Enseñanza del Cálculo con Animaciones

José Roberto Mandujano
Escuela Superior de Cómputo
México
jrmandujano@yahoo.com.mx
Visualización – Nivel Superior

Resumen

Este trabajo tiene como propósito mostrar, con ejemplos, las ventajas de utilizar un software en la enseñanza de las Matemáticas. Se pone más énfasis en las animaciones, pues con éstas podemos simular o reproducir una gran variedad de problemas de Cálculo. Con esto el alumno tiene la oportunidad de visualizar mejor los conceptos del Cálculo, además puede ver para qué sirve resolver una ecuación, una integral, una derivada, etc. Esta utilidad y visualidad es fundamental para un alumno, pues es de esta forma como puede empezar a interesarse por la Matemática.

Animación en matemáticas.

Muchos problemas en Matemáticas es posible reproducirlos o simularlos, por ejemplo, el movimiento de una partícula que se mueve sobre el eje Y de acuerdo a la ecuación $y = y(t)$. Para hacer una película debemos generar las fotografías que la componen y en las fotografías poner los objetos que la forman. Habiendo hecho las fotografías, las pasamos a cierta velocidad para ver la película. El software Maple tiene instrucciones para hacer todo esto y por lo tanto la manera de hacer películas.

¿ Cómo se hace una animación ?.

En una animación tenemos objetos que no se mueven en un intervalo de tiempo ***[a,b]*** y los que si lo hacen. La instrucción para hacer animación es

plots[display](display(***{Objetos que no se mueven}*** *),display(* ***Objetos que se mueven****,insequence=true));*______**(1**)

Los ***Objetos que se mueven*** en el tiempo deben escribirse con el siguiente formato:

*seq(display(***Lista de objetos que se mueven***),i=1..n)*

Donde la lista de objetos que se mueven son instrucciones de objetos geométricos que nos indican dónde colocarlos (con respecto a un sistema de coordenadas XY) en el instante $t\left[i\right]$, donde $t\left[i\right]$ es un elemento de la sucesión :

t:=seq[a+(b-a)*i/n,i=0..n]:__________________**(2)**

y la cual debe ir antes de (1). La instrucción *insequence=true* **,** que aparece en (1), tiene como objetivo pasar las fotografías una por una, empezando con la número *1* hasta la *n*. Conviene señalar que la sucesión de tiempos generada por *(2)* se enumera desde *1* y no *0*. El intervalo de tiempo *[a,b]* así como el número de fotografías *n* uno los debe especificar.

¿ Cómo se forman los objetos de la animación ?

Por otro lado los objetos que intervienen en la animación se pueden construir con la siguiente lista de instrucciones :

```
> with(plottools);
```

$$[arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutin, cutout, cylinder, disk, dodecahedron, ellipse, ellipticArc, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, line, octahedron, pieslice, point, polygon, project, rectangle, reflect, rotate, scale, semitorus, sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate, vrml]$$

o de combinaciones de ellos. También se pueden construir objetos que se puedan generar con las instrucciones ***plot(), spacecurve()*** o ***plot3d(),*** tomando en cuenta que no se pueden mezclar objetos generados por la primera instrucción y la segunda o la tercera.

Simulación de una partícula que se mueve sobre el eje X.

Una partícula se mueve sobre el eje X de acuerdo con la ecuación $x = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$. Simular el movimiento en el intervalo de tiempo $[-1, 9]$.

Ecuación de movimiento de la partícula.

```
> x:=t->t^3-12*t^2+36*t-20;
```

$$x := t \to t^3 - 12\, t^2 + 36\, t - 20$$

Intervalo de tiempo

```
> a:=-1;
```

$$a := -1$$

```
> b:=9;
```

$$b := 9$$

Gráfica de la posición de la partícula contra el tiempo

```
> plot(x(t),t=-1..9,color=green,thickness=3);
```

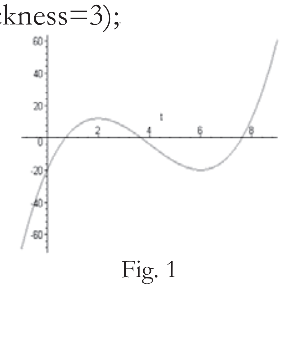

Fig. 1

```
> n:=100:
> t:=[seq(a+(b-a)*i/n,i=0..n)]:
```

Simulamos la partícula con un disco de centro $\left(x\left(t\left[i\right]\right),0\right)$ y radio 4.

```
> plots[display](seq(display(   disk([x(t[i]),0], 4,color=red)
),i=1..n+1),scaling=CONSTRAINED,insequence=true);
```

