Los Procesos de Convención Matemática como Constituyentes en la Construcción Social de la Matemática de la Variación y el Cambio[•]

Gustavo Martínez
Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero
México
gmartinez@cimateuagro.org
Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

En investigaciones anteriores (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez, 2000, 2002; Martínez & Farfán, 2003) se han presentado caracterizaciones de un proceso particular de construcción de conocimiento al que hemos llamado "convención matemática". Aquí presentamos nuestros avances más recientes que trabajan con la hipótesis de que tal proceso es parte constitutiva de la construcción social del conocimiento. En particular aquí presentamos algunos ejemplos que muestran su presencia en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio. Al mismo tiempo se presenta una articulación teórica de la noción de "convención matemática" como proceso de generación de conocimiento en el marco de la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa.

1. Introducción

Este artículo parte de la idea de que unos de los principales objetivos de la matemática educativa es explicar cómo se construye conocimiento matemático. Dentro de nuestro grupo de investigación existen diversas líneas que persiguen este objetivo (Buendía 2004; Arrieta 2003, Ferrari 2004). Éstas se aproximan a la problemática de la explicación del conocimiento de maneras diversas, pero todas ellas exploran el papel de "lo social" en la construcción de conocimiento.

Al respecto, para Cantoral (2002), por ejemplo, "el término socioepistemología, pretende plantear un distinción de origen con las perspectivas epistemológicas tradicionales". La epistemología tradicional asume que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas. De esta manera el ser humano era considerado como un "científico activo" que construía hipótesis sobre el mundo, que reflexionaba sobres sus experiencias, que interactuaba con su entorno físico y que elaboraba estructuras de pensamiento cada vez más elaboradas. Sin abandonar los resultados de la epistemología tradicional, hoy es cada vez más claro el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales deben desempeñar en una explicación de conocimiento desde la Matemática Educativa. Una aproximación a este programa científico lo presente la aproximación socioepistemológica. En particular este trabajo presenta las contribuciones recientes al programa socioepistemológico por parte de la línea de investigación que hemos denominado *Los procesos de convención matemática como parte constitutiva de la construcción social del conocimiento.*

[•] Este trabajo forma parte del proyecto financiado por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero. Clave GUE-2002-C0-7626.

2. Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

Consideramos que el pensamiento matemático es una forma de pensar particular que permite al ser humano transformarse a si mismo y a su realidad. Nuestro interés básico, como matemáticos educativos, consiste, entonces, en contribuir a entender el desarrollo del pensamiento matemático en situación escolar; para que los conocimientos construidos en su seno formen parte "viva" de la manera de pensar de las personas; es decir que sean conocimientos funcionales. Este tipo de conocimientos serían los elementos constituyentes del pensamiento matemático. De esta manera, nuestros esfuerzos de investigación se encaminan a determinar bajo qué condiciones las personas son capaces de poner en funcionamiento los conocimientos matemáticos ante situaciones problemáticas que lo requieren. Nuestra apuesta teórica consiste en formular la hipótesis de que son las circunstancias de construcción de conocimiento las que determinan/condicionan la emergencia del conocimiento funcional.

Dentro de la perspectiva socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes circunstancias condicionan/determinan la construcción del conocimiento matemático en las personas: las cognitivas, las didácticas, las sociales y las epistemológicas. Las didácticas son aquellas propias de la conformación de los diferentes sistemas didácticos, las cognitivas son propias del funcionamiento mental, las epistemológicas son propias de la naturaleza y significados del conocimiento matemático y las sociales. Nuestro interés es el estudio sistémico de todas las circunstancias. La consideración anterior plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza. La solución clásica a este problema es a través del establecimiento de *unidades de análisis*, cada una de las cuales retiene en forma simple las propiedades significativas de todo el sistema[1]. A nuestro parecer algunas nociones acuñadas en la perspectiva socioepistemológica tienen la característica de ser unidades de análisis para explorar el origen social del conocimiento. De entre ellas retomamos dos que aparecen fundamentales: *resignificación y práctica social*.

