Razonamiento y Estrategias en la Transición a la Generalización en un Problema de Combinatoria

María C. Cañadas y Lourdes Figueiras

Describimos el proceso seguido por estudiantes de 11 y 12 años para descubrir patrones de conteo en un problema básico de combinatoria. Hacemos énfasis en la transición de las estrategias manipulativas para el conteo directo a la generalización. En esta transición hubo estudiantes que utilizaron, de forma espontánea, diagramas de árbol; y otros estudiantes que recurrieron a estrategias comunes en pensamiento numérico. Resaltamos el interés de resolver problemas de combinatoria sin haber aprendido fórmulas previas para que los estudiantes den significado a la regla del producto y relacionamos los resultados obtenidos con aspectos didácticos de la multiplicación en educación primaria.

Términos clave: Combinatoria; Diagrama de árbol; Estrategias manipulativas; Generalización; Razonamiento inductivo; Regla del producto

Reasoning and Strategies in the Transition to Generalization in a Combinatorial Problem

We describe the procedure used by 11-12 years old students to discover counting patterns in basic combinatory problems. We emphasize the transition from manipulative strategies for direct counting to generalization. In this transition, there were students who spontaneously used tree diagrams of mathematical ideas and some students used numerical thinking strategies. We highlight the interest of solving combinatory problems in order to let the students make sense of the multiplication rule. We relate the results to the teaching of multiplication in primary school.

Keywords: Combinatory; Generalization; Inductive reasoning; Manipulative strategies; Product rule; Tree diagram

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2010). Razonamiento y estrategias en la transición a la generalización en un problema de combinatoria. *PNA, 4*(2), 73-86.

El tratamiento de la combinatoria se restringe, en muchos casos, al uso de fórmulas que limitan el desarrollo de razonamientos. Las investigaciones de English (1991) y Fischbein y Gazit (1988) ponen de manifiesto el interés de los procesos de razonamiento de los estudiantes en la resolución de problemas combinatorios y sus implicaciones didácticas. Cuando se realizaron tales investigaciones, la teoría piagetiana avalaba su relevancia para la psicología cognitiva, en tanto que para esta teoría, la combinatoria representa una componente fundamental del razonamiento. Actualmente, el creciente interés por la matemática discreta vuelve a impulsar la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de tales contenidos, como se puso de manifiesto en el 11th International Congress on Mathematical Education. Por ejemplo, Hußmann (2008) y Spira (2008) se centran en la resolución de problemas, la toma de decisiones y el uso del razonamiento en la matemática discreta, como se demanda en la actualidad y, en particular, para el logro de la competencia matemática (Boletín Oficial del Estado, 2007; Rico y Lupiáñez, 2008, p. 186).

Investigaciones previas relacionadas con esta reflexión se han centrado en los primeros años de la educación y, por tanto, las estrategias que emergen son principalmente manipulativas (Empson y Turner, 2006; English, 1991; Steel y Funnell, 2001). En este artículo, utilizamos un problema básico de combinatoria para analizar las actuaciones de estudiantes que se encuentran al comienzo de la educación secundaria. Buscamos estudiar cómo estos estudiantes utilizan sus conocimientos previos para desarrollar estrategias que, yendo más allá de lo manipulativo, utilizan desde la enumeración de casos hasta la generalización.

De las aportaciones didácticas extraídas del trabajo de Fischbein y Gazit (1988) se desprende una fuerte componente instruccional en relación con la utilización de los diagramas de árbol. En este artículo pretendemos indagar sobre este hecho, destacando el papel que juegan estos diagramas en la transición de lo particular hacia lo general.

Marco Teórico

Estructuramos las aportaciones teóricas que se toman en cuenta en esta investigación de acuerdo con tres ámbitos fundamentales: problemas de estructura multiplicativa, combinatoria y generalización.

