¿Cómo Trabajar los Límites Especiales $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{sen(x)}{x}=1$ y $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$?

Catalina Navarro y Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN
México
nasacamx@yahoo.com.mx, rcantor@cinvestav.mx
Pensamiento Variacional – Nivel Superior

Resumen

De acuerdo a la costumbre didáctica los límites $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{sen(x)}{x}=1$ *y* $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$, son abordados en el curso de cálculo diferencial e integral, se comienza desde el nivel medio superior, donde la matemática es considerada como elemental según los propios maestros, en el que afirman que regularmente no se tratan en clase debido a la complejidad que representan las demostraciones. En este artículo mostramos una forma diferente a la usual para abordar los límites especiales referidos, en la que se inicia con el estudio de algunas características visuales entre las gráficas de las funciones algebraicas y las trigonométricas.

Introducción

Nuestra intención con este escrito es la de familiarizar al lector con las transformaciones y operaciones gráficas que suelen usarse para graficar a las funciones algebraicas y a las funciones trigonométricas, dado que en la enseñanza tradicional al estudiar el tema funciones, se trabajan primero las funciones algebraicas para posteriormente tratar con las funciones trigonométricas de forma que se induce la idea de que ambos tipos de funciones son independientes unas de otras. Por lo que al trabajar con límites que involucran la combinación de funciones algebraicas y trigonométricas que es el caso de los límites especiales que presentamos, notamos que la confusión aumenta dado que de inicio se creyó que no había relación alguna entre dichos tipos de funciones, de tal manera que al trabajar con los límites especiales regularmente responden que ambos límites son indefinidos, de ahí el interés de nosotros por mostrar una forma original de abordar los límites especiales en los que consideramos características comunes existentes entre los dos tipos de funciones así como también considerar las operaciones básicas gráficas entre ellas.

Transformaciones Gráficas de Funciones Algebraicas y Trigonométricas.

Comenzaremos trabajando funciones algebraicas y trigonométricas, para las primeras consideraremos las funciones prototipo $f(x)=x,\ f(x)=x^2\ y\ f(x)=x^3$ y para las ultimas tomaremos como funciones prototipo a $f(x)=sen\ (x)$ y $f(x)=cos\ (x)$, en las que aplicaremos algunas transformaciones gráficas como $f(x)+B$, $f(x)-B$, $f(x+\mathrm{C})$, $f(x-\mathrm{C})$, $\mathrm{A}f(x)$, $-\mathrm{A}f(x)$,

$\frac{1}{\mathrm{A}}f(x)$, $\frac{1}{-\mathrm{A}}f(x)$, $f(\mathrm{A}x)$ y $f(-\mathrm{A}x)$. Al desarrollar esta parte, es importante trabajar todas funciones prototipo aplicando todas las transformaciones gráficas, en este artículo nosotros consideraremos sólo alguna función prototipo (considerando una algebraica y una trigonométrica) en la que aplicaremos alguna transformación gráfica, con el propósito de localizar las características gráficas existentes comunes entre las algebraicas y las trigonométricas.

Tomando como base a las funciones $f(x)=x^2$ y $f(x)=sen(x)$ les que aplicamos las transformaciones *f*(*x*)+*B* y *f*(*x*)-*B* para obtener la siguiente gráfica.

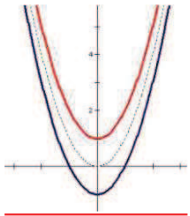


Figura 1

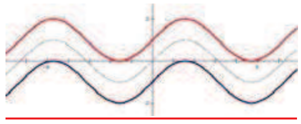


Figura 2

Donde observamos que el parámetro B produce un traslado de las gráficas sobre el eje *y*, es decir, si el signo del parámetro B es positivo las gráficas se trasladan en la dirección creciente del *y*, si el parámetro B es negativo las gráficas se trasladan hacia abajo. Consideremos ahora a las funciones prototipo $f(x)=x^3$ y $f(x)=\cos(x)$ a las que les aplicaremos la transformación $f(x+\mathrm{C})$, $f(x-\mathrm{C})$, gráficamente observamos lo siguiente

