Un Software Asistente de Geometría y Una Visualización Dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo

Rafael A. Meza
CECyT "Diódoro Antúnez E.". del IPN
México
rmezav53@yahoo.com.mx
Visualización – Nivel Medio, Superior

Resumen

Un acercamiento a través de una visualización dinámica al teorema fundamental del cálculo haciendo énfasis en la relación inversa entre áreas (acumulación) y tangentes (razón de cambio) contrasta con el acercamiento tradicional en el cual se presentan diversas figuras y gráficas estáticas para fundamentar y probar tan importante noción.

Introducción

La invención del cálculo es atribuible, en forma independiente, a Leibniz y Newton a finales del siglo XVII. Newton desarrolló los conceptos de *fluxión* y *fluente* motivado por el problema de calcular la velocidad de un cuerpo y Leibniz por su parte desarrolló los conceptos de *diferencial* e *integral* motivado en el problema de trazar tangentes a una curva cualquiera. También descubrieron la importante relación inversa que hoy en día conocemos como "Teorema Fundamental del Cálculo". Este descubrimiento favoreció el desarrollo algorítmico del cálculo y proporcionó una formulación genérica de la relación entre el problema de la tangente y el problema del área, o en nuestra moderna notación, entre la derivada y la integral. El problema de la tangente básicamente consistía en determinar un método que permitiera trazar una línea recta tangente a una curva en un punto específico; el problema del área, también fue abordado en forma geométrica, y básicamente consistía en encontrar un método que permitiera construir un rectángulo de área igual al área de interés. La relación entre la derivada y la integral de una función frecuentemente se presenta como:

Teorema fundamental del cálculo

Sea *f* continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Parte I Si la función G está definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

para todo *x* en $[a, b]$, entonces G es una antiderivada de *f* en $[a, b]$.

Parte II Si F es cualquier antiderivada de *f* en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pregunta de investigación

El alumno que ha llevado un curso de Cálculo con un acercamiento tradicional caracterizado por un determinado estilo en la demostración de teoremas como el método de exposición, generalmente de tipo algebraica y formal, en la cual se presentan diversas figuras y gráficas estáticas para fundamentar y probar importantes nociones ¿e*s capaz de identificar, transformar o construir la relación inversa que existe entre el problema de la tangente y el problema del área si únicamente dispone de información gráfica en el plano numérico*? Aún cuando a primera vista la respuesta a esta pregunta parece simple, hemos constatado que *no es obvia.*

Marco Teórico, Cabri y Visualización

Para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación realizamos un análisis epistemológico del Teorema Fundamental del Cálculo, ocupándonos ante todo del proceso mismo de su construcción, de las sucesivas estructuras presentes en su evolución y de los mecanismos de pasaje de una etapa a otra en su desarrollo histórico. Fueron dos los mecanismos que consideramos. El primero es un proceso general que caracteriza todo progreso cognoscitivo: el rebasado está integrado en el rebasante. El segundo, fue el proceso que conduce de lo intra-objetal (análisis de los objetos), a lo inter-objetal (estudio de las transformaciones) y finalmente a lo trans-objetal (construcción de las estructuras) (Piaget, J. y García, R., 2000, p. 33). Como resultado del análisis anterior presentamos, con ayuda de Cabri II, una visualización dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo con énfasis en la relación entre áreas y tangentes. No es nuestra pretensión realizar una descripción detallada de los comandos del software, por el contrario, partimos del supuesto de que existe un conocimiento básico de ellos y pretendemos utilizarlos como herramientas cognoscitivas.

Parte I

Después de iniciar Cabri II, activemos el campo "Ocultar/Mostrar Ejes" del cuadro de herramientas "Dibujo" para que los ejes predeterminados del paquete se muestren en la pantalla de trabajo y construyamos en seguida la figura 1 con las siguientes propiedades: a) Tracemos un segmento de extremos $U(u,\ 0)$ y $V(v,\ 0)$ sobre el eje horizontal y coloquemos los puntos $W(w,\ 0)$ y $X(x,\ 0)$ sobre él, con la finalidad de que al dar animación a dichos puntos estos sólo se desplacen sobre el segmento citado. Esto nos permite tener control sobre los desplazamientos de dichos puntos, y visualizar una determinada región del plano en forma sistemática para su análisis. b) Con la herramienta "Recta" podemos crear la recta *f* (no importa el signo de la pendiente) que pase por *W* y con la herramienta "Perpendicular" una perpendicular por *X* que corte a la recta *f* en *S*, formándose así el triángulo rectángulo *WSX*. Si mantenemos al vértice *W* fijo y damos animación al vértice *X*, ¿qué variables que dependen de *x* están presentes en dicha animación del triángulo? c) Podemos ahora calcular el área del triángulo *WSX*, utilizando las coordenadas de los vértices, y transferir dicho valor sobre el eje de las ordenadas para determinar el punto $Y(0,\ Y1)$, con $Y1 = \acute{a}rea\ \Delta WSX$, trazando a continuación una perpendicular por él que corta a la perpendicular por *X* en el punto $P(x, Y1)$. Esta es la operación base que explotaremos en esta sección.

