístico[2], para construir la fórmula del área del círculo y de la esfera como prerrequisitos esenciales para encontrar la fórmula del volumen de la esfera.
- Desarrollar un procedimiento formal, pero al alcance de los alumnos, que permita construir la fórmula del volumen de la esfera.
- Hacer uso del principio de Cavalieri como idea fundamental para justificar la fórmula del volumen de los sólidos inclinados.

No se mostrará el procedimiento para determinar las fórmulas de volumen del cilindro y del cono ya que estas se obtienen fácilmente como consecuencia de las fórmulas del volumen del prisma y la pirámide, al concebirlos respectivamente, como un prisma y una pirámide con infinito número de caras (Clemens,1998). Una forma de lograr que los estudiantes entiendan que un cilindro y un cono se pueden considerar, respectivamente, como un prisma y una pirámide con infinito número de caras, es exigiéndoles que construyan

[2]Por heurística se entiende la utilización de procedimientos no matemáticos para argumentar afirmaciones matemáticas, como por ejemplo el método de Arquímedes para determinar el volumen de sólidos.

prismas y pirámides de 10 y 20 caras. Al hacerlo, los estudiantes se dan cuenta que entre más caras tenga un prisma y una pirámide, más se parecen a un cilindro y a un cono.

La Estrategia.

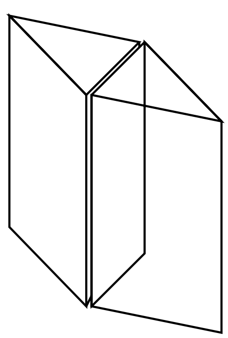
Recomendaciones Generales.

Es importante llevar a la clase diferentes tipos de sólidos para que los estudiantes puedan percibirlos, distinguirlos y clasificarlos. Luego, estos deben construir sus propios modelos en diferentes materiales, preferiblemente en plastilina ya que se requerirá hacer cortes sobre estos. Es también conveniente que los estudiantes dibujen los modelos reales, pues éstos desarrollan su capacidad de percepción visual. Por otra parte, debido a que en todos los textos revisados se argumenta satisfactoriamente que el volumen de un prisma rectangular recto es el producto de su base por la altura, utilizaremos este hecho para los razonamientos que desarrollaremos en adelante.

Volumen del Prisma.

En todos los textos a los más que se llega es a demostrar satisfactoriamente que el volumen de un paralelepípedo es el producto de su base por la altura, y se extiende esta fórmula, sin argumentación alguna, para el caso de un prisma cualquiera. Por consiguiente el trabajo consistirá en argumentar por qué el volumen de un prisma cualquiera se puede obtener multiplicando la base por la altura. Antes de iniciar la presentación formal de dicho argumento a los estudiantes, es fundamental que éstos realicen en plastilina un prisma rectangular recto y luego lo dividan en dos prismas triangulares. La manera de hacerlo es colocar un hilo nylon templado con las dos manos, sobre una de las diagonales de la base superior, luego se hala suavemente hacia abajo de manera que este se deslice paralelo a una de las aristas laterales. Esta actividad le permite al estudiante evidenciar que el volumen de un prisma triangular recto es la mitad del volumen del prisma rectangular recto correspondiente (ver Fig. 1). Posteriormente es importante que los estudiantes construyan en plastilina un prisma recto de base poligonal y luego, con la ayuda de un hilo nylon, lo dividan en los prismas triangulares rectos que están determinados por sus caras laterales. Esto le permitirá a los estudiantes darse cuenta que el volumen de un prisma recto cualquiera es la suma de los volúmenes de un número finito de prismas triangulares rectos. Con estas dos ideas claras para los alumnos, el profesor puede pasar a la parte formal de la argumentación, que será asimilada con mayor facilidad por los alumnos ya que estos poseen las dos ideas básicas sobre las cuales se fundamenta el argumento. A continuación se presenta dicha argumentación.

D// El volumen de un prisma triangular recto es la mitad del volumen de un paralelepípedo, pues dos prismas triangulares rectos del mismo tamaño forman un paralelepípedo (ver Fig. 1.). Por tanto:



$$V(prisma - triangular) = \frac{1}{2}\, V(paralelep\acute{\imath}pedo)$$

$$V(prisma - triangular) = \frac{1}{2} B \cdot h = \left(\frac{1}{2} B\right) \cdot h = B^t \cdot h$$

$$V(prisma - triangular) = B^t \cdot h \text{ donde } B^t \text{ es el área de la base del prisma triangular}$$

Fig. 1.

