La Construcción de la Prueba Geométrica en un Ambiente de Geometría Dinámica en Secundaria

Víctor Larios
Universidad Autónoma de Querétaro
México
vil@uaq.mx
Pensamiento Geométrico − Nivel Medio

Resumen

Durante el último año se ha llevado a cabo una investigación dirigida a estudiar la construcción de la demostración geométrica dentro de un ambiente de Geometría Dinámica por alumnos de secundaria en México y con actividades relacionadas con triángulos y cuadriláteros. Para el diseño de esta investigación ha sido considerada la noción de *unidad cognitiva de teoremas* (Boero et al., 1996) a fin de que el orden y relación de las actividades reflejen un desarrollo cognitivo que apunte hacia la propuesta de justificaciones deductivas. Se informa sobre los avances de la investigación y se comentan algunas observaciones sobre las conductas de los alumnos relacionadas con la *rigidez geométrica*, la necesidad de armonizar los componentes *figurales* y *conceptuales* de las construcciones geométricas y la preponderancia del uso de justificaciones encaminadas a las explicaciones.

Introducción

Por la importancia epistemológica que la demostración matemática tiene para la Matemática y por la necesidad de mostrar a los estudiantes que ésta es una disciplina científica viva y en evolución, la demostración se ha convertido en un objeto de enseñanza de los cursos de Matemática de los niveles medio y superior. Sin embargo, su aprendizaje en estos niveles tiene diversas dificultades relacionadas con aspectos tan distintos como la concepción misma que se tiene de ella, su relación con otros tipos de discursos como es la argumentación, y la dificultad de los alumnos en manejar armónicamente los aspectos figurales y conceptuales de los objetos geométricos. Bajo esta tónica, se ha planteado un proyecto para estudiar los argumentos que se generan en el desarrollo de justificaciones geométricas en el nivel medio básico en una escuela secundaria en México en un ambiente de Geometría Dinámica, bajo una serie de consideraciones teóricas que nos han parecido interesantes y pertinentes para el trabajo.[1] La demostración, la prueba y concepciones de dos instituciones diferentes.

Lo que es una demostración es entendida comúnmente en Educación Matemática, por muchos de los miembros de los integrantes de esta comunidad, de una manera similar (o incluso igual) que como se entiende en la comunidad matemática. Esta concepción hace parecer a su aprendizaje como una meta lejana y quizá inalcanzable en el nivel medio. Sin embargo, es necesario comenzar por determinar qué significa este objeto y cuál podría ser su papel en la Educación Matemática y no en la Matemática misma. Nicolas Balacheff (1987, 148) incluye a la demostración matemática como un tipo particular de prueba que es aceptada en una comunidad específica: la matemática. Además, considera que una prueba es a su vez una explicación, por lo que una demostración matemática es una explicación que valida un hecho y que ha sido aceptada por la comunidad matemática. Desde este punto de vista la demostración se convierte en un objeto cuyo aprendizaje resulta difícil de alcanzar en la escuela del nivel medio, pues debe ser un discurso que tiene características muy particulares.

[1] Al respecto, quisiera agradecer a la Profra. Noraísa González, por su ayuda para la aplicación del experimento, y a la Dra. Claudia Acuña por sus valiosos comentarios.

Por otro lado, Godino, Batanero y Recio (Godino y Batanero, 1994; Godino y Recio, 2001) identifican diferentes instituciones en la que existe la demostración, es decir, diferentes comunidades que tienen como interés resolver un campo de problemas en común, y de éstas tres son las que nos interesan en este trabajo: la institución de la matemática pura, la institución de la matemática profesional y la institución de los educadores matemáticos. El significado de la demostración en cada una de estas instituciones es diferente, pues depende de sus prácticas particulares, de tal suerte que el significado que se le atribuye entre los matemáticos son parecidos, pero existen diferencias muy significativas con la de la matemática escolar debido a que ésta emerge de un conjunto de acciones de una comunidad escolar muy diferente a la matemática. Así que en esta institución escolar proponemos que el significado de la demostración está ligado a las prácticas argumentativas en las cuales se busca el convencimiento propio y de otros individuos de que un hecho matemático en particular ocurre. Consideraciones sobre las actividades