Significado de la Multiplicación y Problemas de Estructura Multiplicativa

Mullingan y Mitchelmore (1997) identifican tres modelos intuitivos para la multiplicación: (a) conteo directo, (b) adición repetida y (c) operación de multiplicación. Dickson, Brown y Gibson (1991, p. 291) afirman que muchos de los procedimientos de cálculo de invención propia se basan en técnicas de cálculo mental e identifican los siguientes modelos para la multiplicación: (a) suma repetida, (b) producto cartesiano y (c) razón. Estos trabajos justifican, entre otros, que el significado de la multiplicación que se promueve en educación primaria esté relacionado con la idea de suma repetida, el producto cartesiano y la formación de grupos (VanDenHeuvel-Panhuizen, 2001). En el contexto de la resolución de problemas, se consideran problemas de estructura multiplicativa aquellos que se resuelven con una multiplicación o una división (Castro y Castro, 2001; Greer, 1992).

Combinatoria y Producto en Situaciones Manipulativas

Cuando la combinatoria se atiende de manera explícita durante la educación primaria, suele hacerse utilizando materiales manipulativos. English (1991) investigó las dificultades de niños hasta 12 años en la resolución de problemas combinatorios, profundizando en las estrategias utilizadas. Identificó que las estrategias (todas ellas manipulativas) variaban según la edad y que el conteo fue la técnica subyacente. De manera análoga, otros modelos asociados a la multiplicación, como la suma repetida o el producto cartesiano, se introducen en situaciones manipulativas con diferentes recursos didácticos (Empson y Turner, 2006). El tamaño de los números permite identificar diferentes estrategias en problemas que ponen de manifiesto la comprensión del concepto de multiplicación (Steel y Funnell, 2001).

Se suele considerar que la utilización de los diagramas de árbol indica una maduración en las estrategias de conteo. Fischbein y Gazit (1988) detectan que estudiantes de 10 años pueden entender el diagrama de árbol, ayudándoles a pasar a una fórmula de manera natural en casos sencillos de ordenaciones, pero no de combinaciones. Este hecho sugiere que en la instrucción no conviene utilizarlo como única herramienta para resolver problemas de combinatoria.

Generalización

En este trabajo, seguimos la idea de generalización de Pólya (1945), considerándola una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos y se detecta y se sistematiza una regularidad. Es, por tanto, equivalente a lo que Dörfler (1991) llama *generalización empírica*[1]. La generalización, desde esta perspectiva, es parte de un proceso inductivo más amplio, de reconocida importancia para la adquisición de conocimiento matemático y que ayuda a la comprensión de relaciones matemáticas.

Para la descripción del proceso de razonamiento inductivo, Cañadas y Castro (2007) proponen un modelo en un contexto de resolución de problemas que incluye la generalización. Este modelo está compuesto por siete pasos que, comenzando por el trabajo con casos particulares y, pasando por la organización de los mismos y la identificación del patrón, entre otros, llegan a la generalización. Estos pasos han sido útiles para describir procesos inductivos en los que la formulación de conjeturas es clave en diferentes problemas y contextos (Cañadas, Deu-

[1] Dörfler (1991) distingue entre dos tipos de generalizaciones: generalización empírica y generalización teórica.

lofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov, 2008). La organización de la información se presenta como un paso útil en el proceso de generalización como herencia del papel que puede jugar la visualización en la resolución de problemas ya que el repertorio visual de cada uno puede ponerse al servicio de la resolución de problemas de forma provechosa e inspirar soluciones creativas (Arcavi, 2003).

La mayoría de los trabajos relacionados con los procesos inductivos y la generalización suelen contextualizarse en secuencias numéricas y configuraciones geométricas. Destacamos el trabajo de Abramovich y Pieper (1996) por trabajar con problemas relacionados con la combinatoria, mostrando cómo los estudiantes llegan a la obtención de fórmulas generales a partir del trabajo con casos particulares.

Objetivos de Investigación

El objetivo general es describir cómo los estudiantes abandonan estrategias manipulativas y las reemplazan por otras estrategias abstractas que los guían hacia la generalización. Este objetivo general se desglosa en dos objetivos específicos:

- ♦ Caracterizar las estrategias que utilizan los estudiantes para la resolución de un problema de combinatoria sin conocer fórmulas y que requiere cierta generalización.
- ♦ Evaluar si los estudiantes identifican la regla del producto como técnica de conteo en situaciones de independencia.

Metodología

El estudio se realizó con 25 estudiantes de 11 y 12 años participantes en el Proyecto ESTALMAT Cataluña. El objetivo principal de este proyecto es “detectar, orientar y estimular el interés de estudiantes que se sienten especialmente atraídos por la belleza, la profundidad y la utilidad de las matemáticas” (Hernández y Sánchez, 2008, p. 116).

