

Dialéctica Entre lo Conceptual y lo Algorítmico Relativa a Prácticas Sociales con Cálculo Integral

Germán Muñoz

Centro Investigación en Matemática Educativa-Universidad Autónoma de Chiapas
México

german@cimateunach.org

Pensamiento Matemático Avanzado, Pensamiento Variacional, Socioepistemología – Nivel Superior

Resumen

Una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico (C y A). En la génesis histórica encontramos una evidencia de la relación dialéctica entre lo C y A en el contexto del marco epistémico de Newton enraizado en la práctica social de *predecir*. A partir de lo anterior buscamos desentrañar las condiciones para propiciar la dialéctica entre lo C y A en escenarios socioculturales específicos donde se desarrollan ciertas prácticas sociales, por ejemplo, una institución escolar cuya naturaleza es la formación de usuarios de la matemática. Nuestros hallazgos sostienen por un lado la dialéctica entre lo C y A y por otro la relatividad de lo C y A respecto de la actividad humana asociada a prácticas sociales con matemáticas en un contexto sociocultural específico.

Introducción.

De la problemática planteada buscamos desentrañar las condiciones para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico (vista como una unidad dialéctica) con base en prácticas sociales desarrolladas en escenarios socioculturales específicos. En la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico (C y A) en el contexto del marco epistémico de Newton anclado a la práctica social de predecir (Cantoral, 2001; Piaget & García, 1994). De manera que construimos un campo conceptual del Cálculo (Muñoz, 2000), es decir, un conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo integral y que implican la relación entre lo C y A con base en el marco epistémico de Newton y en la perspectiva de la integral vía la noción de *acumulación* (Cordero, 2003) así como en el referente de la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1990). Actualmente dicho campo conceptual lo percibimos más en términos de un campo de prácticas sociales organizadas alrededor de tres ejes: *la predicción, la acumulación y la constantificación de lo variable*. Nuestras investigaciones nos han permitido percibir a *la Didáctica del Cálculo integral* en el sentido de identificar las condiciones para propiciar y controlar la *génesis artificial*, de la relación dialéctica entre lo C y A , que necesariamente exige el funcionamiento del sistema didáctico inmerso en un contexto sociocultural específico donde se desarrollan ciertas prácticas sociales. Presentamos evidencias que sostienen la existencia de la relación entre lo C y A , su naturaleza dialéctica y su carácter relativo respecto de prácticas sociales específicas. Nuestra investigación se ubica dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa.

Existencia de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico

Para abordar la problemática fue necesario matizarla en dos posibles preguntas: ¿La separación es originada por ciertos factores del funcionamiento del sistema didáctico?; o ¿Existe esa separación en el origen y desarrollo histórico del Cálculo integral?. La perspectiva histórica considerada, toma en cuenta los cambios de marco epistémico¹, es decir, la reformulación de preguntas cruciales y cosmovisiones asociadas a través de las cuales el Cálculo integral se ha originado. Analizamos antes del siglo XVII, por ejemplo, cuando Aristóteles estudió el movimiento de los cuerpos el marco epistémico considerado fue: ¿Cuáles son las *causas reales* del movimiento? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el reposo* (en época paralela en la civilización China había una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el movimiento* y por ende tenía sentido la pregunta: ¿Cuáles son las *causas reales* del reposo?). Dicho marco Griego originó descripciones cualitativas del movimiento (fenómeno de variación), es decir, no se generaron procedimientos para cuantificar el movimiento simplemente porque no era parte de su marco epistémico. En los siglos XVII y XVIII se siguen estudiando los mismos fenómenos de variación (curvas geométricas, movimiento de cuerpos), pero con otros marcos. Así, Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento* y por ende el principio de inercia fue construido. En dicho marco Galileo elimina las preguntas sobre *causas reales* que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones (*medir* es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos). El pasaje de atributos a relaciones implica una identificación de parámetros y su consiguiente cuantificación. Pero no sólo se trata de mediciones, sino que Galileo introduce el concepto de relación funcional entre las variables, que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria; esto supone la introducción del tiempo como variable independiente. Ahora analicemos el marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos; este marco era: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento*. Así, el objeto fue *calcular* la evolución posterior del sistema de movimiento sin plantearse otras preguntas sobre las *causas reales* de él. Pero la evolución misma es calculada sobre la base de un sistema de transformaciones que permiten pasar de los valores de las variables, en el estado inicial, a los valores que adquieren en cualquier otro instante. Esta transición de causas últimas a sistemas de transformación fue un paso decisivo en la historia de la mecánica, uno de los pilares más sólidos de la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la idea de la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos (Piaget y García, 1994). Es decir, el hecho de que la pregunta sea *calcular la evolución posterior* implica cuantificar estados

