¿Se pueden crear Matemáticas desde la Didáctica de la Matemática?

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid
España
Ortega@am.uva.es

Resumen

El presente trabajo se enmarca en dos de las investigaciones llevadas a cabo sobre el concepto de límite y sobre la demostración matemática. En la primera se plasmó una nueva conceptualización de límite funcional, más dinámica que la conceptualización métrica, tan rigurosa como esta última, que no está sujeta al formalismo impuesto por la sintaxis de la manipulación simbólica, y que favorece la interpretación del concepto. En la segunda se analizan los "esquemas de prueba" de los alumnos, los procesos y los enunciados matemáticos, teniendo en cuenta tanto el razonamiento como las funciones de la demostración. Se aplican las conclusiones de ambas investigaciones para establecer algunos resultados matemáticos.

El origen de las investigaciones

Las dos investigaciones citadas tienen su origen en problemas educativos de aula, y la postura inicial del Profesor-Investigador (P-I) respectivo y del Director de las investigaciones fue que la mayor parte de los alumnos no entienden ni el concepto de límite ni la mayor parte de las demostraciones que se hacen en las aulas.

Ya en la década de 1980 T. Ortega construyó un programa de ordenador específico para el aprendizaje del concepto de límite, programa que trabajaba de forma numérica y gráfica la definición del concepto, y que daba paso al formalismo métrico en los términos de ε y δ, al teorema de caracterización, porque era consciente de las dificultades que tenían los alumnos al respecto. Años más tarde S. Blázquez (1999), también cree en esta hipótesis y ambos piensan que el concepto de límite es uno de los conceptos matemáticos más complicados en todos los niveles educativos, supuesto que en cierto modo es contrastado por T. Ortega con licenciados en matemáticas, que en su mayor parte, tras un período no muy largo de inactividad tienen serias dificultades para reproducir la definición conceptual métrica con rigor. Así las cosas nos pareció interesantísimo investigar esta problemática.

La primera creencia sobre el no aprendizaje acerca de las demostraciones también tuvo lugar en el aula, en la década de 1990, T. Ortega pregunto licenciados en Matemáticas, Físicas e Ingeniería si la demostración que da P. Puig (1980) sobre el teorema de Tales (los alumnos la tenían escaneada en una hoja) era ciertamente una demostración o no. Las respuestas favorables estaban en torno al 50 % y las explicaciones que daban la mayor parte de los licenciados eran totalmente disparatadas. M. Ibañes (2000), tras su larga experiencia como docente, tenía una creencia similar y nos propusimos averiguar cómo se producían estos aprendizajes.

Metodología

Si bien la Investigación-Acción (I-A) tiene sus orígenes en los años cuarenta con Kurt Lewin en Norteamérica con fines sociales, a finales del pasado siglo se ha aplicado con éxito en varios países para investigar fenómenos educativos. A nivel teórico esta metodología ha sido ampliamente tratada en la literatura, entre otros autores, por Kemmis y McTaggart (1988), Hopkins (1999), Elliot (1990), y en España G. Peréz (1994). Esta autora indica que la Investigación-Acción (I-A) es una metodología muy apropiada cuando el objeto de estudio son los problemas prácticos tal y como ocurren en su propio contexto y, entre muchas otras cosas, asegura que además de analizar la realidad, ayuda a mejorar los fenómenos educativos.

Estos autores fundamentan su validez en triangulaciones y en saturaciones, pero el problema de la validación está implícito en toda investigación educativa sobre aspectos cognitivos del aprendizaje de los alumnos, y nosotros afirmamos que las informaciones que aportan las entrevistas a parejas de alumnos y los debates en el aula complementan la indagación.

Nosotros sostenemos que tanto las entrevistas como los debates tienen que ser realizados por alguien que conozca las hipótesis de trabajo de la investigación, que sea un especialista en los contenidos matemáticos que se utilizan, que conozca las producciones de los alumnos sobre los que se ha hecho el análisis y las correspondientes reflexiones, y también a los propios alumnos. Considerando estos principios la persona ideal en ambos casos es el P-I.