Los estudiantes que participaron en el Proyecto ESTALMAT se seleccionaron a partir de una prueba de resolución de problemas de contenido matemático variado y de entrevistas dirigidas a conocer su interés por participar. Se seleccionó a los que manifestaron una buena aptitud y actitud hacia las matemáticas. No eran necesariamente estudiantes superdotados. Sí podemos afirmar que las sesiones se desarrollaron en condiciones óptimas por la implicación e interés de los estudiantes por la actividad.

En este artículo, nos centramos en el trabajo que realizaron los estudiantes en su primera sesión de trabajo dentro del Proyecto ESTALMAT Cataluña. Los estudiantes no habían trabajado la combinatoria e iniciaban tres sesiones dedicadas a ella, con el objetivo de razonar y deducir técnicas de recuento, e indagar sobre la regla del producto. Los estudiantes debían escribir todos sus razonamientos.

En este trabajo nos centramos en el análisis del primer problema de conteo que introducía la sesión y que nos ofrece información concreta sobre el uso de los diagramas de árbol.

Problema Propuesto

La Figura 1 muestra el problema que planteamos a los estudiantes. Nosotras les facilitamos las fichas a las que hace referencia.

Con las fichas que tenéis en la mesa, podéis formar diferentes animales. (Hay un total de 48 fichas: 16 cabezas, 16 cuerpos y 16 colas)

¿Cuántos animales diferentes podéis formar?

Figura 1. Problema planteado a los estudiantes

Recogimos las producciones escritas de todos los estudiantes, así como las notas que una de las investigadoras tomó durante el desarrollo de la actividad con el objetivo de llevar a cabo un análisis de casos seleccionados del total de la población.

Se elaboró un primer instrumento de vaciado de datos que aportó información cuantitativa descriptiva sobre la pregunta que planteaba el problema y permitió una selección posterior de los casos. En este primer paso únicamente se consideró si el problema era resuelto correctamente o no y si en las soluciones correctas se hacía uso de la regla del producto de manera inmediata. Los casos que después resultaron interesantes para el análisis fueron aquellos que correspondieron a los estudiantes que resolvieron el problema correctamente pero no hicieron uso de manera inmediata de dicha regla.

Para responder a nuestros intereses, nos centraremos en los estudiantes que iniciaron la resolución del problema de manera manipulativa. El hecho de que en un grupo más o menos homogéneo en términos de edad, interés y rendimiento hacia las matemáticas, una mayoría de estudiantes haya utilizado de forma inmediata la regla del producto como herramienta de conteo nos permitió suponer que quienes aún no lo hacían estaban en el proceso de consolidarla. Este hecho justifica porqué los casos seleccionados fueron considerados especialmente relevantes para nuestra investigación.

ESTUDIO DE CASOS Y RESULTADOS

Un total de 20 estudiantes respondieron directamente a la tarea, expresando la solución como producto ($16 \times 16 \times 16$) o como potencia (16^3). Según las notas de las investigadoras, al inquirir sobre el proceso para llegar a esa multiplicación, todos los estudiantes encontraron "evidente" su respuesta, por lo que no se requirió explicación adicional. Centramos nuestro trabajo en la descripción y análisis de los 5 estudiantes restantes.

Para cada uno de los cinco casos seleccionados, el proceso de razonamiento de los estudiantes se observó siguiendo los pasos del razonamiento inductivo (organización de casos particulares, identificación de un patrón, generalización).

Caso E1

El estudiante E1 comenzó con estrategias manipulativas y representó todos los elementos que intervienen en el problema (48). Trató de representarlos de manera organizada y siguiendo el orden que impone el problema. Utilizó un diagrama de árbol con ramas de colores para organizar los resultados (ver Figura 2).