1 “...en cada momento histórico y en cada sociedad, predomina un cierto marco epistémico, producto de paradigmas sociales y epistémicos. Una vez constituido un cierto marco epistémico, resulta indiscernible la contribución que proviene de la componente social o de la componente intrínseca al sistema cognoscitivo. Así constituido, el marco epistémico pasa a actuar como una ideología que condiciona el desarrollo ulterior de la ciencia. Dicha ideología funciona como obstáculo epistemológico que no permite desarrollo alguno fuera del marco conceptual aceptado. Sólo en los momentos de crisis, de revoluciones científicas, hay una ruptura de la ideología científica dominante y se pasa a un estadio diferente con un nuevo marco epistémico...” (Piaget & García, 1994, p. 234)

posteriores de cierta variable, en función de otra, a partir de las condiciones iniciales para *predecir* la evolución de un fenómeno de variación o cambio. En este contexto aparece el sentido de la noción de *Predicción* en tanto práctica social asociada al surgimiento del Cálculo infinitesimal. Lo anterior constituye una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo conceptual y lo algorítmico en la génesis histórica del Cálculo integral debido a que existe una relación muy estrecha entre la noción de *predicción* y el instrumento predictor *serie de Taylor* (Cantoral, 2001).

Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico

Al atender la problemática planteada al principio, identificamos teóricamente un aspecto que tienen en común lo conceptual y lo algorítmico (*C y A*). A continuación presentamos un bosquejo del argumento para realizar dicha identificación.

Por una parte, en la enseñanza de la Matemática se ha reducido el concepto de integral a la definición de integral de Cauchy o de Riemann (en tanto objeto de enseñanza) y al estudiante como sujeto cognoscente se le obliga a interactuar con la definición en tanto objeto de conocimiento. Sin embargo, a partir de los trabajos de Cantoral (2001) y Cordero (2003) hemos encontrado evidencias que nos muestran que en el desarrollo sociogenético del Cálculo integral han jugado un papel crucial las nociones de *Predicción y Acumulación*. Por supuesto existen otras nociones asociadas al concepto de integral, sin embargo, es importante remarcar que las nociones mencionadas adquieren sentido para el estudiante cuando el objeto de conocimiento se caracteriza por una situación problema derivada de un fenómeno de variación o cambio. También, en cierto modo, la teoría de los campos conceptuales señala que un concepto no puede ser reducido a su definición, si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, sino que es a través de situaciones problema por resolver como un concepto adquiere sentido para el estudiante (Vergnaud, 1990).

Por otra parte, la enseñanza de la Matemática ha reducido el aprendizaje de los algoritmos a la ejercitación del procedimiento subyacente del algoritmo. En cierto modo, se intenta obligar al estudiante a interactuar con un procedimiento preestablecido en tanto objeto de conocimiento, lo cual conduce a cierto tipo de Empirismo debido a que se cree que el estudiante por simple condicionamiento, a través de la experiencia de realizar ejercicios repetitivos de los procedimientos preestablecidos, hace una copia pasiva de la realidad externa (en este caso el procedimiento preestablecido juega el papel de realidad externa) u ocurre un simple reflejo-copia del saber ajeno a través de la transmisión social. Hemos analizado tres procedimientos de integración (antiderivación, suma y derivación sucesiva) socialmente establecidos y de acuerdo a la definición de algoritmo en el contexto de los campos conceptuales es indispensable una situación problema, previamente clasificada, para discutir ciertos aspectos de la algoritmia (Muñoz, 2000).

Este análisis nos conduce a identificar un *objeto de conocimiento común a lo conceptual y lo algorítmico*, el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral. Este aspecto en común es una condición necesaria para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico aunque no suficiente para los fines de la Matemática Educativa.