Ahora bien, un prisma recto cualquiera se puede descomponer en un número finito de prismas triangulares rectos (ver Fig.2.). Por tanto, el volumen de un prisma recto[3] es la suma de los volúmenes de los prismas triangulares rectos que lo conforman. Así que,

[3]Se ha considerado un prisma de 10 caras ya que para algunos estudiantes no es fácil asumir un prisma de n caras. No obstante, los estudiantes entienden que este procedimiento se puede llevar a cabo con un prisma de cualquier número de caras.

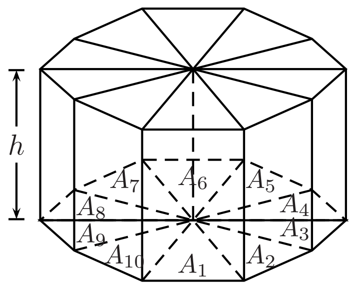


Fig. 2.

$$V(P) = V(P_1) + V(P_2) + V(P_3) + \ldots + V(P_{10})$$
$$V(P) = A_1 \cdot h + A_2 \cdot h + A_3 \cdot h + \ldots + A_{10} \cdot h$$
$$V(P) = (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{10}) \cdot h$$
$$V(P) = B \cdot h$$

donde P_1, $P_2, P_3, \ldots, P_{10}$ son los prismas triangulares rectos que conforman el prisma P y $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ son las bases correspondientes.

Si el prisma es inclinado se tiene que acudir al principio de Cavalieri para garantizar que la fórmula es la misma que para el caso del prisma recto. Este principio establece que dos sólidos de la misma altura y con bases sobre el mismo plano, tienen igual volumen si todo plano paralelo a las bases que corte a uno de los sólidos corta también al otro en una sección transversal de igual área que la del primero.

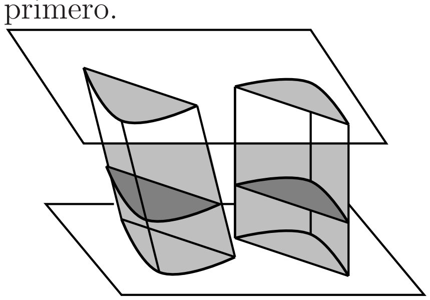


Fig. 3.

Este principio se puede demostrar a los estudiantes considerando una baraja de naipes y preguntándoles cuál es el volumen del sólido cuando los naipes están ubicados en forma vertical y luego cuando están en forma inclinada. Con frecuencia los estudiantes responden que es igual ya que en cualquier caso el volumen del sólido es la suma de los volúmenes de los naipes.

Pirámide.

En todos los textos lo más que se hace es ilustrar la descomposición de un prisma triangular recto en tres pirámides triangulares. Con base en esto afirman de manera arbitraria que el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen del prisma correspondiente. Nunca demuestran que el volumen de las pirámides en las que se descompone el prisma triangular es igual, y no utilizan este resultado para demostrar que el volumen de una pirámide cualquiera es la terceras parte del producto de su base por la altura. Por consiguiente, el propósito es mostrar que un prisma recto triangular se puede descomponer en tres pirámides triangulares del mismo volumen, y utilizar este resultado para mostrar de manera general que el volumen de una pirámide cualquiera es la tercera parte del producto de su base por la altura.

Antes de iniciar cualquier argumentación formal, el profesor debe asegurarse que los estudiantes construyan el prisma triangular recto en plastilina y lo dividan en tres pirámides triangulares tal como lo indica la figura 4. Este es el primer paso para que los estudiantes entiendan que el volumen de una pirámide triangular es la tercera parte del volumen del prisma triangular correspondiente. No obstante, queda por demostrar que las tres pirámides tienen el mismo volumen. A continuación aparece una prueba formal de éste hecho dirigida al maestro, pero cuyas ideas pueden ser descritas a los estudiantes en un lenguaje sencillo con base en el modelo de plastilina que ellos han elaborado.