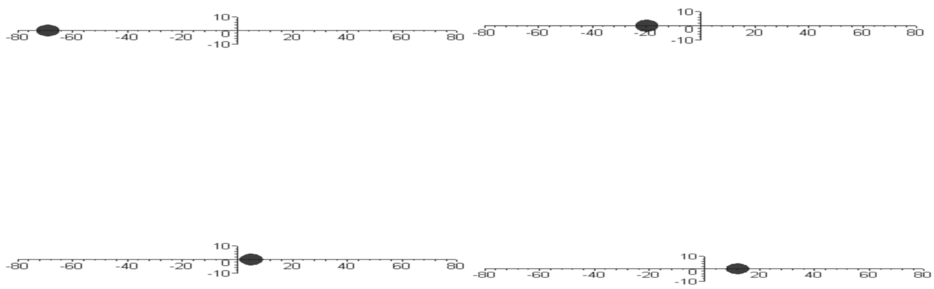

Fig. 2

Simulación del ascenso de agua en un tanque cónico.

Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular recto de *12 m.* de alto y *6 m.* de radio en la base. Si se suministra agua al tanque a razón de *10 metros cúbicos por minuto* simular el ascenso del agua.

Definimos la ecuación diferencial del descenso de agua en el tanque

```
> edo:=diff(h(t),t)=-40/(Pi*h(t)^2);
```

$$edo := \frac{d}{dt}\,\mathrm{h}(t) = -\frac{40}{\pi\,\mathrm{h}(t)^2}$$

Resolvemos la ecuación diferencial, poniendo la condición inicial $h\left(0\right)=12$.

```
> dsolve({edo,h(0)=12},h(t),explicit=true);
```

$$\mathrm{h}(t) = \frac{((-120\,t + 1728\,\pi)\,\pi^2)^{(1/3)}}{\pi}$$

```
> h:=t->1/Pi*((-120*t+1728*Pi)*Pi^2)^(1/3);
```

$$h := t \rightarrow \frac{((-120\,t + 1728\,\pi)\,\pi^2)^{(1/3)}}{\pi}$$

```
> solve(h(t)=0,t);
```

$$\frac{72\,\pi}{5}$$

```
> a:=0:
> b:=72*Pi/5-0.001:
> n:=50:
```

Simulamos el tanque con las ecuaciones paramétricas de un cono de radio seis y altura doce. Se selecciona el estilo WIREFRAM para que se pueda ver su contenido

```
> l:=plot3d([u*cos(v),u*sin(v),2*u],u=0..6,v=0..2*Pi, color=black, style=WIREFRAME):
> t:=[seq(a+(b-a)*i/n,i=0..n)]:
```

Simulamos el agua con un cono en color azul

```
> plots[display](display({l}),display(seq(display(    cone([0,0,0],h(t[i])/2 ,h(t[i]),color=blue)
),i=1..n+1),insequence=true));
```

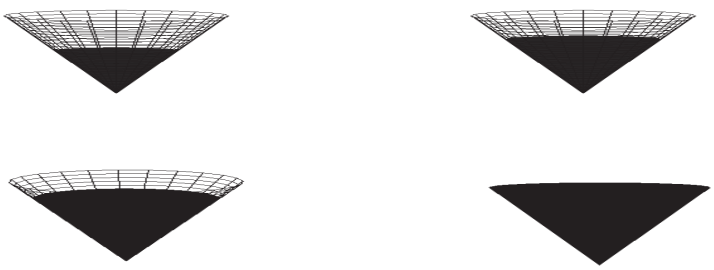

Fig. 3

Simulación para encontrar el cono de volumen máximo inscrito en una esfera.

Se quiere encontrar el cono de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio uno y con centro en el origen. Utilizaremos la simulación para resolver el problema.

La esfera

```
> l:=sphereplot(1,theta=Pi/2..3*Pi/2,phi=0..Pi):
> R:=1:
> r:=y->sqrt(1-y^2);
```

$$r := x \rightarrow \sqrt{1 - x^2}$$

```
>h:=y->y+1:
```

Volumen del cono en función de la variable y

```
> V:=y->Pi*r(y)^2*h(y)/3:
```

```
> a:=-R:
> b:=R:
> n:=50:
> t:=[seq(a+(b-a)*i/n,i=0..n)]:
```

La simulación se hace inscribiendo diferentes conos en la esfera y midiendo su volumen

```
> plots[display](display(l), display(seq(display(   cone([0,0,-1],r(t[i]),h(t[i]),color=blue),
textplot3d([0,0,2,V=convert(V(t[i]),float)], align={ABOVE,RIGHT}),
textplot3d([0,0,1.8,r=convert(r(t[i]),float)], align={ABOVE,RIGHT}),
textplot3d([0,0,1.5,h=convert(h(t[i]),float)],
align={ABOVE,RIGHT})),i=2..n),insequence=true));
```