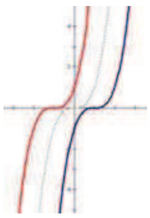


Figura 3

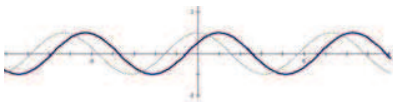


Figura 4

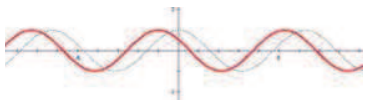


Figura 5

el parámetro C traslada a las gráficas sobre el eje *x*, más específicamente si el parámetro C tiene signo positivo las gráficas se trasladan sobre la parte negativa del eje *x*, si el parámetro C tiene signo negativo las gráficas se trasladan sobre la parte positiva del mismo eje.

Tomemos las funciones $f(x)=x^3$ y $f(x)=sen(x)$ a las que les aplicaremos la transformación $\mathrm{A}f(x)$, $-\mathrm{A}f(x)$, $\frac{1}{\mathrm{A}}f(x)$ y $\frac{1}{-\mathrm{A}}f(x)$ (donde A no toma los valores del intervalo (-1, 1)) gráficamente observamos lo siguiente

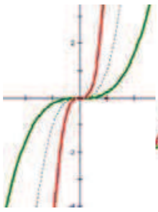


Figura 6

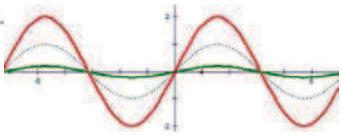


Figura 7

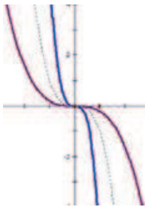


Figura 8

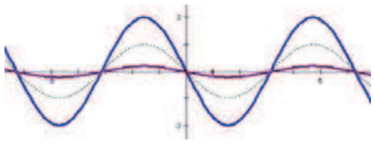


Figura 9

Si consideramos valores positivos y mayores que 1 (figuras 6 y 7), para $\mathrm{A}f(x)$ y $\frac{1}{\mathrm{A}}f(x)$ tenemos que para la primera, las alturas de las gráficas transformadas son más grandes que las respectivas alturas de la función prototipo mientras que para la otra transformación las alturas de las gráfica son menores a las alturas de la misma función, si ahora abordamos las transformaciones $-\mathrm{A}f(x)$ y $\frac{1}{-\mathrm{A}}f(x)$ donde A toma valores mayores a uno, partiendo de la gráfica prototipo observamos que esta se invierte, es decir, en donde la gráfica tenia alturas positivas ahora tendrá alturas negativas y viceversa, por lo que en las gráficas de las figuras 8 y 9 tenemos que las alturas de las gráficas transformadas cumplen las mismas características que en las transformaciones anteriores con la diferencia de que ahora se trabaja con viceversaciones. De acuerdo a lo anterior, partiendo de las funciones prototipo a las que podemos transformar de la siguiente manera: para las funciones algebraicas $f(x)=A(x+B)$, $f(x)=A(x+B)^2+D$ y $f(x)=A(x+B)^3+D$, para las funciones trigonométricas $f(x)=Asen(Cx+B)+D$ y $f(x)=A\cos(Cx+B)+D$, de donde podemos generalizar de la siguiente manera: el signo del parámetro A determina la inversión o la "NO" inversión de la gráfica, mientras que el valor del mismo parámetro determina si la grafica se acerca o se aleja del eje *x*. Sobre el parámetro B, éste determina si la gráfica se desplaza a la izquierda o derecha del eje *x*. El parámetro D determina desplazamientos sobre el eje *y*. Sobre el parámetro C que se observa en las funciones trigonométricas transformadas, éste afectará la amplitud de las funciones trigonométricas.

