Un Acercamiento Alternativo al Cálculo Diferencial

Carlos Armando Cuevas y Hugo Rogelio Mejía
Cinvestav del IPN
México
ccuevas@mail.cinvestav.mx, hmejia@mail.cinvestav.mx
Tecnología Avanzada, Visualización – Nivel Medio, Superior

Resumen

Ante la problemática que presenta la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial y también al surgimiento de herramientas computacionales capaces de graficar y realizar derivación simbólica y manipulaciones algebraicas, se requiere una reflexión crítica sobre cómo se puede utilizar la tecnología para apoyar la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. En este artículo, se hace una propuesta didáctica que se ha implementado en un sistema computacional y un libro que la implementa. El acercamiento se apoya fuertemente en actividades con polinomios a través de los cuales se puede apreciar el poder del cálculo diferencial sin demérito de considerar situaciones suficientemente complejas.

Antecedentes.

En los últimos años se ha desarrollado una corriente de investigación en la que se hace una crítica reflexión alrededor de la enseñanza del cálculo diferencial e integral. Estas investigaciones apuntan a que el cálculo diferencial e integral se enseña con una fuerte carga operativa en detrimento de la parte conceptual (Amit y Vinner, 1990; Tall, 1996; Schoenfeld, 1985; Hiebert y Lefevre, 1986; Skemp,1976). La consecuencia, una pobre asimilación de los conceptos importantes del cálculo que muchas de las veces conduce a una interpretación errónea dentro de contextos geométrico, físico y algebraico. Asimismo, la gran deficiencia en su comprensión impide que los estudiantes puedan reconocer y aplicar los conceptos del cálculo cuando se requieren en materias de otra especialidad o de matemática más avanzada.

Aunado a esta problemática, el explosivo desarrollo tecnológico ha puesto en duda muchas de las prácticas docentes en los cursos de matemáticas. En efecto, el advenimiento de programas de computo con capacidad de manipulación simbólica, de graficación y simulación hacen que muchas de las tareas usuales de un curso de cálculo, como derivar e integrar, se puedan resolver mediante el uso de estos paquetes (Forgasz, 2002, p. 368; Asiala et. al. 1997; Simmt, 1997). Lo anterior, cuestiona el rol del profesor y lleva a una revisión curricular en donde se tengan que inspeccionar los objetivos de los cursos de cálculo y determinar con precisión el contrato didáctico entre los participantes de un curso: el profesor, la tecnología y el estudiante (Stroup, 2002, p.183). Contemplar a la tecnología como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es algo necesario puesto que los cambios que produce en la enseñanza de la matemática son tanto en forma como en el contenido (Thurston, 1994, p. 175).

El reto que se enfrenta consiste en recuperar el significado de los conceptos que están inmersos en el cálculo diferencial utilizando la capacidad numérica, gráfica y simbólica que el medio computacional ofrece en la actualidad.

Elementos teórico didácticos.

Una de las formas tradicionales de conducir un curso de matemáticas, consiste en que el docente realiza la mayor parte de la actividad en clase ilustrando con problemas y su resolución el tema de matemáticas. Cuando el proceso de enseñanza consiste en que el alumno sólo repita las imágenes del pizarrón; la enseñanza tiende hacia la construcción de hábitos en los estudiantes y no hacia la interiorización de los conceptos (Aebli, 1958). Una consecuencia inmediata de este tipo de didáctica en los cursos de cálculo, muestra que el estudiante es capaz de aprender de memoria las fórmulas de derivación pero no puede reconocer la derivada como una medida de la variación por lo que, en problemas donde se describe la variación instantánea de una magnitud, empieza a repetir verbalmente las fórmulas que le vienen a la memoria y en la mayoría de los casos acaba proponiendo algo absurdo. En este sentido, la repetición verbal como un reflejo constituye el llamado hábito sensoriomotor, es decir, las palabras constituyen signos carentes de significado. Con este tipo de enseñanza se aniquila el concepto y se substituye por una secuencia de operaciones numérico algebraicas. (Cuevas 1999).