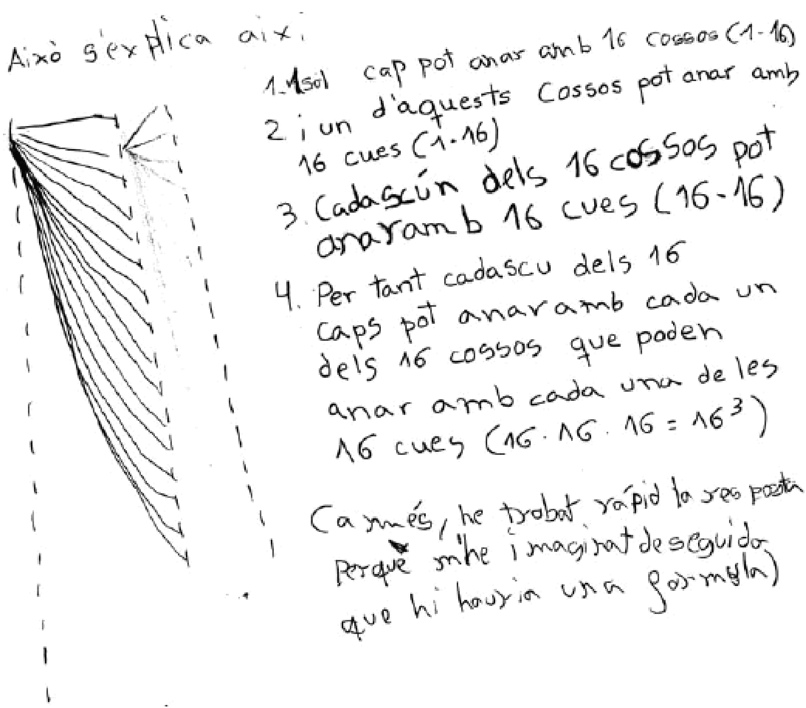


Figura 2. Diagrama de árbol del estudiante E1

El estudiante escribió el texto numerado utilizando diferentes colores. El texto de un color determinado se correspondía con la rama del diagrama a la que hacía referencia el texto en la que había utilizado el mismo color[2].

En la Figura 2 se observa que el estudiante E1 fijó una primera ficha para la cabeza del animal y cubrió todas las opciones posibles de ésta con todas las posibilidades de la segunda parte del animal. Para las dos primeras fichas de esta segunda parte del animal, representó todas las opciones. Cuando el número de casos particulares era excesivo, recurrió a estrategias de generalización. Para ello, resolvió un problema más sencillo, el correspondiente a que el animal estuviera formado por dos elementos, y extrapoló para el problema presentado. El estudiante E1 expresó 16 (posición 2) × 16 (posición 3) × 16 (posición 1), siguiendo el orden reflejado en el diagrama de árbol. Finalmente, el estudiante E1 llevó a cabo un importante ejercicio de simbolización al formular su patrón algebraicamente (ver Figura 3).

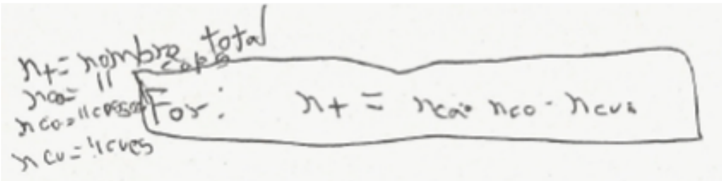


Figura 3. Expresión simbólica del patrón del estudiante E1

Caso E2

El estudiante E2 comenzó el problema tratando de resolver otro más sencillo, reduciendo las 16 fichas a 3. Utilizó un diagrama de árbol para representar todas las posibilidades siguiendo el orden que impone el problema (ver Figura 4). Esta representación le permitió el recuento de todas las posibilidades (27) y, posteriormente, expresó 3^3. Extrapoló la respuesta para el problema, calculando 16^3.

---

[2] Traducción a cargo de las autoras (la cursiva no estaba presente en la resolución del estudiante):
Eso se explica así:
1. Una sola cabeza puede ir con 16 cuerpos (1·16).
2. Y uno de estos cuerpos puede ir con 16 colas.
3. Cada uno de los 16 cuerpos puede ir con 16 colas (16·16).
4. Por tanto cada una de las 16 cabezas puede ir con cada una de los 16 cuerpos que pueden ir con cada una de las 16 colas (16 × 16 × 16 = 16^3).
Además, he encontrado rápido la respuesta porque me he imaginado enseguida que habría una fórmula.