Conviene que las entrevistas se hagan a parejas de alumnos para que haya triangulaciones y los alumnos deben ser elegidos atendiendo a sus respuestas y a la facilidad de palabra. En los debates el P-I hará de moderador y deben tener dos fases: en la primera los alumnos elegidos (entre los que dieron soluciones diferentes en sus tareas) defenderán sus producciones unos frente a otros y en la segunda intervendrán todos los alumnos de la clase. Tanto los debates, primero, como las entrevistas, después, se graban en su totalidad y así el Director se convierte en el tercer vértice de la triangulación y junto con el P-I analizarán todas las intervenciones.

Fundamentos de las investigaciones

En ambos casos se hizo un análisis histórico y curricular, tras el cual se procedió a la búsqueda de los trabajos de investigación más relevantes que tenían que ver con el concepto de límite y con la demostración. En el primer caso se consideraron las siguientes fuentes:

- Investigaciones sobre concepciones sobre límite funcional.
- Investigaciones sobre errores y dificultades del concepto de límite.
- Investigaciones sobre el concepto de límite en los manuales.
- Investigaciones sobre la enseñanza del concepto de límite.

Apoyados en estas investigaciones elegimos un marco teórico para ayudarnos en el análisis de las tareas de los alumnos. En concreto consideramos la teoría del “Concepto Imagen” de Tall y Vinner y los “Actos de Comprensión” de Sierpinska.
En el caso de la demostración también se hizo una clasificación de las fuentes en cuatro bloques:

- Trabajos generales sobre el aprendizaje de la demostración.

- Trabajos sobre las funciones de la demostración.
- Trabajos sobre niveles de demostración.
- Trabajos sobre la demostración en el aula.

Las investigaciones de Harel y Sowder y de de Villiers fueron las más relevantes para nosotros y ellas aportaron el marco teórico que utilizamos en esta investigación.

Aportaciones sobre el concepto de límite

Se realizó un trabajo de campo durante tres años trabajando los registros verbales, numéricos, gráficos y simbólicos-algebraicos, y se desarrolló una conceptualización de límite funcional basada en la idea de aproximación óptima (tendencia), evitando el subjetivismo y prescindiendo del formalismo de la terminología $\varepsilon-\delta$. Es ésta:

Definición: Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (se lee límite cuando x tiende a a es L), si cuando x tiende a a, siendo x distinto de a, sus imágenes, $f(x)$, tienden a L.

Otra escritura equivalente a la anterior es ésta: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si para cualquier aproximación de L existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos los puntos del entorno reducido mejoran dicha aproximación.

De las conclusiones relacionadas con esta conceptualización destacan las siguientes:

- El tratamiento de límite funcional como aproximación óptima, por una parte, aporta unas herramientas de trabajo más ventajosas que las concepciones ingenuas basadas en simples aproximaciones y, por otra, es comprendida por los alumnos mejor que la definición métrica.
- Si se quiere utilizar la concepción formalista $\varepsilon-\delta$ ésta debe introducirse después de que los alumnos comprendan la conceptualización como aproximación óptima, pero ésta aporta el rigor necesario para establecer las propiedades asociadas al concepto.
- Es más interesante la comprensión del concepto que los cálculos algorítmicos y en esa comprensión es importantísimo el uso de los cuatro registros y las traducciones de uno a otro.

Aplicaciones

Prueba del teorema de unicidad. Suponiendo que l_1 y l_2 sean dos límites distintos de f en $x=a$, entonces $l_1<l_2$ o bien $l_2<l_1$ y poniendo $m=(l_1+l_2)/2$, en el primer caso, $l_1<m<l_2$ y, en el segundo, $l_2<m<l_1$. Suponiendo que se cumple el primer caso, como m es una aproximación de l_1, existirá un entorno reducido de a, tal que todas sus imágenes mejoran la aproximación fijada por m y, por tanto, todas sus imágenes serán menores que m. Análogamente, como m también es una aproximación de l_2, existirá otro entorno reducido de a, tal que todas sus imágenes mejoran la aproximación dada por m y, por tanto, todas sus imágenes serán mayores que m. En consecuencia todas las imágenes del entorno intersección son a la vez menores y mayores que m y en consecuencia $l_1>=l_2$. Análogamente se establece que $l_2>=l_1$ y como consecuencia de las dos $l_1=l_2$.