$D//$ Un prisma triangular recto se puede descomponer en tres pirámides tal como lo muestra la Fig. 4.(Bruño, 1958)

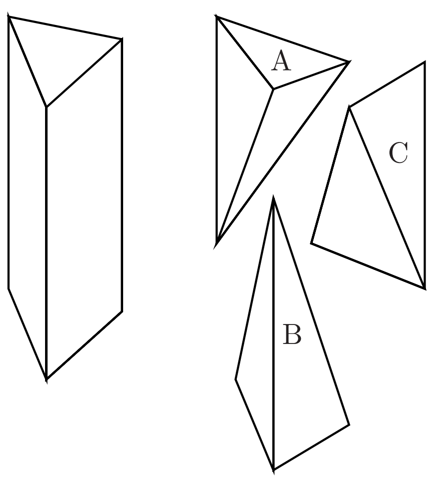


Fig. 4.

Las pirámides A y B son de idéntica forma y tamaño, por tanto tienen el mismo volumen. Las pirámides B y C se pueden juntar de la manera como originalmente estaban pegadas, formando así la pirámide de base rectangular $QMNOP$ (Fig. 5). Si se corta esta pirámide mediante un plano paralelo a su base, se determina una sección transversal rectangular formada por dos triángulos congruentes, cada uno de los cuales es sección transversal de la pirámide B y C respectivamente. Por ejemplo, si se traza el plano UTS paralelo a la base de la pirámide.

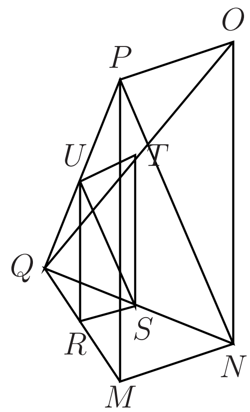


Fig. 5.

$QMNOP$ se obtiene la sección transversal $URST$ formada por los triángulos URS y STU, los cuales son secciones transversales congruentes de las pirámides B y C respectivamente. Puesto que las pirámides B y C tienen la misma altura y sus bases están en un mismo plano (formando la base de la pirámide $QMNOP$), entonces por el principio de Cavalieri, tienen igual volumen.

Puesto que las pirámides A y C tienen el mismo volumen que la pirámide B, entonces las tres pirámides tienen igual volumen. En consecuencia, el volumen de una pirámide de base triangular recta es la tercera parte del volumen del prisma recto correspondiente. Es decir,

$$V(\textit{pirámide - triangular - recta}) = \frac{1}{3} \cdot V(\textit{prisma - triangular - recto})$$
$$V(\textit{pirámide - triangular - recta}) = \frac{1}{3} B \cdot h$$

De igual modo, los estudiantes deben construir en plastilina una pirámide de base poligonal, y con la ayuda de un hilo nylon deben descomponerla en las pirámides triangulares determinadas por sus caras laterales. Esta actividad les permitirá a los estudiantes darse cuenta que una pirámide se puede descomponer en un número finito de pirámides triangulares y por lo tanto, su volumen es la suma de los volúmenes de estas. Esta idea es la esencia de la argumentación formal que el maestro ha de hacer a sus estudiantes, para persuadirlos de que el volumen de una pirámide cualquiera es la tercera parte del producto de su base por la altura.

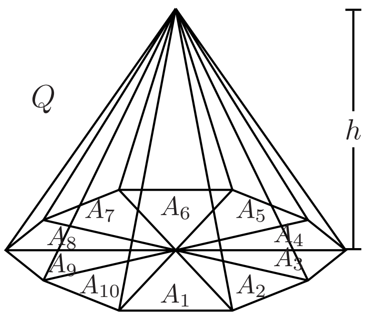


Fig. 6.

La pirámide Q (Fig. 6) se puede descomponer en las pirámides triangulares $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_{10}$ respectivamente. Por lo tanto:

$$V(Q) = V(Q_1) + V(Q_2) + V(Q_3) + \ldots + V(Q_{10})$$
$$V(P) = \frac{1}{3}A_1 \cdot h + \frac{1}{3}A_2 \cdot h + \frac{1}{3}A_3 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3}A_{10} \cdot h$$
$$V(Q) = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{10})$$
$$V(Q) = \frac{1}{3}B \cdot h$$

Si la pirámide es inclinada, el principio de Cavalieri garantiza que la fórmula también se cumple en este caso.

Área del Círculo y de la Esfera.

Antes de realizar las actividades que permitirán obtener el área del círculo y de la esfera, es importante asegurarse que los estudiantes conocen y utilizan comprensivamente la fórmula de la longitud de la circunferencia. De la fórmula del área del círculo se podrá obtener el área de la esfera, y esta a su vez permitirá obtener la fórmula de su volumen.