Surgen ahora un par de preguntas interesantes, si damos animación a X, ¿qué tipo de curva describe el desplazamiento realizado por el punto *P*? ¿Por qué? Ante la clase podemos "desplazar ligeramente" X con el puntero y pedir a los alumnos que intenten describir la curva de la trayectoria seguida por *P*. No es ésta una habilidad sencilla, por el contrario, es difícil en general para alumnos visualizar la trayectoria de *P*, ya que la ordenada $Y1 = \text{área } \Delta WSX$ exige un cálculo que depende de la variación simultánea de los segmentos *WX* y *XS*. Esta variación constituye una relación de relaciones (proporción) lo cual exige una coordinación entre sistemas distintos: *c* es a *d* como *a* es a *b*.

Si activamos ahora la traza para P y damos animación a X surgirá la curva correspondiente. La figura 2 muestra la curva descrita por P como "lugar geométrico". Es conveniente en este momento "crear" la parábola correspondiente al lugar geométrico descrito por P con el comando "Cónica". Desde luego que bien podemos llamar a la curva descrita por el punto P "Función Área" o "Función Acumulación". He constatado que en general los alumnos del último año de bachillerato y primer año de licenciatura en ingeniería, física o matemáticas no han comprendido que con la acumulación de área de una determinada región (triángulos y rectángulos en particular) es posible construir una función y mucho menos que con la razón de cambio otra. Tanto profesores y alumnos se muestran sorprendidos por la sencillez con la que estas curvas pueden ser construidas con Cabri II, así como de la obtención de sus representaciones algebraicas y su coordinación con las representaciones gráficas. Desde luego que esta presentación del Teorema Fundamental no da un acercamiento totalmente suave, es necesario también, que el estudiante tome partido en la acomodación de sus estructuras cognoscitivas.

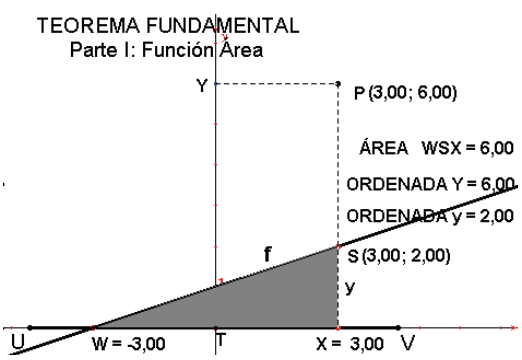

Figura 1

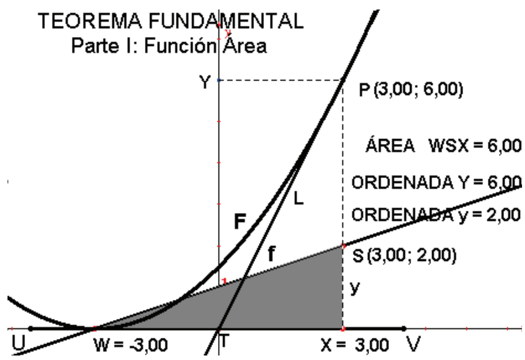

Figura 2

A la curva que describe el punto P le llamaremos $Y = F(x)$, e $y = f(x)$ a la que describe *S*. ¿Cuál es la expresión algebraica de la curva que describe el punto *P*? Es este un significativo ejercicio el cual nos permite hallar una "antiderivada" F de la función *f* exclusivamente con herramientas algebraicas. Dado que la curva F se obtiene al graficar la acumulación de área del triángulo *WSX*, bastará con determinar la expresión algebraica de dicha región como función de *x*. Pero ¿cuál es la base del triángulo? Otro aspecto interesante de esta forma de acercamiento al Teorema Fundamental es la significación que van adquiriendo los diversos elementos presentes en las gráficas utilizadas y que estos están, en general, al alcance de los alumnos. Bien, para el caso que estamos trabajando, *W* fijo y X variable, tenemos que la base es $X - W = x + 3$ y la altura $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$. ¿Por qué? Así, el área como una función de la variable x está dada por $A(x) = \frac{1}{2}(x+3)(\frac{1}{3}x+1) = \frac{x^2}{6} + x + \frac{3}{2}$, por tanto la expresión algebraica de F como función de la variable x está dada por $F(x) = \frac{x^2}{6} + x + \frac{3}{2}$. Pero esta expresión tiene la propiedad $F'(x) = f(x)$, es decir que la función F es una antiderivada de f. Así, si la función F representa la acumulación de área de la región triangular *WSX* como función de x, es decir $F(x) = \int_w^x f$, la función $F'(x) = f(x)$ representa la razón de cambio a la que se esta llevando dicha acumulación, para cualquier valor x del intervalo (u, v). En particular para $x = 3$, la acumulación alcanzada es $F(x) = 6\ cm^2$ y la razón a la cual tiene lugar dicha acumulación es $f(3) = 2\ cm^2$ por *cm*.

