Incoherencias y Pensamiento Matemático: La Influencia de los Lenguajes Matemáticos y Representaciones sobre el Razonamiento en el Dominio del Infinito

Sabrina Garbin
Universidad Simón Bolivar
Venezuela
sgarbin@usb.ve
Pensamiento Matemático Avanzado, Lenguaje Matemático – Nivel Básico, Medio

Resumen

Las ideas, resultados y reflexiones que desarrollamos, son producto de estudios y parte de investigaciones (Garbin 2000 y Garbin, 2003,2004) que han pretendido contribuir con el debate de la problemática del infinito matemático en su dualidad potencial-actual, desde la específica, que genera la influencia de las representaciones y distintos lenguajes matemáticos sobre las percepciones del infinito y razonamientos matemáticos asociados, y en las inconsistencias e incoherencias de las respuestas de los alumnos a problemas que están presentes procesos infinitos.

Una etapa en la enseñanza y aprendizaje

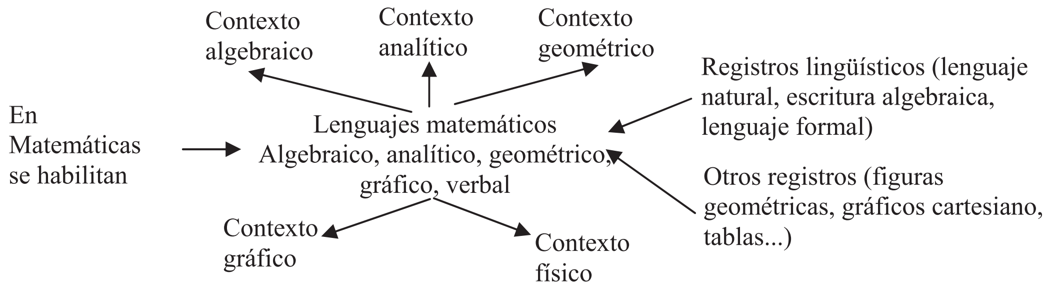
Las etapas de escolaridad y del proceso de enseñanza y aprendizaje están en estrecha relación con el desarrollo cognitivo de los estudiantes, y para poder hacer estudios, dar ideas, aportaciones y reflexiones didácticas es importante saber y conocer la etapa cognitiva en que se encuentran los estudiantes. Nosotros nos situamos en la etapa cognitiva de transición entre el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Por etapa elemental entendemos normalmente aquella que tiene lugar hasta Secundaria y la etapa avanzada aquella que está relacionada con la Enseñanza de la Matemática en la Universidad. Pero entre ambas podemos ubicar una etapa de transición, que aparece en diferentes momentos y distintas duraciones, según el País y a veces según el área de Matemática que se está enseñando. Delimitar ambas etapas y saber reconocer dicha transición ha sido de especial interés para algunos investigadores. David Tall y Tommy Dreyfus, han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado, y es el mismo Tall quien afirma que el lugar donde el pensamiento matemático elemental se convierte en avanzado no se ha definido con precisión. En cuanto a los procesos de pensamiento, algo que distingue una etapa de la otra es la complejidad y la frecuencia del uso de estos procesos (representación, traslación, abstracción, deducción, entre otros). Otra distinción entre una etapa y la otra, está en relación con la característica y el nivel de los estudiantes como, por ejemplo, los cursos preuniversitarios o universitarios. Algunos autores piensan que esto no necesariamente delimita ambas etapas y entonces caracterizan su enseñanza y evaluación. Por otra parte Tall (1995) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción supone, por un lado, el paso de "describir" a "definir", y por otro, el paso de "convencer" a "demostrar". En suma, podríamos decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 15-20 años aproximadamente, son los que están en esta etapa de transición.