Círculo.

Para esta actividad se requiere tener lana y un círculo de cualquier tamaño, preferiblemente no más de 10 *cm* de radio. Se trata de recubrir el círculo con circunferencias concéntricas de tiras de lana pegadas una tras otra, sin dejar espacio alguno entre sí, tal como lo ilustra la figura 6. Después de haber recubierto el círculo, se despegan las tiras de lana y se disponen una sobre otra desde la más larga hasta la más corta, alineándolas por uno de los extremos; de este modo se obtiene un triángulo rectángulo cuya base mide la longitud de la circunferencia y cuya altura es el radio del círculo (ver Fig. 7). (Olmo, 1989).

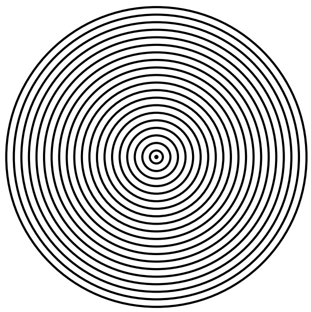


Fig. 6.

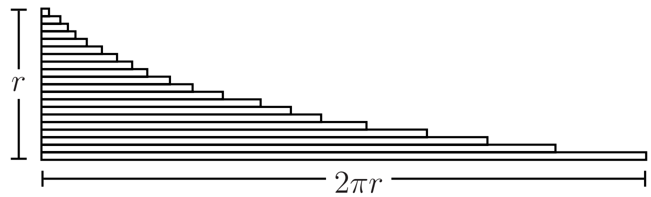


Fig. 7.

El área del círculo es igual al área del triángulo. Es decir,

$$A(\textit{círculo}) = A(\textit{triángulo}) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r) \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

Semiesfera.

Para esta actividad se requiere una semiesfera de icopor y lana. Se trata de recubrir la superficie de la semiesfera y la de su base con lana. La base recubre mediante circunferencias concéntricas de lana pero sin cortar tiras, sólo a través de un proceso de enrollamiento a manera de espiral (ver Fig.8). La superficie de la semiesfera de icopor se recubre enrollando la lana alrededor, a manera de espiral, de modo que se formen circunferencias una sobre otra, tal como lo indica la figura 9.

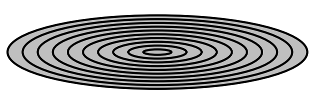


Fig. 8.

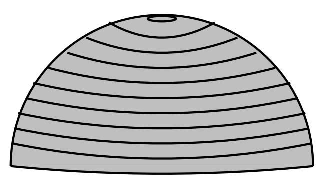


Fig. 9.

Después se haber recubierto con lana tanto la semiesfera como su base se desenrolla la lana en cada caso y se comparan sus longitudes. Si el ejercicio fue realizado con cuidado y utilizando lana del mismo grosor, se observará que la lana que recubre la semiesfera tiene una longitud que duplica la longitud de la lana que recubre la base. Es decir, el material necesario para recubrir la semiesfera es el doble del material requerido para recubrir su base. Por consiguiente,

$$A(\textsf{semiesfera}) = 2 \cdot A(\textsf{círculo-diametral}) = 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

por tanto

$$A(\textsf{esfera}) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Volumen de la Esfera.

Para determinar el volumen de la semiesfera es fundamental que para los estudiantes sea claro que una esfera se puede descomponer en un número muy grande de pequeñas pirámides de vertice común tal como muestra la figura 10. (Obonaga, 1996).

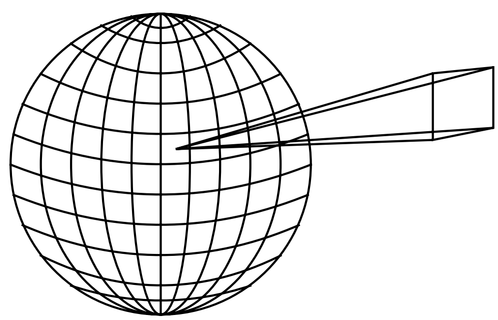


Fig. 10.