¿Cómo lograr que la enseñanza de la matemática no se conduzca de esta forma? Existen diversas propuestas y, evidentemente, cada una contribuye en parte a resolver este grave problema. En nuestro acercamiento, se propone estructurar un curso de cálculo que incorpore los siguientes elementos:

a) Al introducir un concepto matemático hay que partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando; buscando que se realice una acción, no necesariamente física sino mental, para que mediante la resolución gradual del problema (descomposición) el alumno llegue a la construcción del concepto mediante un proyecto de acción práctico (Cuevas y Pluvinage, 2003). En el caso del cálculo diferencial, el contexto puede surgir de los problemas que usualmente se proponen como problemas de aplicación de la derivada como el bosquejo de una gráfica, los problemas de máximos y mínimos, o los problemas de razón de cambio.
b) La descomposición del problema debe incorporar subproblemas que requieran tanto de operaciones directas como inversas así como resolver un mismo problema por diversas formas. Por ejemplo, se proponen situaciones que requieran determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función pero también situaciones que requieran reconstruir una función cuyos intervalos de monotonía se proporcionan.
c) Visualizar y operar el concepto en distintos sistemas de representación (en el sentido de Duval, 1993) e instrumentar operaciones de conversión entre las diversas representaciones que permitan su articulación enriqueciendo el significado del mismo. Por ejemplo, calcular tabular y gráficar la variación de las funciones con el signo de la derivada en diferentes intervalos.
d) Finalmente este concepto deberá formar parte de un tema posterior de mayor complejidad, como parte de la estructura necesaria para que el estudiante aborde el nuevo problema (Cuevas y Pluvinage, 2003, pp. 8-30). Todo ello sin dejar fuera la componente de socialización y los procesos intrínsecos que conlleva.

Si lo anterior no fuera posible de realizar para todos y cada uno de los conceptos inmersos dentro del curso de cálculo diferencial debería de hacerse un estudio previo para destacar los conceptos más importantes y realizar esta tarea para ellos.

Usualmente la enseñanza del cálculo diferencial sigue un esquema de definición – teorema - problema tipo. Aunque las reglas de derivación se aplican a todo tipo de funciones, los problemas tipo ejemplifican principalmente los conceptos relacionados con la derivada a las funciones racionales, y se apoyan en el conocimiento algebraico del estudiante y poco en su intuición geométrica y visual; debido, posiblemente, a la dificultad para representar en el papel o el pizarrón un número suficientemente grande de ejemplos que den significado geométrico a los contenidos del cálculo y al álgebra involucrada en ellos.
En primera instancia, haría falta rescatar el desarrollo de los conceptos del cálculo mediante problemas de cambio y variación surgidos de problemas en contexto, los cuales ayudarán a reforzar la intuición. En la actualidad, los problemas de cambio y variación son ejemplos de aplicación del cálculo, es decir, se estudian después de que se ha desarrollado la teoría, y no como surgió históricamente. Nuevamente, por la dificultad de reproducir en el salón de clase esos procesos dinámicos. Además, convendría que el estudiante reconociera la riqueza de las herramientas del cálculo para bosquejar las gráficas de funciones y reconstruir funciones con características preestablecidas respecto a monotonía, puntos críticos, puntos de inflexión comportamiento asintótico, etc. Realizar lo anterior para que lo pueda aprovechar un estudiante promedio resultaría muy difícil de hacerse sin el apoyo de la tecnología computacional actual.

Propuesta.

Para iniciar un curso de cálculo diferencial, proponemos un proyecto de acción, en el sentido antes discutido. La elección del problema constituye en general un proyecto de investigación aunque en nuestro caso concluyó con la elección de construir y descifrar la gráfica de una función real. El esbozo de una gráfica no es un problema nuevo, usualmente se propone como un problema que resulta de la aplicación del cálculo; esto es, se enseña después de haber estudiado los conceptos del cálculo. Nuestro enfoque consiste en retomar este problema como el problema de inicio que motiva e induce para su resolución los conceptos del cálculo; es decir, a partir de la resolución de este problema surge como una necesidad el cálculo diferencial. El esbozo gráfico es un problema importante puesto que reconocer e interpretar la información que una gráfica ofrece es un problema difícil que se tiene siempre que la gráfica representa un proceso físico, económico, biológico o de cualquier naturaleza. Si bien, actualmente un gran número de programas computacionales nos ofrecen graficas sofisticadas de funciones, también es cierto que muchas de las veces la información visual que ofrecen es parcial y la escala a la que se presenta la porción de gráfica mostrada puede conducir a falsos supuestos. Por ejemplo, si se propone analizar la gráfica de un polinomio como: $P(x) = -8x^7 - 45x^6 + 7x^4 - 97x^3 + 34x^2 + 3$

