Naturaleza de un Campo Conceptual del Cálculo Infinitesimal: Una Visión Epistemológica

Germán Muñoz
Centro Investigación en Matemática Educativa-Universidad Autónoma de Chiapas
México
german@cimateunach.org
Epistemología, Pensamiento matemático Avanzado – Nivel Superior

Resumen

A partir de una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral, que consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico (*C y A*), construimos un campo conceptual del Cálculo infinitesimal que implica la relación entre lo *C y A* con base en el marco epistémico de Newton. Evidenciamos supuestos epistemológicos del campo conceptual construido que justifican la naturaleza del conjunto de situaciones problema de base considerando las cosmovisiones y las prácticas sociales que permitieron el surgimiento del Cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Dicha naturaleza está centrada en relaciones funcionales entre variables y sus variaciones y la noción de *predicción* en tanto práctica social en sus formas de *número-estado futuro* o *función-estado futuro*.

Introducción

Esta investigación surgió a partir de una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral que consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico (*C y A*). En la *génesis histórica* encontramos una evidencia de la imposibilidad de la separación entre lo *C y A* en el contexto del marco epistémico de Newton (Cantoral, 1990; Piaget & García, 1994). De manera que construimos un campo conceptual del Cálculo (Muñoz, 2000), es decir, un conjunto de situaciones que le dan sentido al Cálculo integral y que implican la relación entre lo *C y A* con base en el marco epistémico de Newton y en la perspectiva de la integral vía la noción de *acumulación* (Cordero, 1994) así como en el referente de la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1990). Nuestros resultados principales consisten en evidenciar supuestos epistemológicos del campo conceptual construido que justifican la naturaleza del conjunto de situaciones problema de base. Dicha naturaleza está centrada en relaciones funcionales entre variables y sus variaciones y en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales (presente) de las variables de los fenómenos de variación a los estados finales (futuro) en sus formas de número-estado o función-estado en donde es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social. Nuestra visión epistemológica del campo conceptual previamente construido considera la cosmovisión y las prácticas sociales que permitieron el surgimiento del Cálculo infinitesimal en un contexto sociocultural específico del siglo XVII, que en el marco de la mecánica clásica originó lo que actualmente se le denomina la ciencia moderna. Con base en lo anterior un aspecto importante a resaltar fue que tuvimos necesidad de reformular la visión de la teoría de los campos conceptuales. Nuestra visión alternativa se ubica dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa.

Génesis histórica de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico

Al atender la problemática planteada al principio, identificamos teóricamente un aspecto que tienen en común lo conceptual y lo algorítmico, el cual se refiere a que existen situaciones problema (en tanto objeto de conocimiento) a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral. Este aspecto en común es una condición necesaria para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, aunque no suficiente para los fines de la Matemática Educativa. La identificación de la condición anterior nos permitió mirar otra perspectiva, en lugar de centrar la atención en dos objetos de conocimiento (la definición por una parte y el procedimiento preestablecido por la otra) y enseguida buscar condiciones de relación entre los dos objetos. Nuestras investigaciones nos han conducido a buscar las relaciones a partir de precisar, en lo más posible, las características del objeto de conocimiento común a lo conceptual y a lo algorítmico (Muñoz, 1999). El objeto de conocimiento común lo caracterizamos tomando en cuenta los cambios de marco epistémico (Piaget y García, 1994) y teniendo como referencia las investigaciones de Cantoral (1990) y Cordero (1994), además por la naturaleza de la problemática nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990); lo cual nos permitió realizar el análisis y la clasificación de las diversas situaciones problema que le dan sentido al Cálculo integral. Así que la pregunta obligada es ¿cuál es ese tipo de problemas?. En resumen, las características del objeto de conocimiento común a lo Conceptual y a lo Algorítmico las precisamos, en lo más posible, a través de precisar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración; después analizamos y clasificamos las diferentes situaciones que se derivan de ese tipo de problemas. Para identificar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración, revisamos brevemente el desarrollo histórico del Cálculo. La perspectiva histórica considerada, toma en cuenta los cambios de marco epistémico[1], es decir, la reformulación de preguntas cruciales a través de las cuales el Cálculo integral se ha desarrollado.