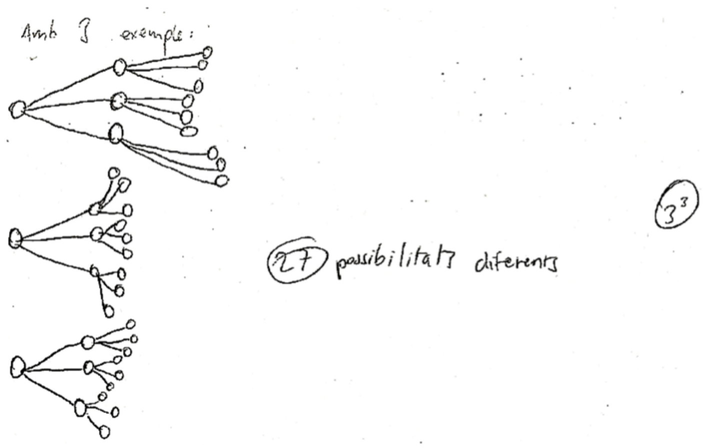


Figura 4. Diagrama de árbol del estudiante E2

Caso E3

El estudiante E3 operó directamente sobre la totalidad de fichas de cada elemento y lo identificó como problema de estructura multiplicativa. Conjeturó dos soluciones posibles: 16×3 y 16^3 (ver Figura 5).

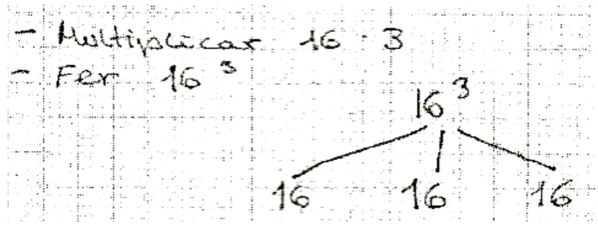


Figura 5. Identificación de estructura multiplicativa del estudiante E3

El estudiante E3 se basó en el diagrama de la Figura 5 para decidir cuál de las hipótesis era. Concluyó que 16×3 no podía surgir de una representación en diagrama de árbol pero que el diagrama sí se utiliza para representar 16^3 (Figura 6).

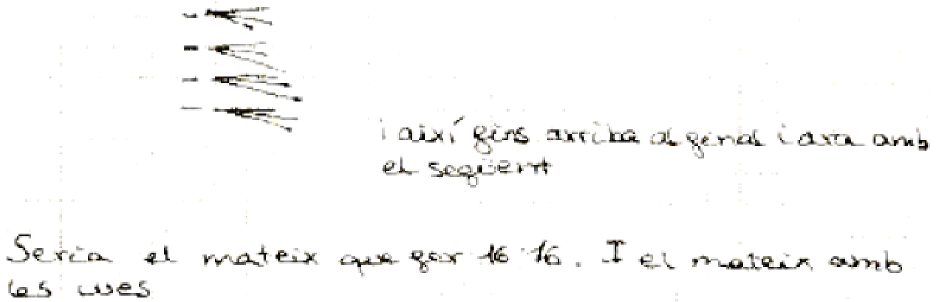


Figura 6. Identificación de estructura adecuada

El estudiante E3 necesitó además refutar la primera conjetura para finalizar. Para ello, intentó nuevamente dar significado a la operación 16×3 en el contexto del problema. "El 3 son las partes que tienen, pero no tienen relación" (ver Figura 7), sugiriendo que el patrón multiplicativo que responde a una suma repetida 3 veces no se ajusta al problema.

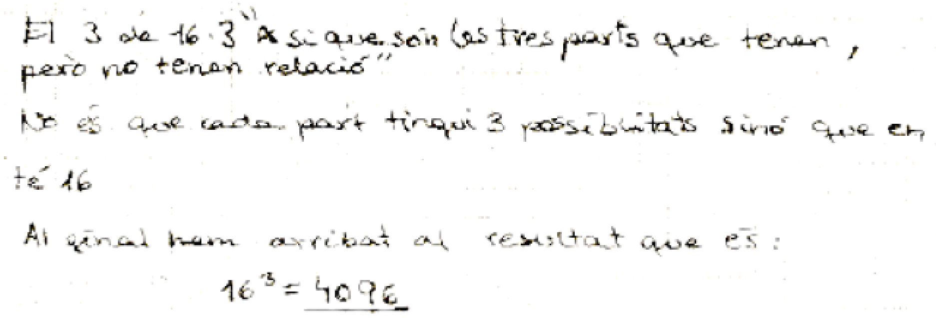
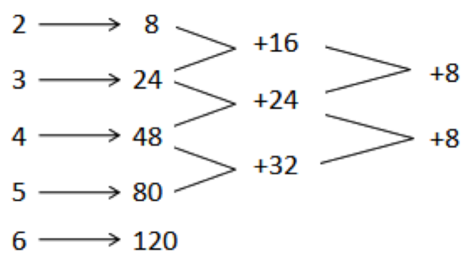