La noción de *resignificación* busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia[2] de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de sus significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. En este marco explicativo es posible plantearse, por ejemplo, resignificar la derivada a través de la linealidad de los polinomios[3] (Rosado, 2004). La noción de *práctica social* es quizá la parte medular de la perspectiva socioepistemológica. Se entiende por práctica social a aquellas acciones intencionales de los grupos humanos para transformar su

---

[1] Hemos tomado ésta caracterización de unidad de análisis de Vigotsky (1996), cuando establece, para su explicación de las relaciones entre pensamiento y lenguaje, como tal a la "significación de la palabra".

[2] En si misma esta es idea a-social, debido a que se considera al conocimiento como independiente del ser humano.

[3] En el contexto gráfico-analítico se tiene que la parte lineal de un polinomio $P(x)$ es la recta tangente a su grafica en el punto $(0, P(0))$.

realidad social y material. Por ejemplo, Arrieta (2003), Buendía (2004) y Ferrari y Farfán (2004) sostienen que son las prácticas sociales las que generan conocimiento. Respectivamente para estos autores las prácticas generadoras de conocimiento son: las de "modelación", en el sentido de actividad con la intención de comprender y transformar la naturaleza, es considerada como fuente que desarrolla procesos de matematización, la de "predicción" para la emergencia de lo periódico y la de "multiplicar sumando" para la emergencia de la variación logarítmica.

3. La noción de convención matemática cómo practica social de integración sistémica de conocimientos

En el plano de la construcción del conocimiento matemático, utilizamos la acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas (evitar contradicciones o dar unidad, por ejemplo). Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo del concepto de exponente no natural muestra la presencia de una manera común de generar significados, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar (Martínez, 2003) a lo largo de la historia de las ideas entre los siglos XIV y XVIII. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos).*

En el sentido anterior entonces, un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la práctica de integración sistémica de los conocimientos; es decir existe la actividad intencional de relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes.

Tomemos por ejemplo el caso de los exponentes para aclarar a que nos referimos con "convenir matemáticamente". Partamos del supuesto que queremos darle un significado al símbolo $2^{1/2}$. La multiplicación reiterada no puede ser utilizada para ello, por lo que buscamos otro camino. ¿Qué significado tomar? Si retomamos la operatividad de las potencias de la misma base podemos postular que sería conveniente que $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ por lo que tenemos que "convenir" que $2^{1/2}=\sqrt{2}$. Lo anterior también muestra que la igualdad $2^{1/2}=\sqrt{2}$ *no se puede demostrar sino se debe convenir.*

4. Procesos de convención matemática en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio

Dentro de nuestras investigaciones que se encuentran en desarrollo, el primer paso ha sido la búsqueda de procesos de construcción de conocimiento que puedan ser explicados a través de los elementos constituyentes de nuestra caracterización del mecanismo de convención matemática. Los primeros ejemplos son extraídos de la historia de las ideas, mientras que en los siguientes ponemos a consideración la descripción de procesos de construcción de conocimiento que plantean una resignificación de diversos contenidos matemáticos vía la conformación de escenarios en donde está presente la "práctica social" de integración sistémica de conocimientos matemáticos, que es la que posibilita la presencia de procesos de convención matemática y por ende la generación de conocimiento.

