Continuidad y Ruptura de Significados en el Tratamiento Escolar de los Exponentes

Gustavo Martínez
Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero
México
gmartinez@cimateuagro.org
Socioepistemología – Nivel Medio, Superior

Resumen

En trabajos anteriores (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez, 2000, 2002; Martínez & Farfán, 2003) se han estudiado las interacciones didácticas de las convenciones matemáticas presentes en los exponentes y se han dado las evidencias que permiten aislar la presencia de un mecanismo común de construcción de conocimiento –al que hemos designado con la expresión *convención matemática* (CM en lo que sigue)– en las diversas formulaciones que asignan significados a los exponentes no naturales. En este escrito hacemos uso de la herramienta conceptual que proporciona nuestra caracterización de la CM para la descripción y explicación de los fenómenos didácticos de continuidad y ruptura de significados.

Introducción y objetivo de investigación

En el marco de la metodología llamada Ingeniería Didáctica los *análisis didáctico* y *cognitivo* han sido usados extensamente para establecer las relaciones entre las formas de transmisión conocimiento y las concepciones de los estudiantes con quien se pondrá en escena la Ingeniería Didáctica. A esto se agrega el *análisis epistemológico* que pretende aislar la naturaleza del conocimiento en juego. Estos análisis en un su conjunto proporcionan el estado inicial del sistema didáctico (saber, profesor, estudiante) cuya evolución ulterior es modelada por la Ingeniería. En particular dentro del análisis didáctico se llevan a cabo investigaciones con profesores en servicio, libros de texto y programas de estudio centrados en un conocimiento matemático específico designado comúnmente por la estructura matemática presente en programación temática de los contenidos. Estos análisis comúnmente se centran en objetos y procesos identificables por la estructura matemática en juego y es por ello que encontramos trabajos del tipo: análisis didáctico de la derivada o análisis didáctico de los números negativos o más globalmente análisis didáctico del Análisis o el Álgebra.

Por nuestra parte estamos interesados en explotar al máximo la idea central del *racionalismo científico* que señala que la *dirección epistemológica* es de la razón hacia los fenómenos estudiados. Una de las consecuencias de esta consideración es que la primera tarea de una ciencia es construir una teoría que a su vez construya su objeto de estudio. Es por ello que este escrito presentamos un análisis didáctico que utiliza la CM como herramienta para precisar su objeto de estudio. De manera específica la CM ha resultado útil para describir y explicar los fenómenos de continuidad y ruptura de significados relacionados con el tratamiento escolar de los exponentes, al poner el foco de atención en los procesos de construcción escolar de significados.

Marco teórico y metodológico

En el presente escrito están contenidos algunos de los hallazgos de una investigación que contribuye a los esfuerzos de un grupo de investigadores interesados en la caracterización de la construcción del conocimiento matemático. De manera retrospectiva, a esta línea de investigación se le ha dado por llamar *perspectiva socioepistemológica*. La hipótesis teórica fundamental de tal perspectiva consiste en considerar que la construcción del conocimiento puede ser explicada y descrita a través de diferentes componentes: a) la epistemológica, b) la de la comunicación, c) la cognitiva y d) la social. En términos metodológicos esta consideración determina un *sistema de componentes* fundamental a estudiar en las investigaciones y teóricamente representa la unidad mínima del análisis socioepistemológico. Se postula que la determinación de principios, que regulan la construcción del conocimiento, proporciona los elementos necesarios para predecir e intervenir en la evolución de una comunidad integrada con el objetivo de estudiar un contenido o enfrentada a situaciones problemáticas de tipo matemático. En particular en este documento se reporta una síntesis, desde la comunicación, de los elementos generales que permiten utilizar nuestra caracterización de la CM para el análisis de los procesos de construcción escolar de significados.

Significados y lo que señala el consenso escolar

En este escrito se utiliza la distinción clásica entre significado y significante cuando se hace referencia a la representación. El significante es algo que sustituye un objeto a acontecimiento que es el significado. Más precisamente se entenderá, de acuerdo con (Vergnaud, 1990), que:

"...el significado es una relación de la persona con las situaciones y con los significantes. Más precisamente, son los esquemas evocados por una situación o por un significante en el sujeto individual, los que constituyen el significado de esa situación o de ese significante para ese individuo".