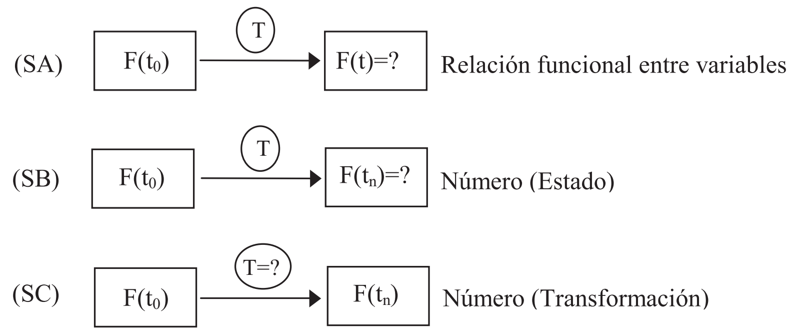
Antes del siglo XVII tanto Arquímedes como Aristóteles fueron algunos de los que más influyeron en la época. Señalamos sólo algunos hechos relacionados con los elementos del Cálculo integral. Cuando Aristóteles estudió el movimiento de los cuerpos el marco epistémico considerado fue: ¿Cuales son las *causas reales* del movimiento? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el reposo* (en época paralela en la civilización China había una cosmovisión donde *el estado natural de las cosas era el movimiento* y por ende tenía sentido la pregunta: ¿Cuáles son las *causas reales* del reposo?). Dicho marco Griego originó descripciones cualitativas del movimiento (fenómeno de variación); por ejemplo, tomemos el caso de la piedra que cae libremente o por un plano inclinado. Aristóteles, y sus seguidores medievales, se preguntaban acerca de la naturaleza del cuerpo que cae y de la forma en que se modifican sus atributos durante la caída. Dentro de este marco, Aristóteles no generó procedimientos para cuantificar el movimiento, simplemente porque no era parte de su marco epistémico. En los siglos XVII y XVIII se siguen estudiando los mismos

1 "...en cada momento histórico y en cada sociedad, predomina un cierto marco epistémico, producto de paradigmas sociales y epistémicos. Una vez constituido un cierto marco epistémico, resulta indiscernible la contribución que proviene de la componente social o de la componente intrínseca al sistema cognoscitivo. Así constituido, el marco epistémico pasa a actuar como una ideología que condiciona el desarrollo ulterior de la ciencia. Dicha ideología funciona como obstáculo epistemológico que no permite desarrollo alguno fuera del marco conceptual aceptado. Sólo en los momentos de crisis, de revoluciones científicas, hay una ruptura de la ideología científica dominante y se pasa a un estadio diferente con un nuevo marco epistémico..." (Piaget & García, 1994, p. 234)

fenómenos de variación (curvas geométricas, movimiento de cuerpos), pero con otros marcos. Así, Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento* y por ende el principio de inercia fue construido. En dicho marco Galileo elimina las preguntas sobre *causas reales* que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones. Pero *medir* es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos. El pasaje de atributos a relaciones implica una identificación de parámetros y su consiguiente cuantificación. Pero no sólo se trata de mediciones, sino que Galileo introduce el concepto de relación funcional entre las variables, que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria; esto supone la introducción del tiempo como variable independiente. Ahora analicemos el marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos; este marco era: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget y García, 1994) pregunta que tuvo sentido en una cosmovisión en donde *el estado natural de las cosas era el reposo y el movimiento*. Así, el objeto fue *calcular* la evolución posterior del sistema de movimiento sin plantearse otras preguntas sobre las *causas reales* de él. Pero la evolución misma es calculada sobre la base de un sistema de transformaciones que permiten pasar de los valores de las variables, en el estado inicial, a los valores que adquieren en cualquier otro instante. Esta transición de causas últimas a sistemas de transformación fue un paso decisivo en la historia de la mecánica, uno de los pilares más sólidos de la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la idea de la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos (Piaget y García, 1994). Es decir, el hecho de que la pregunta sea *calcular la evolución posterior* implica cuantificar estados posteriores de cierta variable, en función de otra, a partir de las condiciones iniciales para *predecir* parcialmente la evolución de un fenómeno de variación o cambio. La unión tan fructífera entre la matemática y la física propias del siglo XVII y parte del XVIII, sufrió una ruptura a partir del problema de la cuerda vibrante cuya solución tuvo consecuencias sobre el concepto de función. En el siglo XVIII Leonard Euler (1707-1783), abandonó el estudio de curvas geométricas y fundó la ciencia de los infinitésimos, sobre una teoría formal de funciones. De alguna manera, esto significó la ruptura entre un Cálculo de variables (físicas o geométricas), como inicialmente empezó, y un Cálculo de funciones numéricas. Tal ruptura posibilita un nuevo marco epistémico que fue delineado en la obra de Fourier: ¿Qué significado tiene la □□*f(x) dx,* donde *f(x)* es una sucesión *arbitraria* de ordenadas?. En este marco Cauchy (1789-1857) inició la construcción de una teoría de integración y escribió la definición de función continua (Cordero, 1994). Luego construye su teoría de integración para funciones continuas. Una implicación de su definición es que $\int_a^b f(x)dx$ tiene un valor determinado para cualquier función arbitraria continua; sin embargo, su definición se extiende al caso de una función acotada, con un número finito de puntos de discontinuidad en un intervalo, y para ciertas funciones con un número infinito de puntos de discontinuidad. Por otra parte, el marco epistémico de Riemann (1826-1866) consiste en lo siguiente: ¿Qué se entiende por $\int_a^b f(x)dx$, donde *f(x)* es una sucesión *arbitraria* de ordenadas y además densamente discontinua? y ¿en qué casos es una función integrable o no lo es ?. Como resultado de este marco epistémico, se reflexiona sobre el significado del objeto integral *per se* y no sobre los usos que el proceso de integrar proporcionaba. Sin duda, en este periodo se trata ya de un *cálculo de funciones numéricas*, es decir, el objeto de estudio ya no son las cantidades variables sino las funciones vistas como una sucesión arbitraria de ordenadas (Cordero, 1994; Cantoral, 1990). Así, en el periodo que abarca parte del siglo XVIII y el siglo XIX los marcos epistémicos ya no se refieren a los fenómenos de variación o cambio como en los periodos anteriores, lo cual generó el inicio de los procesos de fundamentación del Cálculo y la emergencia del Análisis Matemático.