El 3 de 16·3 "sí que són les tres parts que tenen, però no tenen relació"
No és que cada part tingui 3 possibilitats sinó que en té 16
Al final hem arribat al resultat que és:
$16^3 = 4096$

Figura 7. Identificación de patrón adecuado del estudiante E3[3]

Caso E4

El estudiante E4 utilizó la estrategia de resolver un problema más sencillo, calculando de forma rápida el número de animales para 2 o 3 fichas por elemento. A continuación, transcribimos la información más significativa del trabajo del estudiante E4.

> *... con dos animales... el resultado es 8. Hemos supuesto que contando 8 por cada dos grupos sería 24.*



> *Después he visto que eso no era posible, porque cuando hemos probado el número de combinaciones con tres animales eran 27 y no 24. Entonces, la hipótesis de que para cada animal teníamos que sumar cada vez 8 a la diferencia era falsa... he observado que dos animales con resultado 8 era igual a 2^3, o sea, el número de animales elevado al número de partes de cada animal, o sea, 3. Y 2^3 es 8... he observado que dos ani-*

---

[3] Traducción a cargo de las autoras (la cursiva no estaba presente en la resolución del estudiante):
Y así hasta el final y ahora con el siguiente. Sería lo mismo que hacer 16·16. Y lo mismo con las colas.
El 3 de 16·3 'sí que son las tres partes que tienen, pero no tienen relación'. No es que cada parte tenga 3 posibilidades, sino que tiene 16. Al final hemos llegado al resultado que es 163=4096.

> *males con resultado 8 era igual a 2^3, o sea, el número de animales elevado al número de partes de cada animal, o sea, 3. Y 2^3 es 8. Eso explica por qué nos ha salido 27... Si eso lo aplicamos a 16 nos sale 16* [número de animales] *elevado a 3* [número de piezas de cada animal]*, o sea 16^3 = 4096.*

El estudiante E4 comenzó organizando los casos particulares y, al incrementar el número de fichas, consideró la segunda diferencia constante e igual a 8. Así obtiene el número de animales que obtendría para 2, 3, 4, 5 y 6 fichas de cada elemento. Rechazó su conjetura al manipular las fichas para el caso de tener 3 fichas para cada elemento y obtener 27 opciones (y no 24). A partir de los casos particulares con 2 y con 3 fichas por elemento, detectó el patrón "elevar al cubo el número de elementos de cada parte". Realizó todo el proceso en el sistema de representación numérico.

Caso E5

El estudiante E5 calculó que con dos piezas para cada parte obtenía 8 opciones, conjeturó que para 3 piezas se obtendrían 24 animales, y así sucesivamente (ver Figura 8). Tras comprobar con otros casos particulares que esa conjetura era falsa, la rechazó. Se centró en resolver un problema más sencillo numéricamente, de 2 o 3 fichas de cada elemento.