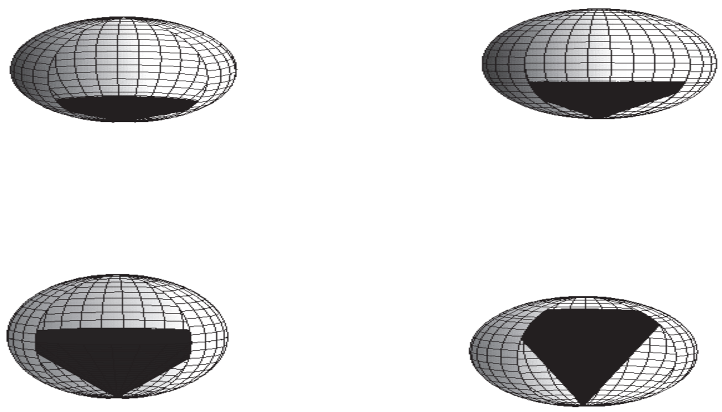

Fig. 4

Simulación para generar un sólido de revolución.

La circunferencia con centro en $(2,0)$ y de radio uno se gira sobre el eje Y, realizar una animación para observar cómo se genera el sólido de revolución.

```
> f:=y->sqrt(1-y^2)+2;
```

$$f := y \to \sqrt{1-y^2}+2$$

```
> g:=y->-sqrt(1-y^2)+2;
```

$$g := y \to -\sqrt{1-y^2}+2$$

```
> m1:=plot(f(y),y=-1..1,color=red,thickness=3):
> m2:=plot(g(y),y=-1..1,color=green,thickness=3):
> display({m1,m2},view=[-3..3,-3..3]);
> a:=1; b:=-1; c:=0;
```

$$a := 1,\ b := -1,\ c := 0$$

```
> alpha:=0; beta:=2*Pi;
```

$$\alpha := 0 \text{ , } \beta := 2\,\pi$$

> n:=20;

Se dibuja el sólido de revolución a través de las ecuaciones :

$$x = c + \left(f(y) - c\right)\cos\left(u\right)$$
$$y = y$$
$$z = \left(f(y) - c\right)sen(u)$$

que corresponden a las ecuaciones paramétricas del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la región :

$$R = \left\{\left(x, y\right)\middle| 0 \le x \le f(y), a \le y \le b\right\}$$

sobre la recta $x = c$.

> plots[display](display({p,l1,l2}),display(seq(display(plot3d([c+(f(y)-c)*cos(u),y,(f(y)-c)*sin(u)],u=0..t[i] , y=a..b,color=magenta), plot3d([c+(g(y)-c)*cos(u),y,(g(y)-c)*sin(u)], u=0..t[i], y=a..b,color=red)),i=2..n+1),insequence=true));

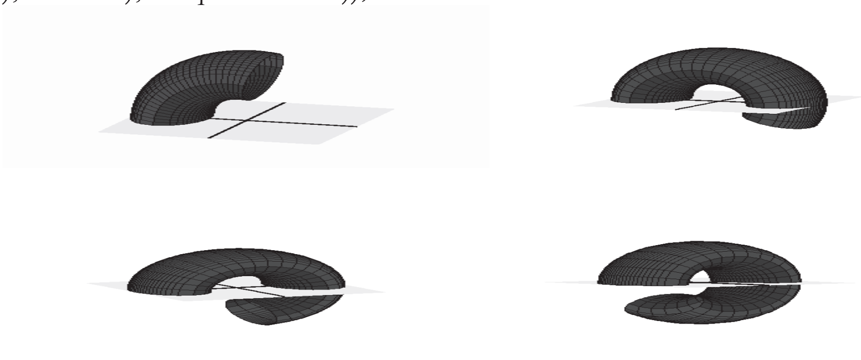

Fig. 5

Conclusiones

El uso de un software en la enseñanza de las matemáticas es imprescindible por sus herramientas para hacer cálculos rápidamente, de graficación y de animación. Estos elementos permiten que una clase en que se utilice un software, éste colaborará en el desarrollo de la clase para hacerla más amena e interesante para el alumno y el maestro. En especial la animación funciona como un "laboratorio matemático" donde podemos simular los problemas de esta área, esto de alguna manera resuelve algunas de las interrogantes planteadas por los alumnos . . . ¿ para qué sirven los cálculos que estoy haciendo ? .

Referencias Bibliograficas

Adams, P., Smith, K. y Vyborny, R. (2004) *Introduction To Mathematics With Maple*. USA: World Scientific Publishing Company.

Maple Animation [Software de computadora]. (2003). John Putz, CRC Press.

Adams, R. (2003). *Single Variable Calculus*. USA: Pearson Education.