Hacia un campo de prácticas sociales del cálculo

Fue en el siglo XVII cuando surge el Cálculo infinitesimal (Cantoral, 1990) y también la unión entre física y matemáticas, es decir, la matematización de la física. También es en él donde los Newtonianos conciben los problemas de la dinámica como el tipo de problemas que más tarde se denominarían en la física *problemas con condiciones iniciales* (Piaget y García, 1994). En el siglo XIX se reflexiona sobre el objeto matemático *per se* (la integral) y las discusiones giran alrededor de la función integrando (*f(x)*), vista como una sucesión arbitraria de ordenadas, y sobre el dominio de dicha función (Cordero, 1994). Además, los marcos epistémicos ya no se refieren a los fenómenos de variación o cambio como en los marcos anteriores. Con base en las discusiones anteriores y debido a que los fenómenos de variación o cambio son el referente en el que surgen los conceptos de derivada e integral, y también son los que favorecen pensar la integral, hablando cognoscitivamente (Cordero, 1994), nuestro trabajo se desarrolla en el contexto del marco epistémico de Newton. Sin embargo, el análisis realizado en el apartado anterior (2) nos permitió precisar, en cierto modo, el tipo de problemas cuya solución exige de una integración, lo cual condensamos así: *son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación o cambio. Estos problemas específicos no se refieren a las causas del fenómeno de variación (¿por qué varían?), sino al cuánto varían una vez que se reconoce cómo varía el fenómeno; es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica (cantidad desconocida F(t) que relaciona funcionalmente a las variables involucradas) al fenómeno de variación o cambio. La configuración de esta ley depende de si son dadas, o no, las condiciones iniciales del problema específico.* En primer lugar analizamos dos categorías de relaciones involucradas en las leyes que cuantifican al fenómeno de variación o cambio. Primera categoría: dadas las condiciones iniciales del problema, encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio. Segunda categoría: encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación o cambio cuando no son conocidas las condiciones iniciales del problema. De cada categoría se derivan tres posibles situaciones, según la pregunta que se plantea en el problema específico derivado de un fenómeno de variación. Para la primera categoría, tres situaciones[2] posibles son:



2 El concepto de situación es tomado en el sentido del apartado sobre las situaciones del escrito La Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1990a); es decir, los procesos cognoscitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.

en donde: SA=Situación A(*Predicción*); SB=Situación B(*Predicción*); SC=Situación C(*Acumulación*); T=Transformación; $F(t_0)$=Condición inicial conocida. En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, *o* $F(t_n)-F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$).