La primera gráfica presentada por dos sistemas computacionales diferentes se muestra en las figuras 1 y 2.

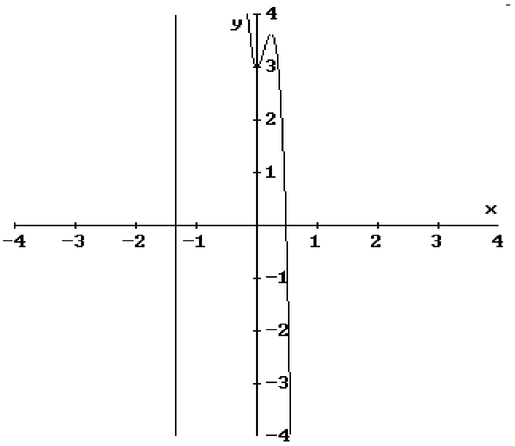

Figura 1 Grafica que ofrece el programa DERIVE ver. 5.0 al polinomio $P(x)$.

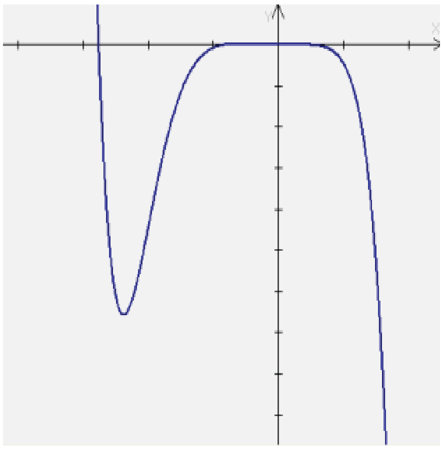

Figura 2 Grafica que ofrece el programa CalcVisual ver. 1.0 al polinomio $P(x)$.

Como se puede observar en la figura 1, aparece la gráfica de una función discontinua y con un segmento de recta vertical que, como se sabe, no corresponde a la gráfica de una función real. En la figura 2, aparece la gráfica de una función continua, sin embargo, parecería que la función tiene un número infinito de raíces alrededor del origen, cuestión imposible de tener con un polinomio real. Aunque ambos programas ofrecen la posibilidad de modificar la escala y región de graficación, si no se sabe qué información hay que buscar difícilmente se van a identificar las diferentes regiones y/o escalas que muestren gráficamente tal información. La tecnología computacional por sí misma, no resuelve el problema, el cálculo diferencial sí lo hace, pero se requiere de una estructuración didáctica adecuada para hacerlo accesible al estudiante.

Una vez determinado como proyecto de acción la construcción e interpretación de la gráfica de una función real para un primer curso de cálculo diferencial, proponemos iniciar con las funciones que son las más simples de definir y estudiar relativamente: los polinomios. La función polinómica permite ejemplificar la mayoría de los conceptos que aparecen en el cálculo, con relativa simplicidad algebraica y numérica. Tampoco es novedoso el utilizar a los polinomios para ejemplificar conceptos del cálculo, sin embargo, usualmente se utilizan ejemplos simples que ofrecen poca dificultad en la determinación de sus raíces lo que, en general, dificulta construir ejemplos que muestren la riqueza de situaciones que un polinomio puede generar. La razón dada era que la dificultad algebraica podría distraer u ocultar el concepto bajo estudio. No obstante, en la actualidad la dificultad algebraica ya no representa un obstáculo si se utiliza en combinación con un acercamiento numérico apoyado en la capacidad de cálculo de una computadora. Auxiliados por el medio computacional, se pueden construir ejemplos de funciones polinomiales, y otras como las funciones racionales y radicales, cuya riqueza conceptual sea lo suficientemente vasta para dar al estudiante una idea muy clara de las situaciones que el cálculo diferencial resuelve.