En este estudio el significante será casi siempre un signo algebraico basado en el lenguaje numérico - alfabético. En particular interesa el significado de los signos de la forma a^x. En este sentido en casi cualquier libro de texto de Álgebra es posible notar la siguiente secuenciación de los contenidos relativos a los exponentes: Exponente a través del Modelo de Multiplicación Reiterada (MMR)[1], exponente cero, exponentes negativos y exponentes fraccionarios. Cabe señalar que esta secuenciación es de carácter transversal; pues no necesariamente los temas son tratados uno después del otro. Lo anterior muestra que dentro de la matemática escolar el problema de la introducción del concepto de exponente se concibe como un problema de extensión de dominio de valores que puede tomar x en la expresión a^x; sin bien el caso cuando x es un número irracional no es tratado en los textos de Álgebra. Un aspecto marca la teleología instruccional de la secuenciación: aplicar eficientemente las *reglas de transformación* siguientes: R1) $a^0 = 1$, R2) $a^{-n} = 1/a^n$ & $1/a^n = a^{-n}$, R3) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.
Dichas transformaciones son utilizadas en la escuela para realizar operaciones con monomios, aplicar reglas de derivación e integración y para la definición de la función

[1] El MMR es la definición canónica para el tratamiento de los exponentes contenidos en el conjunto $\boldsymbol{N^*} = \{2, 3, 4, 5,\ldots\}$. Es decir si $n \in \boldsymbol{N^*}$ se tiene que $a^n = (a)(a)\ldots(a)$ [n-veces]. Se señala que el conjunto $\boldsymbol{N^*}$ no es el conjunto de los números naturales. Más adelante se clarifica los motivos de la elección de $\boldsymbol{N^*}$.

exponencial y logaritmo. Este fin instruccional determina que el origen y la función de las reglas *R*1, *R*2 y *R*3 *no son objetos de enseñanza*.

Si bien se ha hecho la observación de que el origen y la función de las reglas de transformación *no son objetos de enseñanza* es de señalarse que los libros de texto comúnmente manejan justificaciones que tienen el papel de *objetos transaccionales* entre lo antiguo y lo nuevo (Chevallard, 1997); pues en las ocasiones de uso, tales como los ejercicios propuestos, ellas no juegan ningún papel. El análisis del contenido de los libros revela que la introducción de exponentes no naturales se basa en el argumento de que su definición ha de ser de tal manera, que las Leyes de los Exponentes para los Naturales (LEN) se conserven: 1) $A^nA^m=A^{n+m}$, 2) $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n>m$ y 3) $(A^n)^m=A^{nm}$. Más precisamente, los argumentos centran la atención en la estructura operativa de las LEN para construir el significado de los exponentes no naturales. Tal y como lo muestra la Tabla 1 no hay uniformidad sobre cual de las LEN debe seguirse cumpliendo (los textos y el exponente cero se han tomado a título de ejemplo por ser representativos en lo que respecta a los argumentos):

Libro	**Argumento para introducir exponentes no naturales**	**Argumento para introducir el exponente cero**
Wentworth y Smith (1985). *Elementos de álgebra.*	*"Los exponentes fraccionarios (negativos) deben interpretarse de manera tal que a ellos se apliquen todas las leyes que se aplican a los exponentes enteros positivos"* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	*"Para que el símbolo* a^0 *obedezca las leyes generales de las otras potencias, debe tenerse:* $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$ *; o, lo que es lo mismo,* $a^0 \cdot a^m = 1 \cdot a^m$ *; y por tanto,* $a^0 = 1$. *Así pues,* *Toda cantidad elevada a la cero es igual a 1".*
Rees et al. (1982). *Álgebra contemporá-nea.*	Para el caso de los exponentes negativos que se cumpla la *ley de los exponentes para la división* $a^m/a^n = a^{m-n}$, $m>n$ Para el caso de los exponentes de la forma $1/n$ que se cumpla la *ley de la potencia de una potencia.*	*"ley de los exponentes para la división:* $a^m/a^n = a^{m-n}$, $m>n$ *Se demostrará más adelante que esta ley se cumple si* $m<n$ *pero aquí se considerará el caso particular cuando* $m=n$. *En este caso, se obtiene :* $a^n/a^n = a^{n-n} = a^0$ *La definición* [a través del modelo MMR] *es válida únicamente para el caso en que n sea un entero positivo por lo que* a^0 *no tiene sentido; sin embargo,* $a^n/a^n = 1$ *de donde es lógico definir a* a^0 *como el número* 1*".*

Tabla 1. Argumentos en los textos para introducir exponentes no naturales

El mecanismo convención matemática[2]

La acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo sobre el concepto de

[2] Para más detalles se puede consultar (Martínez y Farfán, 2003).

exponente no natural muestra la presencia de un mecanismo uniforme de construcción de conocimiento, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar.
Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos).* Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo con la expresión: *convención matemática.* Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de los objetivos teóricos específicos.