Intuición del infinito y algunos conceptos

En nuestra práctica docente, enseñando y evaluando, hemos notado la diferencia que muchas veces existe entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones que nuestros estudiantes hacen de ellos. Es en la década de los años 70 y primeros años de los 80, cuando se detecta esta diferencia. Para explicar esta distinción, Tall y Vinner (1981) definieron lo que llamamos "esquema conceptual" (concept image). Inicialmente, Tall y Vinner describieron el esquema conceptual que tiene un alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática. Mucho más tarde Tall (2001) define imagen informal (informal image) e imagen formal (formal image), la primera es algún tipo de imagen que se tiene antes del acercamiento con teorías axiomáticas, y la segunda consiste en la parte del esquema conceptual que es formalmente deducido de los axiomas. Esto enfoca en el dominio del infinito, la tensión entre el infinito "perceptual" y el infinito "formalizado". En particular, nosotros trabajamos con estudiantes que se acercan al infinito, siendo éste no formalizado, y cuya intuición del infinito es la que entra en juego, tanto antes y después de haberse introducido conceptos formales del cálculo diferencial e integral, y empiezan a aparecer interconexiones y confusiones entre la imagen formal e informal de dichos conceptos. El concepto aristotélico de infinito es una noción potencial que dominó en la historia hasta la época cantoriana, habiendo tenido una gran influencia en el desarrollo de este concepto. Como ha explicado Fischbein, este concepto potencial de infinito es el que responde a la interpretación intuitiva del infinito, mientras que el infinito actual no tiene un significado "conductual" con lo cual es una noción contraintuitiva. Nombramos al infinito actual, como el que está asociado a la idea de totalidad, de completes y de unidad. Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera acabado y los límites alcanzados.

Incoherencias: impacto de las representaciones y los lenguajes matemáticos

Un elemento relevante a considerar en la actividad matemática y de especial interés, es la importancia de diferenciar la representación del objeto del objeto matemático. Los objetos matemáticos tienen un significado más abstracto que los objetos físicos. Y cuando nos referimos a la estructura cognitiva, decimos que el esquema conceptual usa el símbolo para conectar convenientemente procesos y relaciones; de esta manera, en la mente se tienen símbolos que se pueden manipular como objetos mentales, sin ser necesariamente objetos físicos. El profesor Duval (1996, 1999) ha desarrollado una teoría cognitiva de las representaciones semióticas y afirma que éstas tienen un carácter distinto a las representaciones mentales y constata que: 1) No se puede acceder a los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los de otras disciplinas, por ejemplo la física, que pueden ser manipulables. De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría, etc. 2) Es necesario no confundir nunca un objeto con su representación semiótica: un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa, etc. Es importante tener en cuenta que las representaciones semióticas no son un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, sino que también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. La explicación que hace Duval sobre los diferentes sistemas semióticos usados para definir y utilizar conceptos y objetos matemáticos, nos ayuda a establecer cierta relación entre los lenguajes matemáticos, los contextos y los registros de representación semiótica. En Matemáticas se habilitan diferentes lenguajes matemáticos, como por ejemplo el algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal (escogidos para nuestros problemas, ver Anexo). Cada uno de los lenguajes contextualiza el problema, un contexto algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal, respectivamente. Y, cada lenguaje matemático utiliza unos ciertos registros de representación semiótica que pueden ser del tipo lingüístico (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) o de otro tipo (figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas,...)



El problema del uso de ciertas representaciones y en especial de ciertos modelos, que puede ser una figura, un dibujo, especialmente en el dominio del infinito, puede causar ciertas contradicciones entre las deducciones formales y los modelos intuitivos, especialmente este ha causado el problema de conocidas paradojas. Fischbein que se ha interesado en la relación del infinito y los modelos tácitos, subraya precisamente la dificultad de librarnos psicológicamente de ciertas imágenes, por ejemplo por muy entrenados que seamos aunque sepamos que los puntos matemáticos no tienen dimensiones, nosotros seguimos pensando tácitamente, inconscientemente, en pequeños puntos. Las enormes contradicciones en el tiempo de Cantor, ante los hallazgos del infinito actual, se debía a la dificultad de librarse de los modelos tácitos primitivos de los razonamientos matemáticos. Y el problema principal de las contradicciones y de las paradojas en el dominio del infinito, es la "no existencia y no influencia tácita de modelos en nuestro razonamiento en el dominio del infinito actual"(Fischbein, 2001).