Lo anterior requiere de un acercamiento didáctico bien definido y éste es el que configura la propuesta que se presenta aquí y que ya ha sido experimentada con profesores y estudiantes. La propuesta completa se presenta en el libro Cálculo Visual (Cuevas & Mejía, 2003b) y se apoya fuertemente en un Sistema Interactivo de Enseñanza y Aprendizaje por Computadora

(CalcVisual, Cuevas & Mejía, 2003a) con una estrategia didáctica incorporada que cumple lo especificado en los incisos a, b, c y d de la sección anterior.

Se propone iniciar el estudio del esbozo gráfico en los polinomios haciendo un estudio reflexivo sobre las raíces reales de una ecuación, este tema que formalmente sería de precalculo adquiere relevancia en nuestra propuesta porque representa uno de los ejes fundamentales en el estudio del cálculo. En efecto, si se tiene una forma adecuada de calcular y un significado claro de lo que una raíz real representa, conceptos como el de monotonía, puntos críticos, concavidad, y puntos de inflexión se simplifican de manera notable en su cálculo y análisis, particularmente para polinomios y funciones relacionadas. Si el estudiante reconoce en forma gráfica el significado de una raíz real y mediante el uso de un ambiente computacional como CalcVisual (op. cit.), se le enseña a encontrar en forma aproximada y numérica el valor de las raíces (figura 3), entonces el estudiante puede fácilmente determinar el signo de la función polinomial, aplicando un principio básico de continuidad. Lo anterior se reproduce para la primera y segunda derivadas de la función por lo que el cálculo de la monotonía, identificación de puntos críticos y concavidad se simplifica notablemente. El estudio no quedaría completo si no se realizan también toda la serie de procesos inversos relacionados con construir funciones que tengan raíces dadas o una monotonía propuesta, puntos críticos preestablecidos, etc.

Pero procediendo en orden, después de determinar las raíces y el signo del polinomio, se propone hacer un estudio sobre los límites a $+\infty$ y $-\infty$ de un polinomio con la idea de determinar con precisión el comportamiento del polinomio en todo su dominio, más allá del intervalo donde se encuentran las raíces, coloquialmente, se tiene que saber de dónde viene la función y hacia dónde va. Es conveniente realizar el estudio tanto en forma numérica como algebraica de tal forma que al tabular, con ayuda de la computadora, valores de la función el estudiante adquiera una intuición que después confirmará con sus cálculos algebraicos. Enseguida, se puede considerar que la gráfica de la función esta formada por pequeños segmentos de recta (de hecho, es la forma en que una computadora construye la gráfica).

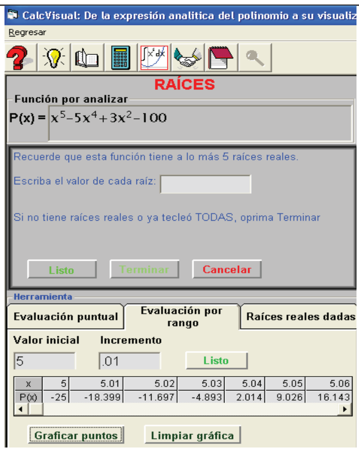

Figura 3. Herramienta para aproximar raíces por tabulación dinámica.

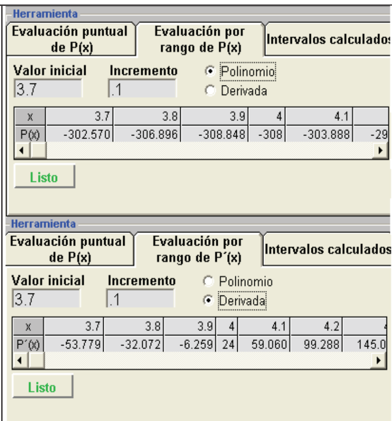

Figura 4. Comparación entre el los valores de un polinomio y su derivada cerca de un extremo.