Lo anterior motiva a centrar nuestra atención en los procesos de integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Teóricamente, desde un principio, esta búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados. Es por ello que de manera específica la CM ha resultado útil para describir y explicar los fenómenos de continuidad y ruptura de significados relacionados con el tratamiento escolar de los exponentes.

Ruptura y continuidad de significados

De acuerdo a la caracterización del mecanismo CM, estamos interesados en los procesos que se ponen en funcionamiento con el objetivo de buscar una cierta integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Como es usual es quien está en proceso de construcción de conocimiento el que percibe más claramente las rupturas existentes en una organización de los saberes. En este caso algunos razonamientos de estudiantes, relativos al tratamiento de los exponentes no naturales, nos muestran una primer ruptura. Tales razonamientos tienen la particularidad de que, a pesar de ser coherentes, llevan a repuestas que no están de acuerdo con lo aceptado dentro del corpus algebraico de conocimientos. En diversos niveles escolares, pero particularmente en el nivel secundario (alumnos de 12-15 años) y en medio superior (alumnos de 15-18 años), podemos encontrar argumentos como los siguientes[3]:

Argumento *A.* $2^0 = 0$ ya que 'el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada'.
Argumento *B.* $2^0 = 2$ ya 'el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2'.
Argumento *C.* $2^1 = (2)(2) = 4$ ya que 'multiplicamos una vez'.
Argumento *D.* $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$.
Argumento *E.* $2^{-4} = -16$ ya que '$2^4 = 16$ y se le pone un signo'.

La coherencia de los argumentos anteriores descansa sobre varios aspectos solidarios:
a) El significado del cero como representante de la "nada" o de "ninguno",
b) la utilización del MMR para el tratamiento de los exponentes y 3
c) la segmentación del número negativo como "número positivo" con "el signo menos". Estas consideraciones y lo que señala el consenso descrito en la sección anterior, nos lleva ante la necesidad de dos rupturas para construir el significado del exponente no natural: con el MMR y con los significados contextuales de los números cero y negativos. Sin embargo, de acuerdo con nuestro foco de interés, debemos tomar en cuenta que esas opciones de ruptura poseen contrapartes que buscan la continuidad. Esta circunstancia

[3] Para un explicación detallada de estas y otras respuestas puede ser consultado (Martínez, 2002).

queda ejemplificada con los siguientes argumentos que son la búsqueda de dar continuidad

Valor efectuado de 10^5	=	Se escribe la cifra 1	→	Se coloca la cantidad de ceros que indica el exponente, exponente 5, 5 ceros	→	A la derecha de la cifra 1 si el exponente es positivo
Valor efectuado de 10^{-5}	=	Se escribe la cifra 1	→	Se coloca la cantidad de ceros que indica el exponente, exponente -5, 5 ceros	→	A la izquierda de la cifra 1 si el exponente es negativo y se coloca un punto decimal después del primer cero: 0.00001

[…]

Existen algunos casos especiales como:

$10^1 = 10$ Un cero a la derecha de 1

$10^0 = 1$ Ningún cero a la derecha o a la izquierda de 1

$10^{-1} = 0.1$ Un cero a la izquierda de 1

al MMR en relación al significado de cero como representante de la "nada" o de la "ausencia":

- *Álgebra de Phillips* (1985) "Supongamos que a^0 significa multiplicar cero veces a la base a, entonces el producto de a^0 por a^n será multiplicar a (n+0)-veces [es decir n veces] y el único número que deja invariable a un número por multiplicación es el uno por lo que a^0=1".

- *Un profesor de bachillerato* "Si 2^3=2*2*2*1; 2^2=2*2*1; 2^1=2*1; 2^0=1; el exponente cero indica cuantas veces se multiplica el 2 por la unidad".

En este punto es significativo señalar el tratamiento que generalmente se hace del exponente uno; ya que se le da la interpretación de *aparece una vez* en vez de multiplicación reiterada –que no tendría sentido pues la multiplicación es una operación binaria–. Esta ruptura es señalada por aquellos estudiantes de secundara que escriben " 2^1 = 2* " o dicen 'dos a la uno es 2 por...'). Es de señalar que en textos de corte más formal se puede encontrar una definición del MMR de manera inductiva, pues establecen que para $n \in \boldsymbol{N^*}$ se tiene que $a^n = (a)(a)\ldots(a)$ [n-1 multiplicaciones] por lo que en este contexto el exponente uno no tiene cabida más que como convención matemática (expresada como definición o axioma). Aquí es donde se justifica nuestra elección del conjunto ***N****.