Respuestas y percepciones de los alumnos

Nos hemos centrado en nuestros estudios en cinco problemas (ver Anexo) inspirados en la primera paradoja de la división, de Zenón y diferenciados por el contexto matemático. Recordemos que la paradoja de la dicotomía pone en superficie dos aspectos. Si nos queremos mover del punto 0 al 1 de la recta podemos hacerlo con un procedimiento finito, o podemos utilizar un procedimiento infinito, moviéndonos ½ unidad, después ¼ unidad, y así sucesivamente. Si se ignora la posibilidad de que hay puntos distintos a una distancia infinitesimal entre uno y otro, es evidente que ambos procedimientos conducen al mismo punto. Este hecho está expresado en la "igualdad" $1=1/2+1/4+1/8+...$, que Zenón considerana paradójica. El hecho es que asumía "a priori" que no existía el "infinito actual" y entonces que ningún proceso infinito podría considerarse completo (Rucker, 1995). En particular las 5 preguntas presentan una misma situación cognitiva, que en lenguaje de Nuñez (1994) presentan un infinito pequeño que implica una coordinación simultánea, el creciente número de divisiones y el decreciente "espacio" que se recorre o "resultado parcial" que se opera (que llama proceso de convergencia y divergencia). Las preguntas están expresadas en lenguajes matemáticos distintos y con registros semióticos distintos. Cada uno de estos registros alude, incide, fomenta, convence, permite que surjan en la mente del estudiante, concepciones, elementos y experiencias matemáticas específicas, fruto de sus limitaciones o de sus oportunidades, en el sentido de su característica de producción.

Los alumnos perciben al infinito en estas preguntas de manera distinta, derivado de esta influencia, algunos se sitúan ante una percepción potencial del infinito y no consideran que el proceso es completo, y otros "aceptan" la completes del proceso infinito y perciben al infinito como actual. Las razones son variadas y están delimitadas por el tipo de lenguaje, representación y contexto. También los alumnos más avanzados (17-20 años) muestran que si bien saben calcular una suma infinita (aunque no calculen la suma), reconocen si es convergente o divergente, y conocen y saben calcular un límite al infinito, algunos aceptan la situación de que en el infinito se alcanza al punto límite y otros no. El proceso infinito implícito para algunos alumnos es completo, para otros no lo es y un menor número (y en mayor número aquellos estudiantes sin conocimientos de cálculo diferencial e integral) mantuvieron esquemas finitos o físicos, a pesar de la infinitud del proceso. Pero las respuestas no se mantienen "estables" entre las preguntas, nosotros decimos coherentes. A través de la construcción de unas líneas llamadas de coherencia, hemos podido evidenciar la estabilidad o inestabilidad de las respuestas de los alumnos en los distintos problemas. Son muy pocos los alumnos, con los que hemos trabajo, que muestran una percepción actual o potencial o finitista en todos los problemas, manteniendo una línea coherente en sus respuestas según su concepción y percepción del infinito; y a pesar de que todas las preguntas presentan una situación cognitiva similar como ya hemos afirmado. Por ejemplo de un grupo de 89 alumnos universitarios, sólo un estudiante acepta que el proceso infinito es acabado, y dos alumnos mantienen en todas sus respuestas una concepción potencial del infinito. El resto de estudiantes se mantienen con respuestas actuales o potenciales dependiendo de la pregunta. Un hecho interesante a resaltar es que del grupo de estudiantes que mantienen principalmente esquemas finitos, no aparece la posibilidad de la completes del proceso en ninguna de las preguntas. En caso contrario en el grupo donde sí aparece y se acepta el alcanzar al punto límite, no hay casi presencia de respuestas finitistas (o de evasión de finitud), sólo un estudiante presenta una respuesta de este tipo. Esto hace pensar que estos estudiantes se encuentran en un momento distinto en el proceso de transición del PME al PMA. Todos estos datos en grandes rasgos hacen evidente la naturaleza conflictiva de las intuiciones del infinito, la influencia de los lenguajes y contextos en las percepciones de los estudiantes, y la persistencia de la imagen informal aunque ciertas ideas formales hayan sido presentadas a los estudiantes. Es probable que en el esquema conceptual de los estudiantes se mantengan en tensión el infinito "perceptual" y las imágenes formales asociadas a los conceptos formales del cálculo diferencial e integral. Y será la reconstrucción de estos conceptos formales y la construcción del concepto formal del infinito actual la que podría disminuir esta tensión.