Numéricamente, la pendiente de esos segmentos de recta se puede medir por la razón de cambio de la función tomada en puntos sucesivos. Para el problema planteado lo que interesa principalmente es el signo y los ceros de la razón, información que obtenemos de la derivada en forma semejante a como se hizo para el polinomio original, puesto que las derivadas de un polinomio siguen siendo polinomios. Otro aspecto importante es que se pueda comparar numéricamente el comportamiento de la función en los puntos críticos e intervalos de crecimiento y decrecimiento respecto al signo y los ceros de la derivada. El sistema CalcVisual permite visualizar lo anterior como se muestra en la figura 4. Es conveniente insistir que el problema no termina al identificar todos los elementos que configuran la gráfica de la función. Es muy importante el planteamiento de problemas donde se da información sobre algunos de esos elementos y se pide construir una función que cumpla con las condiciones dadas. Por ejemplo, se pueden dar intervalos con una monotonía especificada en donde lo que se solicita es construir una función que tenga tal monotonía. Problemas como el anterior rompen con la falsa idea de que todo problema que se plantee deba tener una solución única. La intención es ver que se puede tener una familia de funciones que cumple lo solicitado.

Comentarios finales.

Si partimos del hecho de que toda forma de conocimiento esta mediada por la acción de una herramienta material y/o simbólica, proponemos que se incorpore en los cursos de cálculo diferencial a la tecnología computacional. Más que como un calculador simbólico o graficador de funciones, se propone su uso como una herramienta cognitiva. Una propuesta como la que queda implementada en el sistema CalcVisual favorece acercamientos para que el estudiante construya conceptos importantes del cálculo diferencial; donde, además del recurso algebraico, el estudiante emplee otros registros de representación para explorar el concepto siempre bajo un esquema didáctico bien definido. Sin embargo, hay que recordar que ningún sistema es autosuficiente, ni se pretende que CalcVisual lo sea, es indispensable que el profesor oriente y profundice sobre el trabajo que realiza el alumno. De hecho puede utilizar el propio sistema computacional para generar situaciones que confirmen el poder del cálculo diferencial como una herramienta que resuelve de manera sistemática una familia muy grande de problemas que la tecnología computacional es incapaz de resolver.

Referencias Bibliográficas

Aebli, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Argentina: Kapelusz.

Amit, M y Vinner, S. (1990). *Some Misconceptions in Calculus - Anecdotes or the Tip of an Iceberg.* México: PME.

Asiala, C. y Dubinsky. (1997). *The Development of students, graphical understanding of the derivative. Journal of Mathematical Behavior*. (pp. 339-431). USA.

Cuevas, A. (1999). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas, basada en la psicología de Jean Piaget*. México: CINVESTAV- IPN.

Cuevas, A. y Mejía, H. (2003a). *CalcVisual. Un sistema de cómputo para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo diferencial.* México: Oxford University Press.

Cuevas, A. y Mejía, H. (2003b). *Cálculo Visual.* México: Oxford University Press.

Cuevas, A. y Pluvinage, F. (2003). *Les projets d`action practique, éléments d´une ingénierie d´enseignement des mathématiques.* (pp. 975-999). Francia : IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1993). *Semiósis y noesis. Lecturas en didáctica de las matemáticas*. (pp. 118-144). México: Cinvestav.

Forgasz, H. (2002). *Computers for learning mathematics: gendered beliefs.* PME XXVI, Jul 21-26, UK: Norwich.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. J. Hiebert (Ed.), (pp. 1-27). USA: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Simmt, E. (1997). Graphics calculators in High School Mathematics. *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching*. (16, 2/3), 269-289. USA

Schoenfeld, H. (1985), *Mathematical Problem Solving*, USA: Academic Press, New York.

Skemp, R. (1976), *Relational understanding and instrumental understanding*. (pp.20-26). USA: Mathematics Teaching

Stroup, W. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A Structural Synthesis of Learning Research. *International Journal of Computers for Mathematics Learning* (7), 167-215. USA.

Tall, D. (1996), *Functions and Calculus*. Netherlands: International Handbook of Mathematics Education. J. Bishop et al (Eds.), (pp. 289-325).

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *USA: Bulletin of the American Mathematical Society* (30), 161-177.