Con el fin de contrastar nuestro hallazgo teórico (condición necesaria) con otras perspectivas, analizamos el libro "Understanding in Mathematics" de Sierpínska (1994), con el propósito de tener un referente, en cierto modo, respecto a lo que podría significar *entender un concepto o entender un algoritmo* y encontrar relaciones entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo

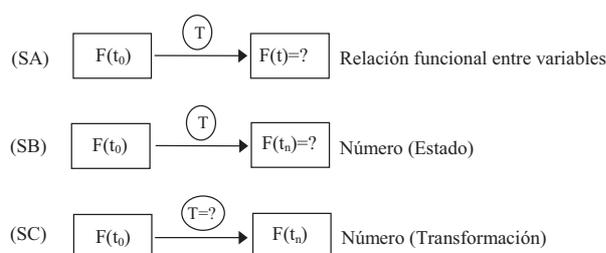
integral. De acuerdo a la autora, más precisamente hablaríamos de actos de entendimiento de un concepto, actos de entendimiento de un algoritmo o de actos de entendimiento de un problema que permita pensar en la integración, es decir, el objeto de entendimiento sería el Concepto, el Algoritmo o el Problema en donde dicho objeto interactúa con el sujeto que entiende (el cual tiene una base de entendimiento). Si se pudieran establecer relaciones entre los actos de entendimiento de un concepto y los actos de entendimiento de un algoritmo, a partir de dos objetos de entendimiento distintos, no nos permitiría observar la génesis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico vista como unidad dialéctica. También, analizamos la perspectiva de Dubinsky (1991) y hemos discutido con él la Teoría APOS (por sus siglas en Inglés) desde la perspectiva de nuestra problemática, por ejemplo, la etapa de Acción de un concepto tiene algunos aspectos de la naturaleza de un algoritmo, entonces, qué sería la etapa de Acción cuando lo que se está abordando es un algoritmo, cómo sería la etapa de Proceso, Objeto y Esquema en dicho caso. Otro punto de discusión fue si suponemos que tenemos la Descomposición Genética de un concepto y la Descomposición Genética de un algoritmo cómo podemos estudiar la relación entre los conceptos y los algoritmos. Nuevamente es posible estudiar la relación, sin embargo, esta perspectiva no nos permite observar la génesis de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico vista como unidad dialéctica.

Las implicaciones del hallazgo teórico, en su sentido epistemológico, de haber identificado el *objeto de conocimiento común* a lo Conceptual y lo Algorítmico (condición necesaria) se pueden resumir en: **a)** La posibilidad de mirar a lo Conceptual y lo Algorítmico como una unidad dialéctica (mirar las propiedades de la molécula de agua H_2O , por ejemplo, por qué extingue el fuego). Y no correr el riesgo de analizar por separado a lo Conceptual (las propiedades de H, por ejemplo, enciende el fuego) y a lo Algorítmico (las propiedades de O, por ejemplo, mantiene el fuego) y enseguida buscar las condiciones para propiciar la relación (a través de mirar la adición de las propiedades de H y O) **b)** El centrar la atención en un objeto de conocimiento común a lo Conceptual y lo Algorítmico y no en dos objetos de conocimiento nos permitió desentrañar algunos aspectos de la génesis de lo Conceptual y lo Algorítmico a través de analizar la interacción de los estudiantes ante una secuencia de situaciones problema diseñadas a partir de la naturaleza del *objeto de conocimiento común*.

De manera que la identificación de la condición anterior nos permitió mirar otra perspectiva, en lugar de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra) y enseguida buscar condiciones de relación entre los dos objetos. Nuestras investigaciones nos han conducido a buscar las relaciones a partir de precisar, en lo más posible, las características del objeto de conocimiento común² a lo conceptual y a lo algorítmico (Muñoz, 1999). El objeto de conocimiento común lo caracterizamos tomando en cuenta los cambios de marco epistémico (Piaget y García, 1994) y teniendo como referencia las investigaciones de Cantoral (2001) y Cordero (2003), además por la naturaleza de la problemática nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales

² Muñoz, G. (1999). *Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración*. Ponencia aceptada en la modalidad de análisis teórico e impresión de un resumen en el Programa del 29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society: Sociedad para el Estudio del Conocimiento en Desarrollo. Tema central del Congreso: Desarrollo del Conocimiento, espejismos reduccionistas. Antiguo Colegio de San Ildefonso, Ciudad de México, sede del Congreso. Se realizó del 2 al 5 de Junio de 1999.