4.1. El carácter convencional de la emergencia del neutro multiplicativo en la matemática de las variables

En cuanto a la sintaxis algebraica, en Martínez (2003) se ha explicado el proceso de convención matemática que estuvo presente en una construcción de las nociones de exponente no natural (cero y negativo). Ahí se describe de manera amplia la manera en que Chuquet (s. XIV) utilizó la noción de exponente cero utilizando el significado de "ausencia" que este tiene. De esta manera Chuquet estableció, por definición, el siguiente uso para los exponentes: $2^2 := 2x^2$, $2^1 := 2x$, $2^0 := 2$ ya que no tiene ninguna x. El punto de interés dentro del marco de las sintaxis algebraicas resulta de la consideración de que los convencionalismos tienen por finalidad el incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos*[4]. En cuanto a la multiplicación, la regla de Aurel (s. XVI) se basa en el comportamiento especial de las sucesiones: la relación entre la progresión aritmética y progresión geométrica[5]. Con este marco de referencia se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots\}$, que en la notación de Marco Aurel (Meavilla, 1993) corresponde al conjunto $\{\varphi, \chi, \xi, \zeta, \xi\xi, \beta, \xi\zeta, b\beta, \xi\xi\xi, \zeta\zeta, \ldots\}$. De esta manera el número 5 es representado como 5φ y es multiplicado con los demás a través de una nueva tabla de caracteres cósicos que tienen la misma regla operativa referente a la relación entre la progresión aritmética y geométrica. Lo anterior se muestra en las multiplicaciones contenidas la Tabla 1.

Notación de Aurel			
8ξ 2χ ------ 16ζ	$13\xi\xi$ $2\xi\xi$ -------- $26\xi\xi\xi$	23β 4φ -------- 92β	50φ 6ξ -------- 300ξ

Tabla 1. Multiplicaciones en la notación de Aurel

El ejemplo de Marco Aurel señala la necesidad, para incluir a lo números dentro de la operatividad de los caracteres cósicos, de convenir la existencia de un neutro multiplicativo que ahí no es identificado con el número uno.

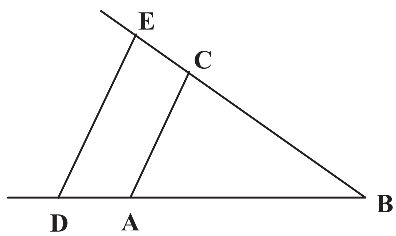
En el marco de la representación gráfica de las variables algo semejante a lo anterior fue construido por Descartes en su *Géométrie* (1637). Ahí, por ejemplo, el producto de dos

[4] En el lenguaje moderno se puede identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la tercera potencia… de la incógnita.

[5] Es decir, si se coloca la progresión aritmética que representa el número de multiplicaciones de la base y la progresión geométrica que representa las potencias, se tiene que la adición en la serie aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica.

longitudes aparece como una longitud y ya no más, según la tradición euclidiana, como una superficie. En la interpretación de Descartes se encuentra lo que podríamos llamar la "linealización" de la aritmética (Dhombres, 2000); ya que se establecía la correspondencia que existe entre longitudes geométricas y números. La necesidad básica es que la correspondencia fuera operatoria, es decir que las operaciones sobre los números (la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces son las operaciones enumeradas por Descartes) correspondan con operaciones con longitudes geométricas (representadas por longitudes en el plano). Para que esta correspondencia pueda ejercerse es necesario que las operaciones con los segmentos sea cerrada (que el producto de dos segmentos sea otro segmento, por ejemplo). La elección de Descartes consiste en usar la construcción de la cuarta proporcional y la identificación, como convención, de una longitud unitaria con el número 1; así el referencial se muestra por la unidad algebraica del cálculo; el elemento neutro de la multiplicación – como se le llamaría más tarde – proporciona el referencial que requiere la razón (Descartes, 1637):

> "Como la Aritmética consiste sólo en cuatro o cinco operaciones, a saber, suma, resta, multiplicación, división y la extracción de raíces, que puede interpretarse como una especia de división, de manera que, en la Geometría, para encontrar las líneas requeridas es meramente necesario sumar o restar otras líneas; o de otra forma, tomando una línea que llamare unidad para relacionarla tanto como se pueda a números, y que, en general, puede escogerse arbitrariamente, y habiendo dado dos líneas más, encontrar una cuarta que será a una de las líneas dadas como la otra es a la unidad (que es lo mismo que la multiplicación) […] Por ejemplo, tómese AB como unidad, y sea requerida para multiplicar BD por BC. Sólo tengo que unir los puntos A y C, y trazar DE paralela a CA; entonces BE es el producto de BD y BC".