Tenemos entonces que la ordenada $f(x)$ del punto $S(x, f(x))$ es igual a la razón a la que está cambiando la acumulación en el punto *P*, es decir, que la pendiente de la recta tangente *L* en este punto, está dada por $m = f(x)$. Así, de la tangente *L*, conocemos el punto *P* y su pendiente, y sólo resta calcular el valor de la ordenada en el origen, transferir dicho valor sobre el eje de las ordenadas para determinar la ubicación del punto $B(0, b)$ y trazar la recta tangente *L* a la función *F* en el punto *P*.

Analicemos cualitativamente ahora algunas transformaciones entre los comportamientos de las curvas *F* y *f*, por ejemplo: si la función *f* tiene pendiente positiva la parábola abrirá hacia arriba, pero si con el puntero "arrastramos" la recta *f* modificando poco a poco su pendiente hasta que tome valores negativos observaremos como la concavidad de la parábola se va modificando hasta que ésta abra hacia abajo. Otro aspecto de interés de esta construcción particular es que el vértice de la parábola coincide con el vértice *W* del triángulo *WSX*. ¿Por qué? ¿Qué comportamiento manifestará la parábola si damos animación al vértice *W*? ¿Qué relación existe entre la magnitud del área de la región *WSX* y la magnitud de la ordenada del punto P si el vértice de la parábola no coincide con el vértice W?

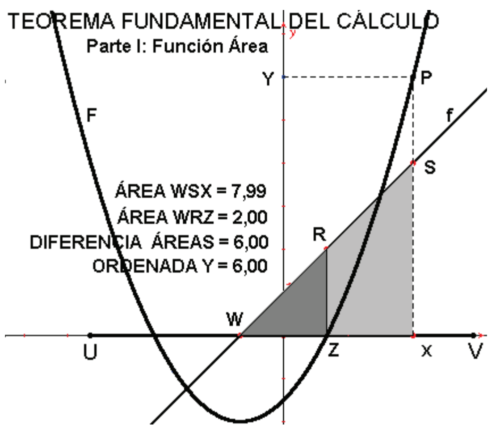

Figura 3

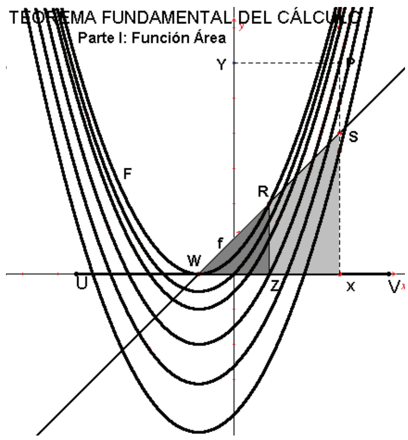

Figura 4

Para terminar está sección, presentamos una situación la cual nos va a permitir ampliar el alcance de las transformaciones trabajadas. El procedimiento para construir la figura 3 es similar al anterior, pero en esta ocasión coloquemos, además de los puntos *W* y *X*, el punto *Z* sobre el segmento *UV*. En esta figura el punto *Z* está ubicado entre *W* y *X*, esto no necesariamente debe ser así. Por *Z* tracemos una perpendicular que corte a la función *f* en *R* con lo que obtenemos los triángulos semejantes *WSX* y *WRZ;* calculemos las correspondientes áreas y determinemos la ordenada $Y1$ como la diferencia de estas últimas, es decir $Y1 = \acute{a}rea\ \Delta WSX - \acute{a}rea\ \Delta WRZ$. Después de transferir este valor sobre el eje de las ordenadas para construir el punto $Y(0,\ Y1)$, tracemos por éste una perpendicular al eje de las ordenadas, la cual cortará a la perpendicular al eje de las abscisas que pasa por *X* en el punto *P*. La parábola *F* es la curva que describe P cuando damos animación a *X*. Con toda seguridad, si realizó los ejercicios anteriores ya podrá decir cuales son las transformaciones sufridas por la curva *F* cuando desplazamos *X*, *W* o modificamos la pendiente de la recta *f*, pero ¿cuáles serán si damos animación al punto *Z*? En este caso obtenemos parte de la familia de antiderivadas de la función *f*. En forma sintética: Si *F* es una antiderivada particular de *f*, en el intervalo $(u,\ v)$, todas las posibles antiderivadas de *f* en dicho intervalo tendrán la forma $G(x) = F(x) + c$; la figura 4 muestra algunas antiderivadas particulares.