En el mismo sentido que el anterior existen tratamientos que son la respuesta por conciliar el MMR y el significado contextual de los números negativos a través de cierta noción de *negatividad* como "proceso inverso" y "estar a la izquierda" al momento de reforzar la explicación. Como representantes de esta opción tenemos:

- *Curso propedéutico. Física y Matemáticas* (Conalep-Sep, 1988)(los subrayados son nuestros, negritas en el original)

"Los ejemplos anteriores representan potencias con exponentes positivos: 10^2, 10^3, 10^4, etc. Pero ¿qué significa una potencia con exponente negativo? 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, etc.

El <u>inverso</u> de un número es el cociente de dividir 1 entre ese número.
El <u>inverso</u> de 84 es 1/84; El <u>inverso</u> de 100 es 1/100; 10^2 es una potencia de 10 y el inverso se esta potencia es $1/10^2$.

Esto se puede representar así:
Con una base y un exponente: 10^{-2}; Como un producto: $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$; Por su valor efectuado: $\frac{1}{100}=0.01$

El signo - (menos) colocado delante del exponente de una potencia <u>representa el inverso</u> de esa potencia. $10^{-2}=\frac{1}{10^2}$ [...]

Procedimiento para Desarrollar el Valor Efectuado de una Potencia de 10

- *Un profesor de bachillerato* "Según entiendo 2 elevado a la potencia 2, se interpreta como 2*2, 2 elevado a la potencia 3, se interpreta como 2*2*2, etc., según el documento debemos diseñar una situación en la cual la multiplicación reiterada no puede ser mantenida fuera de los casos 2, 3, 4, ... aunque me permito afirmar lo siguiente:

El número 2 elevado a la potencia –2, se interpreta como ½*½, el numero 2 elevado a la potencia –3, se interpreta como ½*½*½, etc., en consecuencia afirmo que la multiplicación reiterada si puede ser mantenida fuera de los casos 2,3,4, ...

Según mi experiencia docente 2 elevado a la potencia n, es multiplicar 2 n – veces, aquí debemos entender que estamos multiplicando reiteradamente la base (2).

Para el caso 2 elevado a la potencia $-n$, se debe entender que la base ya no es el 2, sino que la base es ½, en consecuencia se debe ser cuidadoso con las bases cuando se esta usando la multiplicación reiterada, todo lo anterior puede ser generalizado para cualesquier base x, con x distinto de cero y por tanto creo que si puede ser mantenida la multiplicación reiterada fuera de los casos 2, 3,4,...".

A manera de conclusión

En este escrito se ha mostrado la potencialidad descriptiva y explicativa del mecanismo CM; pues ha permitido dar unidad y coherencia a los diferentes tratamientos que con fines de comunicación y transmisión se pudieron encontrar en relación a los exponentes. Sostenemos que esto no hubiera sido posible sin la herramienta conceptual que proporciona la CM; ya que algunos de tales tratamientos hubieran quedado fuera al atender solamente a los significados que el consenso escolar les asigna a los exponentes no naturales. Por ejemplo, en tal contexto la posición didáctica del profesor, que extiende el Modelo de Multiplicación Reiterada a los números negativos, podría ser explicada como un recurso mnemotécnico que no contiene ningún verdadero significado y no, como muestra el análisis, ser explicada como una alternativa para evitar rupturas con el significado contextual de los números negativos. El análisis didáctico a través de la CM para otros contenidos matemáticos es motivo para estudios ulteriores.

Referencias Bibliográficas

CONALEP-SEP. (1988). *Curso propedéutico. Física y Matemáticas II*. México: CONALEP-SEP.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G.L. Beitía (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 14, pp. 524-531). México.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C.R. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 15, Tomo I, pp. 225-231). México.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega Trad.) Colombia: Universidad del Valle - Peter Lang.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1), 45 – 78.

Martínez, G. y Farfán, R. M. (en prensa). La convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. *Acta Latinoamericana de matemática Educativa.*

Philips (1985). *Álgebra*. México: UTEHA.

Rees, P.K., Sparks, F.W. y Sparks R.C. (1982). *Álgebra contemporánea*. México: McGraw-Hill.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des Champs conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques 10*(2/3), 133-170.

Wentworth, J. y Smith, D.E. (1985). *Elementos de Álgebra*. México: Editorial Porrúa.