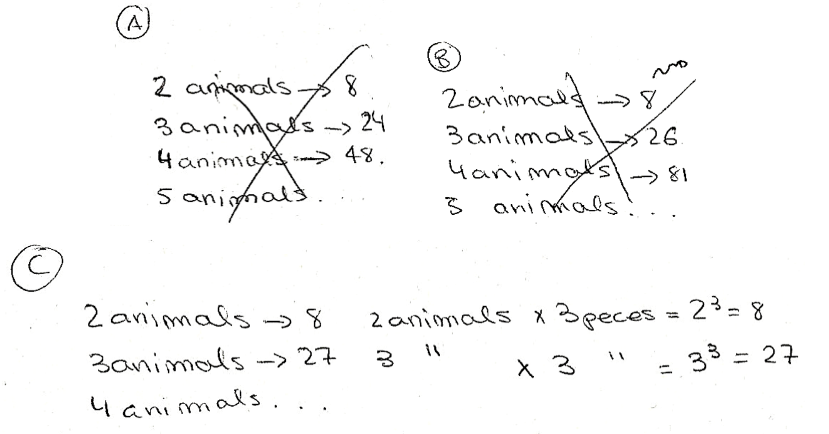


Figura 8. Trabajo y organización de casos particulares del estudiante E5

Para 2 fichas por elemento, expresó 8 como $3^2 - 1$. Comprobó, con otros casos particulares, que era falsa y la rechazó. Finalmente formuló una nueva conjetura (2^3). La consideró válida, comprobando con los casos particulares con los que había trabajado. De nuevo, todo el proceso se desarrolló numéricamente.

Resumen de Resultados

En 3 de los 5 casos analizados (E1, E2 y E3) y en algún momento de su razonamiento, la representación mediante diagrama de árbol resultó clave para determinar un patrón multiplicativo. Por otro lado, los estudiantes E4 y E5 recogieron casos particulares numéricamente y trabajaron con ellos de manera organizada para la identificación de un patrón.

Recogemos en la Figura 9, de arriba abajo, el resumen del proceso de razonamiento inductivo que siguieron los estudiantes en sus explicaciones. Los cuadros sombreados se refieren a pasos del razonamiento inductivo considerados en el modelo. En el resto de los cuadros hemos recogido las acciones que realizaron dentro de cada paso, especificando los estudiantes que las realizaron e indicando con las flechas el sentido en el que las efectuaron.

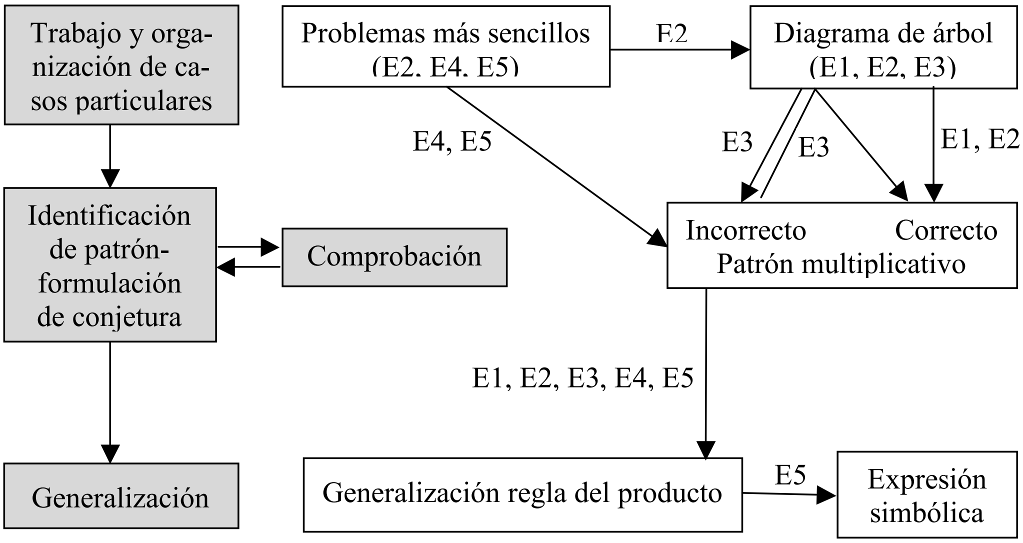


Figura 9. Proceso de razonamiento

Aunque solamente se puede constatar que el estudiante E1 logró una expresión algebraica para la regla del producto, consideramos que los cinco estudiantes alcanzaron la generalización (generalización empírica en términos de Dörfler) porque el proceso que siguieron a partir del trabajo con casos particulares para llegar al cálculo de la solución para los 16 elementos es válido para cualquier número de elementos.

DISCUSIÓN

Los estudiantes que participaron en este estudio dieron a la multiplicación un significado diferente de los que se suelen considerar para la multiplicación en educación primaria en un problema básico de combinatoria. El producto cartesiano, en ocasiones, aparece en los niveles básicos para la resolución de problemas de enumeración y conteo bidimensionales. Pero no es evidente que su utilización potencie la generalización de la regla, tal y como había sido detectado por Fernández (2008) en su comparación sobre el modo en que estudiantes de educación primaria y estudiantes de bachillerato abordan un mismo problema de combinatoria básico. Con el tipo de problema presentado, los estudiantes pueden poner de manifiesto el significado de la operación aritmética producto, que puede ser útil como base para desarrollar fórmulas de cálculo.