PARTE II Empezaremos esta sección construyendo una parábola *F* como lugar geométrico, figura 5, para ello tracemos el segmento *UV* sobre el eje de las abscisas y sobre él construyamos el punto $X(x,\ 0)$, desde luego que esto es con la intención de tener control sobre la animación que se puede dar a dicho punto. Tracemos ahora el foco *C* de la parábola, por ejemplo, en la figura 5 está localizado en el segundo cuadrante y el punto *D*, por el cual ha de pasar la directriz, sobre la parte positiva del eje de las ordenadas. De la intercepción de la perpendicular por *C* con el eje de las abscisas obtenemos el punto *W*. De la perpendicular al eje de las ordenadas por *D* y la perpendicular al eje de las abscisas por *X* obtenemos el punto *N*. Trazamos a continuación el segmento *CN* y la mediatriz de este último, la cual cortará a la perpendicular por *X* en *P*. La curva que describe el punto *P* al desplazarse *X* será la parábola *F* mostrada en la figura y la mediatriz será la recta tangente *L* a la parábola en el punto *P* de abscisa *x*, que el dar animación al punto *X* envolverá a la parábola *F*.

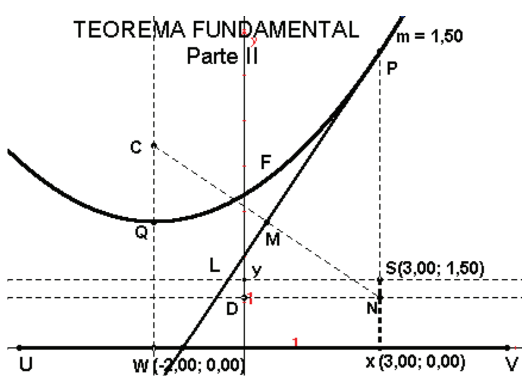

Figura 5

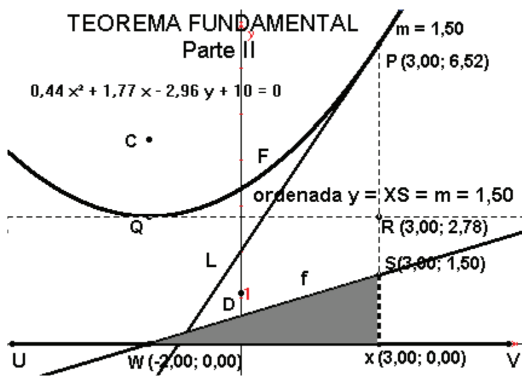

Figura 6

Con la herramienta "Ecuación y Coordenadas" del software podemos determinar la ecuación de la curva F, esto es útil porque estamos interesados en este momento fundamentalmente en la relación entre *F* y *f*, y no "distraemos" al alumno en la determinación de la ecuación de la parábola. De manera similar procedemos con la herramienta "pendiente" para determinar la pendiente de la recta L (en la figura 5, $m = 1.50$), transferimos ahora este valor sobre el eje de las ordenadas para obtener el punto $y(0,\, m)$ y por él trazamos una perpendicular que corte a la perpendicular por *X* en el punto $S(x,\, m)$, así la ordenada de este punto tendrá la "propiedad" de que $y1 = m$. Esta es ahora nuestra operación base. Podemos ahora crear la recta *f* que pasa por los puntos *W* y *S*, a la cual podemos llamar "Función Razón" o "Función Tangente", figura 6, de tal forma que al dar animación al punto *X*, el punto *S* se desplazará sobre ella y la transformación que sufre el triángulo *WSX* provocará una acumulación de área. En síntesis: la función *f* tiene la "propiedad" de ser "acumulativa" y el área acumulada para cualquier valor de la variable *x* está dada por $F(x)$, salvo una "constante". ¿Cuál es el valor de la constante? En la sección correspondiente a la primera parte del Teorema Fundamental vimos que $F(x)$ proporcionará el valor correcto del área acumulada para cualquier *x* del intervalo $(u,\, v)$, siempre que el vértice *Q* de la parábola (eje de simetría paralelo al eje vertical) y el vértice *W* del triángulo *WSX* coincidan. Así, el valor de la constante que estamos buscando está determinada por $c = -F(w)$. Por lo tanto, $\acute{a}rea\ \Delta WSX = F(x) - F(w)$.