Conexiones y tarea de conexión

Una habilidad importante para mantener respuestas consistentes ante varias representaciones de un mismo problema, o con situación cognitiva similar como la que estamos discutiendo, es tener conciencias y saber establecer conexiones y reconocer las relaciones, similitudes y/o diferencias dadas por los diferentes lenguajes y representaciones. Por ejemplo, en los problemas 1, 3 y 4 los alumnos expresan relaciones de similitud y focalizan su atención en distintos aspectos: a)El planteamiento del problema: la respuesta del alumno está en relación a lo que plantean los problemas o en lo que se pide hacer. b) El proceso de convergencia y divergencia implícito en cada pregunta (aceptando o no la situación límite). c)El concepto implícito, la noción de infinito, o el reconocimiento que se trata del mismo concepto o tema en todas las preguntas. d) Los conceptos asociados de límites, sucesiones y/o series. e) Resultados: puede ser el tipo de resultado o el procedimiento o modo de resolución del problema. f) Encuentran similitud en algunas preguntas y/o semejanzas y diferencias entre los problemas. g) Afirman que están relacionadas con la divisibilidad en mitades. Es importante subrayar que no es reconocida por los estudiantes la situación cognitiva similar de los problemas, sólo el 6% del segundo grupo explicita el proceso de convergencia y divergencia. Por otra parte al comparar con las dadas, las relaciones de semejanza o diferencia entre estas preguntas que daría un matemático o un psicólogo parece que no son evidentes y necesitan de una habilidad adicional y procesos de pensamientos específicos. Algunos autores han hablado de la importancia de la conexión y se ha planteado la enseñanza por analogía. Nosotros subrayamos la importancia del proceso de conexión en la búsqueda de coherencia, y específicamente en situaciones como la planteada, llamamos "tarea de conexión" a la que consistiría en identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas asociadas coherentes a los problemas. A modo de ejemplo. Pensemos en los problemas 1 y 3. La tarea de conexión consiste en reconocer que en ambas preguntas está presente la divisibilidad infinita en mitades, que cognitivamente hablando requiere un proceso de divergencia y convergencia, pero tales que, en el primero se utiliza el lenguaje geométrico y en el tercero, el analítico. Entre los registros de representación semiótica, figura geométrica: segmento (pregunta 1) y escritura numérica: suma infinita (pregunta 3), la tarea de conexión consiste en reconocer los siguientes aspectos: - Si se considera el segmento de dimensión 1, es decir el segmento real [0,1], cada punto del proceso de bisección se pude identificar con cada uno de los sumandos de la suma infinita de la pregunta 3. – Que la suma infinita, numéricamente representa la suma infinita de los segmentos que son resultado de las bisecciones y que por tanto una solución explícita de la serie es la respuesta correcta a la primera pregunta. – Una respuesta de la pregunta 1 debe ser asociada y coherente con la respuesta a la pregunta 3. Tuvimos la experiencia de entrevistar a 6 alumnos de secundaria, 5 de estos terminaron mostrando respuestas coherentes, y para ello ha sido "fundamental": a) reconocer en todas las preguntas el proceso de división infinita, con los dos tipos de iteraciones, la divergente y convergente; b) establecer la relación y conexión entre las preguntas a través de la sucesión numérica. Hemos identificado además que dicha tarea puede favorecer: a) La aparición de un conflicto y la consciencia de la paradoja en la mente del estudiante cuando hay por lo menos una respuesta correcta en algunos de los problemas. Algunos de ellos no se habían percatado de la paradoja a qué llevaba el razonamiento de los problemas. Sin embargo, después de relacionarlos y poder hacer las conexiones matemáticas entre ellos, al comparar la respuesta correcta con las no correctas (matemáticamente hablando), se les hacía presente la paradoja. b)La "autobúsqueda" de coherencia, de manera consciente o no, en las respuestas y afirmaciones relacionadas con las preguntas (a través de la tarea se llega a una mayor consciencia de la semejanza de la situación planteada en cada problema). De forma espontánea los mismos estudiantes se exigían una respuesta coherente después de identificar la relación existente en los problemas y después de haber hecho las conexiones matemáticas entre ellos. c) La identificación de la idea o creencia errónea que no permite dar una respuesta consistente al estudiante. d) Diferenciar la representación del objeto del objeto matemático, en especial encontrar los focos de atención que los distintos contextos requieren mitigando la influencia de los lenguajes y representaciones.