La parte experimental del proyecto consta de ocho actividades con triángulos y cuadriláteros, las cuales fueron diseñadas considerando la denominada *Unidad Cognitiva de Teoremas* (Boero et al., 1996), que se refiere a la existencia de una continuidad en el proceso de pasar de la producción de una conjetura a la construcción de la demostración que la valide. Este proceso se apoya en una situación que le permite al alumno generar la conjetura (por medio de una exploración), discutirla, sistematizarla, realizar nuevas exploraciones para producir finalmente la demostración. Además, el proceso no sólo permite proporcionar un enunciado de un hecho matemático, sino también provee de argumentos que pueden ser utilizados en la demostración. Este razonamiento de tipo argumentativo permite a los alumnos la exploración consciente de alternativas y el acercamiento progresivo al establecimiento de enunciados, así como la justificación de la plausibilidad de las conjeturas producidas.

Por otra parte, se tomó en cuenta el software para Geometría Dinámica (SGD) *Cabri-géomètre* por su potencialidad en el planteamiento de situaciones que involucren exploraciones dinámicas en el campo de la Geometría, pues las construcciones geométricas en la pantalla son un producto de operaciones concretas cuya corrección está controlada por una evaluación empírica, y aunque el control teórico no es logrado necesariamente de manera espontánea (Larios, 2003), puede resultar de actividades llevadas a cabo por los alumnos, lo cual es logrado en parte con la actividad controlada del *arrastre*.
De esta manera, de las ocho actividades cuatro están relacionadas con triángulos y las otras cuatro con cuadriláteros. En todas ellas se trabajaron con los *triángulos de los puntos medios* y los *cuadriláteros de los puntos medios* a partir de triángulos y cuadriláteros cualesquiera, respectivamente, y están vinculadas entre sí de tal manera que algunas sirvan de antecedente lógico a otras. Las actividades de los triángulos fueron:

- *T1.* Construcción de un triángulo y de su *triángulo de sus puntos medios*,[2] así como la observación de las relaciones de paralelismo entre los lados de ambos triángulos.
- *T2.* Construcción de un triángulo y de su *triángulo de sus puntos medios* a partir de las propiedades de paralelismo entre los lados de ambos.

[2] El *triángulo de los puntos medios* de un triángulo dado es el que se forma al considerar como vértices los puntos medios de los lados del triángulo original. En general, el *polígono de los puntos medios* de otro polígono se construye de manera semejante.

T3. Planteamiento de un procedimiento justificado para construir, a partir de un *triángulo de los puntos medios*, el triángulo original.
T4. Aplicación del procedimiento planteado en la actividad anterior, así como la verificación del mismo y su justificación.
Las actividades de los cuadriláteros fueron:
C1. Construcción de un cuadrilátero y de su *cuadrilátero de los puntos medios*, así como la observación de sus relaciones y de las propiedades de éste último como paralelogramo.
C2. Exploración del *cuadrilátero de los puntos medios* de un cuadrilátero relacionando aquél con las diagonales de éste para justificar la razón del paralelismo de los lados del aquél.
C3. Observación del caso de un cuadrilátero cóncavo y justificación de que se cumple la propiedad de paralelismo de los lados de su *cuadrilátero de los puntos medios*.
C4. Reconstrucción de un cuadrilátero a partir de su *cuadrilátero de los puntos medios*.

De esta manera se buscó en un primer momento que exploraran situaciones de paralelismo relacionadas con triángulos y cuadriláteros, a fin de que realizaran observaciones y las justificaran. Posteriormente tuvieron que realizar construcciones, y justificarlas, recuperando la información de las propiedades observadas durante las primeras construcciones.