Tomaremos esta operación base para deducir un resultado más general. En la construcción correspondiente a la figura 6 construyamos sobre el segmento *UV* el punto $Z(z,\, 0)$ entre los punto *W* y *X*, figura 7. Construyamos las rectas tangentes *L1* y *L2* a la curva *F* correspondientes a las abscisas *z* y *x*, como se llevó a cabo en el ejemplo anterior, con puntos de tangencia $P1(z,\, Y1)$ y $P2(x,\, Y2)$ respectivamente. Hagamos $y1 = m1$ y $y2 = m2$, donde $m1$ y $m2$ son las correspondientes pendientes de las rectas tangentes *L1* y *L2*. Después de realizar la transferencia de estos valores sobre el eje de las ordenadas, tracemos las perpendiculares a este eje por *y1* y *y2*. También, tracemos la perpendicular al eje de las abscisas por *Z*. Podemos ahora trazar la recta *f* tal que pase por los puntos $R(z,\, y1)$ y $S(x,\, y2)$, la cual interceptará al eje de las abscisas en el punto *W*, formándose los triángulos rectángulos semejantes *WSX* y *WRZ*. Al mantener *Z* fija y dar animación al punto *X*, el punto *S* se desplazará sobre la gráfica de la función *f*, la cual como ya lo hemos comentamos es acumulativa, transformando al triángulo *WSX*, esto se reflejará en la acumulación dada por $\acute{a}rea\ WSX - \acute{a}rea\ WRZ$ y cuyo valor puede ser calculado directamente por la diferencia $F(x) - F(z)$. ¿Por qué? En forma sintética este último resultado lo podemos escribir como: $\int_z^x f = F(x) - F(z)$.

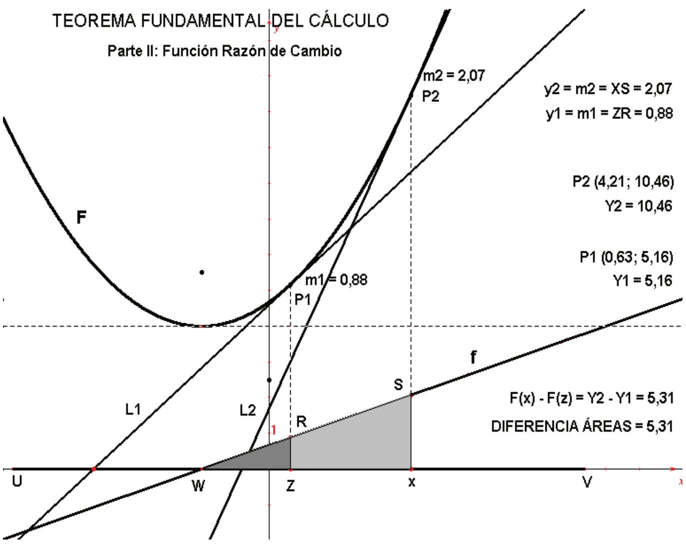

Figura 7

Observaciones

La historia y un ambiente computarizado nos permitieron una visualización dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo, con énfasis en la relación entre áreas y tangentes, que sin soslayar a la variación, pone en evidencia los mecanismos generales de su desarrollo: primero como propiedades internas de una figura, más tarde como invariantes de transformaciones posibles y finalmente como síntesis de estas últimas en una estructura con propiedades totalmente nuevas. También fue posible alcanzar una comprensión gráfica e intuitiva de la relación inversa entre la acumulación de una cierta cantidad y la razón de cambio a la cual ésta se acumula, y el porqué de tal relación. Hay mucho todavía por hacer con respecto al acercamiento intuitivo a estructuras. Finalmente, establecidas las operaciones base hemos deducido de ellas las operaciones implicadas, coordinado con otras para ampliar sus alcances e insertado en un sistema de transformaciones como preludio de la síntesis de las mismas, resultado que conocemos como Teorema Fundamental del Cálculo.

Referencias Bibliográficas

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*.. New York, USA: John Wiley and Sons
Piaget, J. y García, R. (2000). *Psicogénesis e Historia de la ciencia*.. México: Siglo veintiuno.