A modo de conclusión

El paso del PME al PMA implica una transición que requiere un reconstrucción cognitiva, y el esquema conceptual de los estudiantes no necesariamente es coherente en todo momento y los alumnos pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes, y cuando se introducen conceptos formales empiezan a entrar en contradicción la imagen informal con la formal. En el dominio del infinito se mantiene en tensión el infinito "perceptual" y el infinito "formalizado". En esta etapa aún no se ha formalizado el infinito, por tanto el alumno construye conceptos formales, como los del cálculo diferencial e integral, manteniendo la tensión entre el infinito "perceptual" y la "imagen formal" de dichos conceptos. También empieza a aparecer, por la influencia de las representaciones y conceptos, la aceptación o no de un infinito asociado a la idea de totalidad, de completes y de unidad, que llamamos actual. Esta etapa es también de transición de lo finito, infinito potencial a infinito actual (como totalidad) llegando a la formalización del infinito cantoriano. Los lenguajes matemáticos, el contexto y las representaciones tienen un gran impacto sobre las percepciones del infinito y sobre nuestros razonamientos. Ante distintas representaciones de un mismo problema los alumnos presentan ideas inconsistentes, y en el caso particular tratado en este escrito presentan incoherencias o respuestas inestables ante un mismo problema (desde el punto de vista cognitivo) pero representado de forma distinta. Los estudiantes pueden percibir un infinito actual o potencial, y hasta dar respuestas finitistas dependiendo del problema, no hay conciencia de las propias incoherencias, ni de la similitud fundamental entre los problemas, los focos de atención de los alumnos son distintos y no son los que permiten realmente distinguir el objeto de su representación. La dificultad de establecer la conexiones convenientes no permite el dar respuestas coherentes y por ello pensamos es importante tener en cuenta didácticamente la tarea de conexión y hemos explicado en qué puede favorecer. Una manera para inducir esta tarea podría ser la de comenzar con el reconocimiento de las diferencias de representación: tipo de lenguaje y contexto, tipo de registro de representación semiótica usado en cada uno de ellos, y establecer las conexiones entre los sistemas semióticos presentes y los registros. Es una manera de incidir en el desarrollo de un pensamiento coherente que posteriormente podría impulsar un pensamiento consistente y menos compartimentado. Creemos que no debería ser una labor puntual, sino que debería ser una práctica constante propia de la actividad docente durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics 48*(2-3), 309-329.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques 6*(3), 349-382.

Duval, R. (1999). L'apprendimento in matematica richiede un funzionamiento cognitivo specifico? *La Matematica e la sua Didattica 1*, 17-42.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*. Disertación doctoral no publicada. Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Garbin, S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. En J.R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16, Tomo 2, pp. 406 – 414). Chile: CLAME.

Garbin, S. (en prensa). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Enseñanza de las Ciencias*.

Nuñez, E. (1994). Subdivision and Small Infinities Zeno, Paradoxes and Cognition. En J.P. Da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 368 – 375). Lisbon, Portugal.

Rucker, R. (1995). *Infinity and the Mind.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 61 – 75). Recife, Brasil.

Tall, D. (2001). Natural and Formal Infinities. *Educational Studies in Mathematics 48*(2-3), 199 – 238.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*(2), 151 – 169.