Operaciones Gráficas entre Funciones Algebraicas y Trigonométricas

En esta parte del escrito trataremos operaciones gráficas entre funciones algebraicas y trigonométricas en las que consideramos las gráficas prototipo y las transformadas, además de involucrar las operaciones básicas de la suma, resta, multiplicación y la división. Es importante primero familiarizar al estudiante con las funciones algebraicas, es decir, trabajar de inicio solamente con funciones algebraicas en las que se apliquen transformaciones gráficas así como desarrollar operaciones básicas gráficas entre el mismo tipo de función, posteriormente abordar a las funciones trigonométricas a las cuales al igual que a las funciones algebraicas, aplicar las transformaciones gráficas y desarrollar operaciones básicas gráficas para finalmente trabajar la combinación de las funciones mencionadas. Por ejemplo, comencemos trabajando con funciones algebraicas.

Multiplicar las siguientes funciones $f(x)=x,\ g(x)=(x-2)\ y\ h(x)=(x+2)$ gráficamente

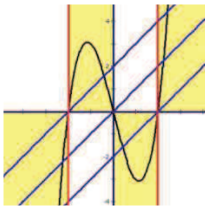


Fig. 10

Primeramente ubicamos los puntos donde las funciones dadas cortan al eje *x*, posteriormente analizamos las alturas de las mismas funciones por intervalos, es decir, en el intervalo $(-\infty,-2)$ las alturas de las funciones son negativas por lo que la nueva función en este intervalo será negativa, en el intervalo (-2, 0) la nueva función pasara por la parte positiva del plano cartesiano, dado que dos de las funciones dadas tienen alturas negativa y una positiva, en el intervalo (0, 2) dos de las funciones dadas tienen alturas positivas y una negativa por lo que la nueva gráfica pasará por la parte negativa del plano y por último en el intervalo $(2,\infty)$ la nueva gráfica estará en la parte positiva del plano cartesiano dado que las alturas de la funciones dadas son positivas, por lo que en las partes sombreadas pasará la nueva gráfica (ver figura 10).

Para calcular $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ con $g(x)=sen(x-2)sen(x)$ y $h(x)=sen(x)$ haremos lo mismo que en las funciones algebraicas. Primeramente atenderemos al numerador de la función dada; es decir, graficaremos la función *sen x* (trabajada anteriormente) y la $sen(x-2)$, que sería la función *sen x* trasladada dos unidades a la derecha sobre el eje *x* y realizaremos la multiplicación, para obtener el numerador. Sabemos que todos los cruces de ambas funciones se conservarán en la nueva función y que, si determinamos las regiones por donde pasará la nueva gráfica, visualizaremos el producto de dichas funciones (figura 11).

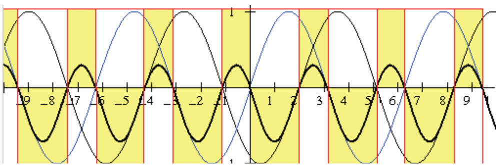


Figura 11

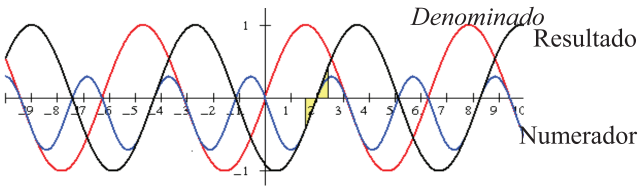


Figura 12

Ahora graficaremos el numerador y el denominador para determinar la función principal dada (figura 12). En donde se consideran alturas tanto del numerador y del denominador para determinar la nueva gráfica. Con base en lo anterior tenemos herramientas para trabajar la operación límite visualmente así como operar gráficamente con la combinación de las funciones anteriormente trabajadas en las cuales se miraron características gráficas. Por ejemplo: encontrar los límites $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$.