Prueba del teorema del signo. Suponiendo que el límite, *L*, de la función *f* en $x=a$ es positivo, como *0* es una aproximación a *L*, existirá un entorno reducido de *a* tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación y, por tanto, serán positivas.
Teorema de integrabilidad. Una función f es integrable Darboux en [a, b], si fijada una aproximación positiva de 0 existe una partición de [a, b] tal que la diferencia entre las sumas superiores de Darboux y las sumas inferiores mejoran dicha aproximación.

Aportaciones sobre la demostración matemática

El punto de partida fue el concepto de Esquema de Prueba (lo que constituye convencimiento y persuasión para los alumnos) que establecen Harel y Sowder (1998) y la clasificación que estos mismos autores hacen de los esquemas de prueba desde el punto de vista da la cognición de los alumnos. En el curso de la investigación nos damos cuenta de que esta clasificación es insuficiente y se completa en la misma. Ya con el marco enriquecido en la propia investigación se obtienen una serie de conclusiones, de las que destacan las siguientes:

- Los alumnos se encuentran en un estado de transición entre los esquemas de prueba inductivos de un caso y los intuitivo-axiomáticos, pasando por los inductivos de varios casos, por los inductivos sistemáticos y por los transformacionales y utilizan uno u otro dependiendo de las condiciones de los enunciados.
- Los esquemas inductivos se manifiestan muy *enraizados* en los alumnos de este nivel. Son mayoría los estudiantes que utilizan o aceptan esta clase de esquemas, muchos de los que evolucionan hacia los esquemas intuitivo axiomáticos no renuncian a los inductivos, y algunos vuelven a retomarlos de una u otra forma.
- Buena parte de los alumnos tiene dificultades en reconocer demostraciones, en distinguirlas de otros procesos y no son conscientes de lo que supone haber demostrado un enunciado.
- El reconocimiento de la demostración está en relación con la evolución del *esquema de prueba* de los estudiantes y, en gran parte, viene determinado por el fuerte enraizamiento de los *esquemas inductivos*.
- Las dificultades que tienen los alumnos a la hora de interpretar los enunciados de los teoremas son tan importantes que les impide saber lo que se tendría que hacer para establecer el enunciado.
- Son particularmente difíciles para ellos los enunciados que contienen la expresión "*condición necesaria"* y les siguen en dificultad los que contienen los vocablos "*condición suficiente",* pero cuando estas expresiones se sustituyen por otras más coloquiales los enunciados se tornas más comprensibles.

Aplicaciones

Ya hemos visto cómo la primera investigación ha generado una nueva conceptualización de límite funcional, pero hay más. Por una parte, las producciones de los alumnos generaron esquemas de prueba transformacionales, desconocidos para nosotros, como por ejemplo el que consiste en levantar un punto de la recta para establecer que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman dos rectos; por otra parte, los problemas tratados en nuestra investigación tienen su origen en la práctica profesional y, por otra, las conclusiones anteriores ponen de manifiesto que para los alumnos no son tan importantes las demostraciones como, sin duda, lo son para el matemático, y enlazando con la primera investigación, el formalismo tampoco. Más aún el formalismo puede encorsetar la creación matemática en exceso y, en general, son más motivadores los procesos creativos. Con la base que aportan estas reflexiones voy a presentar dos creaciones matemáticas que tienen que ver con la práctica educativa.

La primera surge de mi insatisfacción cómo profesor de matemáticas, cuando desarrollo el tema de escalas, al formular la siguiente pregunta: ¿La proporcionalidad de distancias implica la misma proporcionalidad en longitudes de curva? Así surge el concepto de Semejanza analítica y los teoremas de conservación de longitudes y de áreas. La segunda tiene que ver con la motivación para el estudio de la circunferencia y se da un procedimiento para construir las "curvas de enlace" de las vías de circulación rápida. En ambos casos se consideran esquemas de prueba inductivos.