Sobre los fenómenos observados

Rigidez geométrica

Uno de los fenómenos observados fue la denominada *rigidez geométrica* (Larios, 2003). Con este término me refiero a "que ciertos estudiantes no pueden manejar mentalmente una figura cuando no está en ciertas posiciones 'estándares' o no se pueden imaginar una figura cuando se mueve (bajo una traslación) o cuando cambia de forma (los lados cambian de posición o los ángulos son modificados, por ejemplo." En esta ocasión se notó una tendencia en usar figuras prototipo,[3] para las actividades de triángulos, triángulos casi isósceles (o casi equiláteros) y evitar los escálenos o los obtusángulos (Fig. 1), a pesar de que en varias ocasiones el investigador y la profesora deformaron las construcciones de algunos alumnos para evitar estos casos.

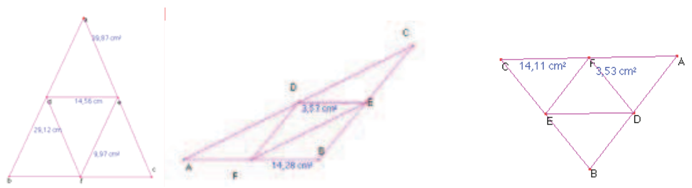

Fig. 1. Ejemplos de construcciones de triángulos realizadas por los alumnos.

Además se observó el fenómeno cognitivo que he denominado *arrastre inicio-fin*, que consiste en que los estudiantes consideraron sólo dos casos: la construcción que ha hecho antes de la operación de arrastre y la última obtenida cuando la operación de arrastre cesa; los momentos intermedios del movimiento no son percibidos como otros casos posibles de la construcción de la misma figura que es deformada, sino que son considerados como diagramas o esbozos intermedios que no tienen el mismo estatus de construcción geométrica que las construcciones

[3] Las figuras prototipo son aquellas que tienen una organización regular de contorno, de orientación o de forma. Estas figuras tienden a respetar el hecho de tener límites cerrados y a privilegiar la orientación (como la horizontal o la vertical) y la forma (como ser regular, simple y simétricas).

iniciales y finales, como si al estar en movimiento no estuviese representando un triángulo, sino sólo su deformación. El siguiente diálogo entre la profesora y un estudiante ilustra esta situación:

Profesor:	(Después de arrastrar un vértice varias veces) "¿Ves todos los diferentes triángulos que se forman?"
Alumno:	"Sólo dos triángulos se forman."

El comentario del estudiante se refirió al primer triángulo y al que quedó al final. Este tipo de comentarios fue acompañado con una actitud de indiferencia del alumno hacia los casos intermedios. Además, esta dificultad nos muestra que al parecer la aprehensión, por parte de los alumnos, de las capacidades dinámicas del software y de la evidencia dinámica del dibujo no es automática, sino que requiere de un desarrollo cognitivo.

Componentes figurales y conceptuales

Por otro lado, y sobre todo en las actividades donde se les pidió que justificaran sus construcciones o los procedimientos para realizarlas (*T3*, *T4* y *C4*), los alumnos comúnmente utilizaron hipótesis que no fueron las lógicamente "correctas", sino las que perceptualmente les parecían mejor. En otras palabras, las condiciones iniciales necesarias para llevar a cabo construcciones que permitía invertir los procedimientos de las actividades iniciales de cada bloque (y que de hecho eran resultado de dichas actividades), no fueron tomadas en cuenta de manera reiterada. Por ejemplo, J.G. y L.J. escribieron las siguientes respuestas en la actividad

T3:[4]

3c) ¿Cómo van a quedar los lados del triángulo grande con relación a los del triángulo chico?, ¿por qué? Van a quedar paralelos porque son los mismos lados.

3d) ¿La posición de los lados del triángulo grande puede ser cualquiera? No porque tienen que estar paralelos con los del triángulo chico.

3e) ¿Dónde van a quedar los vértices del triángulo grande? Enfrente de un lado del triángulo chico.