(Vergnaud, 1990). En resumen, las características del objeto de conocimiento común a lo Conceptual y a lo Algorítmico las precisamos, en lo más posible, a través de precisar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración; después analizamos y clasificamos las diferentes situaciones que se derivan de ese tipo de problemas y que le dan sentido al Cálculo integral (Muñoz, 2000). La naturaleza del objeto de conocimiento común se desarrolla en el contexto del marco epistémico de Newton, lo cual implica que está enraizado en la práctica social de *predecir*. Sin embargo, el análisis realizado en el apartado anterior nos permitió precisar, en cierto modo, el tipo de problemas cuya solución exige de una integración, lo cual condensamos así: *son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación o cambio. Estos problemas específicos no se refieren a las causas del fenómeno de variación (¿por qué varían?), sino al cuánto varían una vez que se reconoce cómo varía el fenómeno; es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica (cantidad desconocida $F(t)$ que relaciona funcionalmente a las variables involucradas) al fenómeno de variación o cambio. La configuración de esta ley depende de si son conocidas (primera categoría), o no (segunda categoría), las condiciones iniciales del problema específico. De cada categoría se derivan tres posibles situaciones, según la pregunta que se plantea en el problema específico derivado de un fenómeno de variación. Por ejemplo, para la primera categoría, tres situaciones³ posibles son:*



en donde: SA=Situación A(*Predicción*); SB=Situación B(*Predicción*); SC=Situación C(*Acumulación*); T=Transformación; $F(t_0)$ =Condición inicial conocida. En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, o $F(t_n)-F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$).

Relatividad de la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico

Nuestra investigación nos permitió percibir la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico como relativa a un campo conceptual anclado a un sistema de prácticas sociales (*Predicción*, *Acumulación* y *Constantificación de lo variable*) que son el eje de la organización de las situaciones problema que le dan sentido al Cálculo integral. Dicho campo fue construido a partir de un marco epistémico como el de Newton (siglo XVII) y cuya naturaleza está centrada en relaciones funcionales entre variables y sus variaciones y en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales (presente), de las variables de los fenómenos de variación, a los estados finales (futuro) en sus formas de número-estado futuro

³ El concepto de situación es tomado en el sentido del apartado sobre las situaciones del escrito *La Théorie des Champs Conceptuels* de Vergnaud (1990a); es decir, los procesos cognoscitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.

o función-estado futuro en donde es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social así como la necesidad de calcular la diferencia entre los estados finales e iniciales en donde subyace la noción de *acumulación* en tanto práctica social detonada por la práctica de predecir. Con base en la perspectiva planteada anteriormente hemos diseñado e implementado actividades para el salón de clases (Lic. en Ingeniería Civil y Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Chiapas en México) en donde un hallazgo importante consiste en evidenciar que la noción de *constantificación de lo variable* aparece sistemáticamente como intentos de los grupos humanos para cuantificar lo variable en el contexto de la práctica social de predecir en el sentido de construir la posibilidad de sustituir un movimiento con velocidad variable por un movimiento con velocidad constante (es decir, subyace la pregunta ¿bajo que condiciones se puede sustituir un movimiento por otro?) considerando el intervalo completo de tiempo o los intervalos mostrados en la tabla de valores numéricos. Algunos estudiantes acumulan distancias y otros no (los que toman el intervalo completo de tiempo). De manera que la *constantificación de lo variable* se constituye como una especie de práctica social detonada por la práctica social de predecir y ambas le dan sentido a la práctica social de acumular distancias. Lo anterior muestra algunos elementos que justifican la compatibilidad entre la naturaleza dialéctica de lo *C y A* de un contexto sociocultural del siglo XVII con la naturaleza dialéctica de lo *C y A* de un contexto sociocultural contemporáneo específico en donde está inmersa una institución escolar cuya naturaleza es la formación de usuarios de la matemática, lo cual implica su relatividad debido a que la relación dialéctica se conserva pero su naturaleza es distinta.

Un aspecto importante a resaltar fue que tuvimos necesidad de reformular la visión de la teoría de los campos conceptuales en el sentido de que fue necesario incorporar nociones que no están ancladas a la actividad matemática *per se* sino que pertenecen a la esfera de la actividad humana por lo cual visualizamos una especie de *campo de prácticas sociales* (por ejemplo, *Predicción y Acumulación y Constantificación de lo variable*) como ejes organizadores del Cálculo integral escolar. De manera que todos los elementos planteados nos están permitiendo tener referentes robustos para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en instituciones escolares específicas además de tener un punto de partida para futuras investigaciones con el fin de rediseñar la matemática escolar. Nuestra visión alternativa se ubica dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa cuyo objetivo fundamental consiste en *rediseñar el discurso matemático escolar con base en prácticas sociales*.

Referencias Bibliográficas

- Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la Analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Holanda: Kluwer Academic.
- Muñoz, G. (1999). Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración. *29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society* (pp. 14-15). México.

- Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(2), 131– 170.
- Muñoz, G, Cordero, F. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Piaget, J. y García R. (1994). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.
- Sierpinska. A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series. Vol. 2. School of Education University of Exeter: The Falmer Press.
- Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(13), 133-170.