gráficamente podemos observar lo siguiente

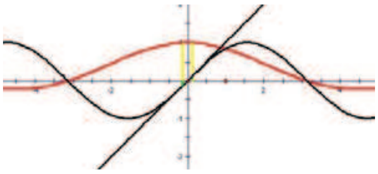


Figura 13

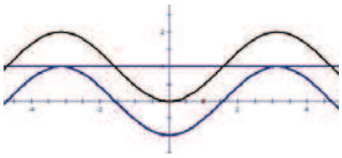


Figura 14

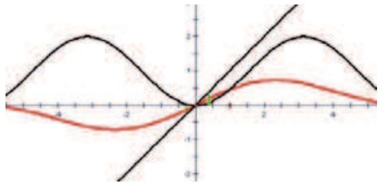


Figura 15

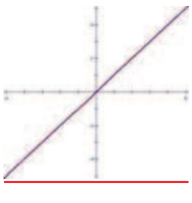
En la figura 13, realizamos la división de las funciones sen *x* entre *x* operando de igual manera que en los ejemplos anteriores (considerando alturas), posteriormente tomamos una vecindad alrededor del cero con la intención de visualizar la tendencia del límite cuando *x* tiende a cero, por lo que visualmente determinamos que $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$, por otro lado para resolver el segundo límite comenzamos operando sobre el numerador de la expresión (ver figura 14), en donde realizamos la suma de las funciones dadas, posteriormente graficamos el numerador y el denominador de la expresión, con la intención de aplicar la operación del cociente similar a los ejemplos anteriores, tomando una vecindad alrededor del cero para visualizar la tendencia de la expresión cuando *x* tiende a cero tenemos que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$ (ver figura 15).

A continuación mostramos el diseño de una ingeniería didáctica en el que se consideran los aspectos que aquí mostramos, con el cual se intenta profundizar y tratar una cantidad considerable de límites que en la actualidad no se trabajan en la clase.

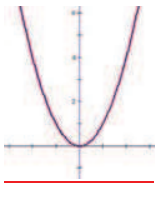
El Diseño de la Ingeniería Didáctica

Actividad 1.

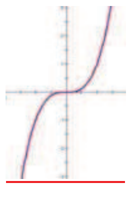
En esta actividad tenemos tres gráficas de las que calcularemos límites en alguna *x* en específico.



gráfica 1



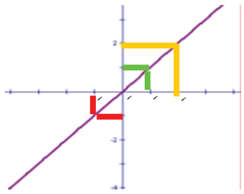
gráfica 2



gráfica 3

Por ejemplo: Tomando la gráfica 1 que representa a *f*(*x*)=*x*, en la que calcularemos los siguientes límites $\lim_{x\to -1} x$ $\lim_{x\to 0} x$ $\lim_{x\to 1} x$ $\lim_{x\to 2} x$.

Si localizamos intervalos alrededor de los *x*= -1, 0, 1 y 2 en la función *f*(*x*)=*x*, gráficamente se observa lo siguiente.



Podemos determinar que:

$$\lim_{x\to -1} x = -1 \quad \lim_{x\to 0} x = 0 \quad \lim_{x\to 1} x = 1 \quad \lim_{x\to 2} x = 2$$

Ahora para las gráficas 2 y 3 se calculan los siguientes límites e identificarlos en la gráfica.

$$a)\ \lim_{x\to 0} x^2,\ b)\ \lim_{x\to -5} x^2,\ c)\ \lim_{x\to 3} x^2,\ d)\ \lim_{x\to 10} x^2,\ e)\ \lim_{x\to 0} x^3,\ f)\ \lim_{x\to -2} x^3,\ g)\ \lim_{x\to 3} x^3,\ h)\ \lim_{x\to -5} x^3$$

Si ahora nos basamos en las gráficas anteriores para calcular límites, donde se involucren operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, donde involucremos $y = x$ o bien $y = A(x+B)$ entre las lineales, para las cuadráticas $y = x^2$ o bien $y = A(x+B)^2 + D$ y para las cúbicas $y = x^3$ o bien $y = A(x+B)^3 + D$. Considerando para los parámetros *A*, *B* y *D* valores específicos, además, de que ya sabemos que provocan cada uno de los parámetros en cada una de las gráficas primitivas.