Semejanza analítica: dos curvas, C_1 y C_2, son semejantes cuando sus ecuaciones paramétricas se pueden expresar de la forma:

$$C_1 \equiv \begin{cases} x = f(t), & t \in [a,b] \\ y = g(t), & t \in [a,b] \end{cases} \qquad C_2 \equiv \begin{cases} x = k \cdot f(t), & t \in [a,b] \\ y = k \cdot g(t), & t \in [a,b] \end{cases}$$

y ambas estén referidas en sistemas de referencia tales que uno de ellos se obtienen del otro mediante una traslación y un giro. A la constante k se la llama razón de semejanza o constante de proporcionalidad.

Teorema de conservación de longitudes. Sí A_1, A_2, ..., A_n son n arcos de curvas semejantes a una curva plana dada A, que se han obtenido de ésta con los factores de semejanza C_1, C_2, ..., C_n, tales que $C_1+C_2+ ...+ C_n=1$, *entonces la longitud del arco de la curva* A *es la suma de las longitudes de los arcos de las n curvas* A_1, A_2, ..., A_n.

Teorema de conservación de áreas. Si A_a es el área determinada por una curva sobre el intervalo $[0, a]$, A_b es el área determinada por la curva semejante a la anterior sobre el intervalo $[0, b]$ y A_c es el área determinada por la curva semejante a la primera sobre el intervalo $[0, c]$, entonces $A_a=A_b+A_c$ si, y sólo sí, $a^2=b^2+c^2$.

La clotoide (radioide) es la curva que se debiera utilizar para enlazar tramos rectos en autovía o autopistas. Es una curva función trascendente que en paramétricas tiene estas ecuaciones:

$$x = a\int_0^t \cos u^2 du = aC(t), \text{ con } t=s/a, \; y = a\int_0^t sen u^2 du = aS(t), \text{ con } t=s/a.$$

Cuando se dibuja esta curva en ingeniería se hace con una planilla y depende de las habilidades del dibujante, pero esta curva se puede dibujar con arcos de circunferencia tangentes y de tal manera que se verifique el siguiente enunciado:

Teorema de aproximación. Para enlazar dos semirrectas se puede sustituir la clotoide por n arcos de circunferencias tangentes entre sí y tales que las diferencias de sus curvaturas estén más próximas a cero que cualquier número positivo prefijado.

Referencias bibliográficas

Blázquez., S. y Ortega, T. (2001). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *AULA, Vol. 10, pp. 117-133.* Salamanca.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol 4. Nº3, pp. 219-236. México.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO. Vol. 30, pp. 67-82.* Graó. Barcelona.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, Vol. III., pp. 234-283 . American Mathematical Society, Providence, USA.

Elliot, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.

Hopkins, D. (1989). *Investigación en el aula.* Barcelona: PPU.

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Laertes.

Krenz, A y Osterloh, H. (1975). *Curvas de transición en carretera: manual de clotoides para proyecto y replenteo.* Técnos. Madrid.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001): Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO. Vol. 28, pp 39-60.* Graó. Barcelona.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2002) "Interpretación de algunas expresiones usuales en los enunciados de los teoremas", *Quadrante,* Vol. 10, Nº 2, pp. 97-123. Lisboa.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2002): "Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato".*Enseñanza de las Ciencias*. Nº 21 (1), pp. 49-63. Barcelona.

Pérez, G. (1994): *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes.* Madrid: La Muralla.

Ministerio de fomento (2001): *Norma 3.1-1C sobre trazado de carreteras*. Orden Ministerial de 13/09/2001.

PUIG, P. (1980): *Curso de Geometría Métrica.* Gómez Puig Ediciones. Madrid.

Sierpinska, A. (1985): Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 6.1, pp. 5-67.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math,* Vol. 12, pp. 151-169.

VAN ASH, A.G. (1993). "To prove, why and how?". *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, Vol. **2**, pp. 301-313.

Villiers, M. de (1993). "El papel y la función de la demostración en matemáticas". *Épsilon*, **26**, pp. 15-30.