Generalmente, cuando lo estudiantes han hecho el proceso de descomposición del prisma y la pirámide, ellos pueden predecir la forma piramidal de los casquetes que forman la esfera. Así se puede establecer que la esfera E se puede descomponer en las pirámides $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ las cuales tienen como vértice común el centro de la esfera y como radio de la misma. Las áreas de las respectivas bases $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. De este modo se tiene que:

$$\begin{aligned}
V(E) &= V(E_1) + V(E_2) + V(E_3) + \cdots + V(E_n) \\
&= \frac{1}{3}A_1 \cdot r + \frac{1}{3}A_2 \cdot r + \frac{1}{3}A_3 \cdot r + \cdots + \frac{1}{3}A_n \cdot r \\
&= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n) \cdot r \\
&= \frac{1}{3}(4 \cdot \pi \cdot r^2) \cdot r \\
&= \frac{4}{3}\pi \cdot r^3
\end{aligned}$$

Ventajas de la Propuesta.

Esta propuesta de enseñanza de las fórmulas de volumen de los sólidos elementales está de acuerdo con la teoría piagetiana, en el sentido de ir de lo concreto a lo abstracto, pues cada vez que se procede a la obtención de una fórmula, el alumno realiza previamente una actividad concreta que le permite visualizar las ideas fundamentales en las cuales se basa el razonamiento que permitirá encontrarla.

Además, es una estrategia que deja ver claramente la intención de construir el concepto, y luego pasar a representarlo simbólicamente. Por ejemplo, para tomar sólo un caso, el alumno se da cuenta a través de un modelo en plastilina que todo prisma se puede descomponer en un número finito de prismas triangulares, para luego escribir la correspondiente expresión simbólica que le permitirá deducir con facilidad la fórmula del volumen del prisma.

Es también una estrategia que reivindica el papel del maestro como un guía, que puede brindarle al alumno la ayuda que requiere para asimilar un concepto o procedimiento. En este sentido, comparte la idea de que existe un momento en la enseñanza, en el que el profesor o alguna otra persona necesitará intervenir en el proceso protagonizado por el alumno para introducir primeramente un lenguaje apropiado, luego para contribuir a aclarar el pensamiento y después para introducir el simbolismo. (Orton, 1996)

Esta propuesta responde adecuadamente al problema según el cual "las dificultades que los niño tienen en la comprensión del volumen, es debido que son forzados a leer y visualizar información sobre objetos sólidos a partir de gráficos sin haber manipulado dichos objetos" (Olmo, 1989). En este sentido, la estrategia exige que los estudiantes construyan diferentes sólidos en plastilina (y recomienda el uso de otros materiales), antes de hacer afirmaciones y razonamientos a partir de estos.

Además es una propuesta que se inspira y fortalece en la idea de Freudenthal, quien recomienda hacer transformaciones de "romper y rehacer" como una alternativa que facilita la comprensión del concepto de volumen y la construcción de las fórmulas de los sólidos elementales. Por tanto, es una propuesta que continúa de manera natural con el procedimiento de "romper y rehacer" utilizado para obtener el área de regiones planas.

En síntesis es una propuesta que le brinda la posibilidad al alumno de construir las fórmulas de volumen, bajo la orientación del maestro, de un modo significativo, formativo y práctico. Es significativo y práctico porque le permite al estudiante hacer uso de los conceptos que posee para construir otros. Por ejemplo, para obtener el volumen de la esfera, el alumno utiliza el volumen de la pirámide y el hecho de que la esfera se puede descomponer aproximadamente en un número determinado de pirámides de vértice común. También es una propuesta formativa, ya que no se queda en los aspectos intuitivos que nacen de la manipulación concreta, sino que formaliza esas ideas expresándolas en un lenguaje simbólico. Así, con esta propuesta se quiere evitar que las fórmulas de volumen aparezcan de manera espontánea o que se introduzcan a través de justificaciones incompletas. Sólo así se logrará que los estudiantes hagan uso comprensivo de las mismas.

Bibliografía.

[1] Abrantes, P. (1996) *El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular.* Uno; Revista de Didáctica de las Matemáticas. Vol. 8; pag. 7-18.

[2] Bruño, G. (1958) *Geometría Curso superior.* Medellín, Bedout.

[3] Clemens, O. (1998) Geometría. Estado de México, Prentice Hall.

[4] Olmo, M. (1989) *Superficie y Volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?.* Madrid, Síntesis.

[5] Obonaga, E. (1996) *Matemática 7.* Bogotá, Migema.

[6] Orton, A. (1996) *Didáctica de las matemáticas.* Madrid, Morata.