4.2. Orden y operatividad de números negativos vía la variación

Desde la perspectiva de construcción de conocimiento que aquí se presenta cabe preguntarse cómo es posible construir la operatividad de los números. Está reflexión nos ha llevado a construir hipótesis de construcción de conocimiento en relación a procesos de convención matemática y otras nociones como la de variación. Al respecto tenemos el siguiente marco que plantea la posibilidad de una *resignificación* del orden y operatividad de números con signo a través de la variación.

Orden: ¿Por qué -3>-4?
- 4>3
- Se desea que la relación de orden de los números se cumpla cuando se resta en cada miembro de la relación.
- 4-7>3-7
- Entonces se debe convenir que -3>-4

Operatividad: ¿Por qué -3(-2)=6?

- y = 15-2(x)
- Evaluando construimos una tabla para tomando x = 1,2,3,4,5

x	1	2	3	4	5
y	13	11	9	7	5

- Notando que Δx=1 y Δy=2, es posible continuar la tabla sin evaluar de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
y	19	17	15	13	11

- Sustituyendo en la fórmula los valores encontrados por la variación tenemos: 19 = 15 - 2(-3) $\Rightarrow$ -3(-2)=6.
- Para que la variación se conserve es necesario convenir que -3(-2)=6.

4.3. Construcción de las convenciones de los exponentes vía la variación

- ¿Por qué 2^0=1?
- $y = 2^n$
- Evaluando construimos una tabla para tomando n = 1,2,3,4,5

n	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

- Notando que Δx=1 y y_{final} / $y_{inicial}$= 2, es posible continuar la tabla sin evaluar de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4

- Sustituyendo en la fórmula los valores encontrados por la variación tenemos que 2^0=1.
- Para que la variación se conserve es necesario convenir que 2^0=1.

5. A manera de conclusión

En este escrito se ha proporcionado una articulación de la noción de convención matemática, en tanto proceso de construcción de conocimiento, con la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Se ha explicado el origen de este proceso a través de la práctica social de integración sistémica de conocimientos. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir y explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. En particular se han presentado ejemplos que dan evidencias del funcionamiento del proceso como constituyente en la construcción de la matemática de la variación y el cambio. Citemos, por ejemplo, la identificación cartesiana de la unidad de medida con el neutro multiplicativo con el objetivo de "linealizar" las operaciones entre magnitudes geométricas.

Como vimos en este artículo, nuestro análisis socioepistemológico produce ideas para la conformación de escenarios de resignificación de algunos contenidos matemáticos y por tanto proporciona elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. Los ejemplos aquí presentados, referentes a la variación, son muestra de ello y señalan el camino de investigaciones futuras que busquen indagar aspectos convencionales presentes en la construcción de conocimiento matemático.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Buendia, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales(Un estudio socioepistemológico.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. R. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen XV (pp. 35-42).* México: Editorial Iberoamérica.

Cordero (2001).La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. En *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 4*(2), 103-128.

Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. (edición facsimilar) Colección Clásicos de la Ciencia. México: IPN-Limusa.

Dhombres, J. (2000). La banalidad del referencial cartesiano. En C. Álbarez y R. Martínez (Coord.) *Descartes y la ciencia del siglo XVII (pp. 69 – 98).* México: UNAM-Siglo XXI Editores.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G. L. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14*. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C. R. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I*. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 45 -50).

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al "Libro primero de arithmetica algebratica" de Marco Aurel. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidaddel polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Vigotsky, L . S. (1996). *Pensamiento y lenguaje*. México: Ediciones Quinto Sol.

Wertsch, J. (1993) *Voces de la Mente*. España: Visor Distribuciones, S.A.