Así, es posible analizar a cada una de las situaciones con las siguientes expresiones:

<u>(SA):</u> *Predicción* $*F(t_0)+\int_{t_0}^{t}F'(t)dt=F(t)$ *Antiderivación*

$$*F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)+\frac{F''(t_0)(t-t_0)^2}{2!}+\frac{F'''(t_0)(t-t_0)^3}{3!}+\ldots=F(t)\ \textit{Derivación sucesiva}$$

<u>(SB):</u> *Predicción* $*F(t_0)+\int_{t_0}^{t_n}F'(t)dt=F(t_n)$ *Antiderivación*

$$*F(t_0)+F'(t_0)(t_n-t_0)+\frac{F''(t_0)(t_n-t_0)^2}{2!}+\frac{F'''(t_0)(t_n-t_0)^3}{3!}+\ldots=F(t_n)\ \textit{Derivación suce}$$

$$*F(t_0)+\sum_{i=0}^{n-1}F'(t_i)\Delta t\approx F(t_n)\ \text{ Suma}$$

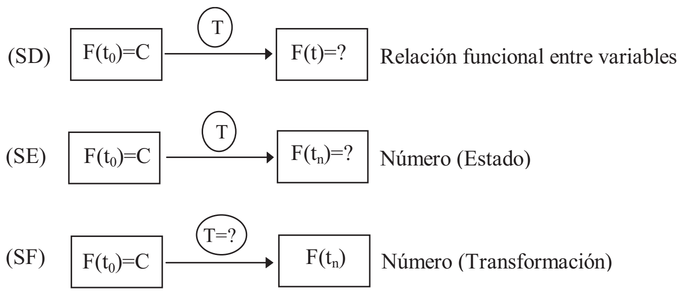
<u>(SC):</u> *Acumulación* $*F(t_n)-F(t_0)=\int_{t_0}^{t_n}F'(t)dt$ *Antiderivación*

$$*F(t_n)-F(t_0)=F'(t_0)(t_n-t_0)+\frac{F''(t_0)(t_n-t_0)^2}{2!}+\ldots\ \textit{Derivación sucesiva}$$

$$*F(t_n)-F(t_0)\approx\sum_{i=0}^{n-1}F'(t_i)\Delta t\ \ \textit{Suma}$$

Las tres situaciones abarcan a la llamada integración definida porque las condiciones iniciales del problema están dadas.

Para la segunda categoría las tres situaciones son:



en donde: SD=Situación D; SE=Situación E; SF=Situación F; T=Transformación; *C*=Condición inicial desconocida. En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida (*F(t), F(t_n), o F(t_n)-C* según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación (*dF(t)/dt*).Así, es posible analizar a cada una de las situaciones con la siguiente expresión:

(SD): $*C + \int F'(t)dt = F(t)$ *Antiderivación*

(SE): $*C + \int F'(t)dt = F(t)$ y evaluar en t_n *Antiderivación*

(SF): $*F(t_n) - C = \int F'(t)dt$ *Antiderivación*

Estas tres situaciones abarcan a la integración indefinida porque las condiciones iniciales del problema no están dadas y en donde la *predicción y acumulación* son desvanecidas.

Discusión final

Nuestra investigación nos permitió percibir a *la epistemología del Cálculo integral* en el sentido de caracterizar la epistemología de un campo conceptual, *anclado en un sistema de prácticas sociales (Predicción, Acumulación),* construido a partir de un marco epistémico como el de Newton y cuya naturaleza está centrada en relaciones funcionales entre variables y sus variaciones y en la construcción de sistemas de transformación que permiten pasar de los estados iniciales (presente), de las variables de los fenómenos de variación, a los estados finales (futuro) en sus formas de número-estado futuro o función-estado futuro en donde es inherente la noción de *predicción* en tanto práctica social así como la necesidad de calcular la diferencia entre los estados finales e iniciales en donde subyace la noción de *acumulación* en tanto práctica social detonada por la práctica de predecir.

Un aspecto importante a resaltar fue que tuvimos necesidad de reformular la visión de la teoría de los campos conceptuales en el sentido de que fue necesario incorporar nociones como la *predicción* y la *acumulación* que no están ancladas a la actividad matemática sino que pertenecen a la esfera de la actividad humana por lo cual visualizamos una especie de *campo de prácticas sociales (por ejemplo, Predicción y Acumulación)* como ejes organizadores del Cálculo integral escolar.

De manera que todo lo anterior permite tener elementos para propiciar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico en instituciones escolares específicas además de tener un punto de partida para futuras investigaciones con el fin de rediseñar la matemática escolar. Nuestra visión alternativa se ubica dentro de los esfuerzos para desarrollar una aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa cuyo objetivo fundamental consiste en *rediseñar el discurso matemático escolar con base en prácticas sociales.*

Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Cordero, F; Muñoz, G; Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

García, R. (2000). *El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Piaget a la teoría de sistemas complejos*. España: Gedisa.

Muñoz, G. (1999). Aspectos Epistemológicos de la Relación entre lo Conceptual y lo Algorítmico, en la integración. *29 Congreso Anual de la Jean Piaget Society* (pp. 14-15). México.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3* (2), 131-170.

Piaget, J. y García R. (1994). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Vergnaud, G. (1990). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(3), 133-170.