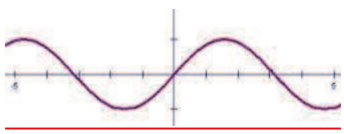
Por ejemplo calcular los siguientes límites y graficar las funciones correspondientes para observar gráficamente cada uno de los límites.

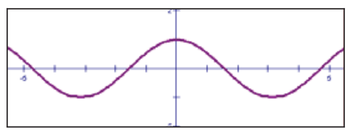
$$a)\ \lim_{x\to 1} 3x+1,\ b)\ \lim_{x\to 2} x-5,\ c)\ \lim_{x\to 1} x(2x+1),\ d)\ \lim_{x\to 2} \frac{x}{3},\ e)\ \lim_{x\to -1} x^2+2,\ f)\ \lim_{x\to 3} x^2-1,\ g)\ \lim_{x\to -3} 4(x-3)^2+2,$$

$$h)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3},\ i)\ \lim_{x\to 3} 3(x-2)^3+4,\ j)\ \lim_{x\to -2} 2x^3-2,\ k)\ \lim_{x\to 5} 2(x+1)(x-2)(x)\ \text{y}\ l)\ \lim_{x\to 4} \frac{5(x+4)^3}{x+4}$$

Actividad 2.

Dadas las gráficas de las funciones *f*(*x*)=sen *x* y *f*(*x*)=cos *x*,





calcular los siguientes límites e identificar cada punto en la gráfica que le corresponda.

$a)\lim_{x\to\pi} senx$, $b)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} senx$, $c)\lim_{x\to-\pi} senx$, $d)\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} sen\,x$, $a)\lim_{x\to\pi}\cos x$, $b)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$, $c)\lim_{x\to-\pi}\cos x$, $d)\lim_{x\to-\frac{3\pi}{2}}\cos x$

Ahora, calcularemos límites pero basándonos en gráficas trigonométricas, en donde involucraremos también operaciones básicas. Considerando en general las siguientes funciones $f(x)=Asen(Bx+C)+D$ o bien $f(x)=A\cos(Bx+C)+D$ asignando para los parámetros *A*, *B*, *C* y *D* valores específicos, además, de que ya sabemos que provocan cada uno de los parámetros en cada gráfica primitiva.

Por ejemplo calcular y graficar los límites.

$a)\lim_{x\to 1} 3senx+2$, $b)\lim_{x\to\frac{3}{2}} 3senx-2$, $c)\lim_{x\to -3} 2sen(x+1)+2$, $d)\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{sen(x-2)sen(x)}{sen(x)}$, $e)\lim_{x\to 0} 2\cos x+1$, $f)\lim_{x\to\frac{1}{2}}\cos x-2$, $g)\lim_{x\to 0} 4\cos(x+3)-2$, $h)\lim_{x\to -2}\frac{4\cos x-1}{\cos x}$, $i)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(sen\,x-\cos x)$, $j)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{sen\,x}$, $k)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen\,x-\cos x}{\cos 2x}$

Actividad 3.

A partir de las de las actividades 1 y 2, se resolverán otros límites con la misma idea, es decir, ahora combinaremos las gráficas algebraicas con las trigonométricas, sin perder de vista lo que provoca cada parámetro para dicha gráficas.

Calcular los siguientes límites:

$a)\lim_{x\to 0}(x^2+\cos x)$, $b)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{senx}{3x}$, $c)\lim_{x\to 0}\frac{senx}{3x}$, $d)\lim_{x\to 0}\frac{sen5x}{x}$, $e)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$, $f)\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice – Hall.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo*. colección de Cuadernos Didácticos, Vol. 2, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.