Los resultados nos hacen poner en tela de juicio el resultado de Fischbein y Gazit (1988) sobre la necesidad de instruir de forma temprana en la utilización de diagramas de árbol para generalizar resultados. Que 20 de los 25 estudiantes utilizaran la regla del producto de forma directa, sin haberles presentado los diagramas de árbol, nos hace reflexionar sobre la utilidad de su instrucción frente al trabajo en resolución de problemas en los este diagrama pueda ser útil para algunos estudiantes. El trabajo de los estudiantes en el problema propuesto muestra que los diagramas de árbol, en mayor o menor grado, permiten organizar los casos particulares e identificar la regla del producto y pueden aparecer de manera espontánea en diferentes partes de la resolución.

No ponemos en duda que la instrucción deba garantizar el reconocimiento del diagrama de árbol para generar algoritmos de enumeración y recuento pero podemos sugerir que la instrucción sea posterior al inicio del estudiante en la resolución de problemas de combinatoria. En esta investigación se han identificado dos usos de los diagramas de árbol: (a) organización de la información que les facilita la formulación de la generalización posterior (E1 y E2) y (b) organización de la información para comprobar una generalización (E3). En los tres casos, el diagrama de árbol les ha permitido abandonar estrategias manipulativas sin necesidad de realizar cálculos adicionales, por lo que conjeturamos que estos tres estudiantes podían estar más avanzados en su proceso de razonamiento inductivo, dado que éste era el proceso cognitivo subyacente en los cinco casos presentados.

Este trabajo corrobora la no linealidad del modelo de razonamiento inductivo empleado y sirve como aproximación a la utilización del mismo en la resolución de problemas que involucran un contenido matemático diferente a los tratados en trabajos anteriores (Cañadas y Castro, 2007; Cañadas et al., 2008).

Agradecimientos
Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto del plan nacional de i+D+I con referencia SEJ2006-09056, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER; y en el marco del proyecto EDU2009-07298 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación y del plan de actuación del grupo de investigación consolidado PREMAT (2009SGR364) de la Generalitat de Cataluña.

Referencias

Abramovich, S. y Pieper, A. (1996). Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computing technology. *The Mathematics Educator, 7*(1), 4-12.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Boletín Oficial del Estado (2007). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de Julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria (Vol. BOE nº 173, pp. 31487-31566). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Figueiras, L., Reid, D. y Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 431-444.

Castro, E. y Castro, E. (2001). El proceso de investigación. Un ejemplo. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 79-88). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia y Labor.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Empson, S. B. y Turner, E. (2006). The emergence of multiplicative thinking in children's solutions to paper folding tasks. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 46-56.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*(5), 451-474.

Fernández, C. S. (2008). *Identificación y caracterización de diferencias entre alumnos de sexto de primaria y primero de bachillerato*. Tesis de máster no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 193-197.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York, NY: Macmillan.

Hernández, E. y Sánchez, M. (2008). ESTALMAT: un programa para estimular y estimular el talento matemático precoz. *Unión, 16*, 113-122.

Hußmann, S. (2008). Doing mathematics-authentically and discrete. A perspective for teacher training. *Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, México.

Mullingan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (1997). Young childrens' intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Spira, M. (2008). *The bijection principle on the teaching of combinatorics*. Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, México.

Steel, S. y Funnell, E. (2001). Learning multiplication facts: A study of children taught by discovery methods in England. *Journal of Experimental Child Psychology, 79*(1), 37-55.

VanDenHeuvel-Panhuizen, M. (2001). *Children learn mathematics*. Utrecht, Holanda: Freudenthal Institute.

Este documento se publicó originalmente como Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2008). Razonamiento en la transición de las estrategias manipulativas a la generalización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds), *Actas del XIII simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 161-172). Santander, España: SEIEM y Universidad de Cantabria.

María C. Cañadas
Universidad de Granada
mconsu@ugr.es

Lourdes Figueiras
Universitat Autònoma de Barcelona
Lourdes.Figueiras@uab.cat