Todas ellas parecen respuestas correctas y consideran las propiedades de paralelismo entre los lados de los triángulos que se observaron en las actividades anteriores, sin embargo en la siguiente pregunta son desatendidas:

4. Escriban el procedimiento en el que pensaron para construir el triángulo grande: En hacer 3 triángulos de la misma medida en cada lado del primer triángulo.

De hecho su construcción (Fig. 2) sigue ésta última idea, y que evidentemente no tiene nada que ver con las respuestas anteriores.

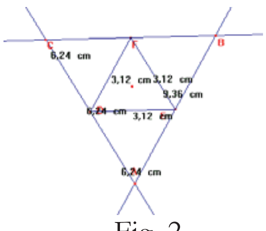

Fig. 2.

Otro ejemplo lo proporcionan los mismos alumnos, en la actividad *C2*, al pedírseles que opinen si las actividades de los cuadriláteros están relacionadas con las de los triángulos:

[4] Las respuestas aparecen como texto subrayado.

4d) ¿Lo último tiene alguna relación con lo que se hizo con los triángulo? Sí.
4e) ¿Cuál sería esa relación? En que se hicieron triángulos.

Sin embargo no abundan más en la respuesta y las siguientes justificaciones no hacen ninguna referencia al trabajo realizado con los triángulos. Atribuimos este tipo de conducta a la disociación entre los componente figurales y conceptuales de los objetos que están en juego. Pareciera que los alumnos no establecen una relación conceptual o lógica entre los objetos (triángulos y cuadriláteros), pero tampoco entre los diversos momentos (actividades) realizadas. El componente figural tiene una gran relevancia para elegir las respuestas a las preguntas planteadas.

Justificaciones que explican

Ninguno de los alumnos se acercó a hacer una demostración, en el sentido de la institución matemática. En las actividades en las que se les pidió a los alumnos que justificaran algún suceso, observación o construcción se recurrió principalmente a verificaciones empíricas o bien a justificaciones que tienen como objetivo explicar. El razonamiento deductivo no estuvo totalmente ausente de las respuestas de los alumnos, pero las verificaciones empíricas y las explicaciones como justificación tuvieron una mayor presencia.

Comentarios finales

A lo largo del experimento se manifestaron conductas en los estudiantes que muestran que el manejo de los componentes figurales y conceptuales de los objetos geométricos utilizados no están en armonía, es decir, que la inclinación a considerar los aspectos figurales por encima de los conceptuales hace que no exista una fusión entre ambos que permita su manejo óptimo.
Además, la presencia de justificaciones argumentativas y la aparente falta de una necesidad "natural" por justificar utilizando deducciones en este nivel educativo podría parecer normal porque en términos del contrato didáctico sería necesario pedir la demostración de una manera explícita, sin embargo creo que ello lleva de manera irremediable a replantear el significado de la demostración en el contexto educativo, tanto el que se le atribuye por parte de los profesores como aquél que le atribuyen los alumnos.
No obstante, a pesar de que en la institución de los educadores matemáticos el significado de la demostración debe ser (y de hecho es) diferente al que se tiene en la institución matemática, aquél debe tener como referencia a éste último. A pesar de todas las funciones diferentes que tiene la demostración en educación matemática y que han sido reportadas en la literatura, desde mi punto de vista, en la demostración en la escuela debe aparecer una estructura de razonamiento que si bien no tiene que ser netamente argumentativa (o lógica), debe tener argumentos matemáticos cuya validez haya sido establecida unidos de una manera coherente.

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics 18*(2), 146-176.
Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. y Mariotti, M.A. (1996). Challenging the traditional school

approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113-120). Valencia, España.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics 24*, 139-162.

Godino, J.D. y Batanero B., C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14*(3), 325-355.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias 19*(3), 405-414.

Larios, O., V. (2003). Geometrical rigidity: an obstacle in using dynamic geometry software in a geometry course. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1-2). Bellaria, Italia.

Mariotti, M.A. y Maracci, M. (1999). Conjeturing and proving in problem-solving situation. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 265-272). Haifa, Israel.