

## Análisis Gráfico de funciones

**María del Socorro Valero**

CBTis No. 164, México

paraklet@prodigy.net.mx

Pensamiento variacional - Nivel: Superior

### Resumen

En este curso se pretende realizar análisis de funciones a partir de sus representaciones gráficas. Se parte del desarrollo de actividades de lectura, interpretación y construcción de gráficas de funciones sobre la base de un ambiente rico en significados visuales. Se desarrollarán actividades que requerirán procesos de conversión y tratamiento de diferentes sistemas semióticos de representación como el gráfico, verbal y analítico, pero predominantemente el gráfico. La validez de las argumentaciones que permitirán dar respuesta a los cuestionamientos incluidos en estas actividades, será de naturaleza eminentemente visual.

### Introducción

Hoy día se acepta que la escuela tiene como uno de sus fines principales la formación de una concepción científica del mundo en los estudiantes. También es aceptado por la comunidad académica, que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática pueden contribuir al logro de este fin. Pero en los procesos que intencionalmente se ponen en marcha para la consecución de este propósito se forman una serie de concepciones, muchas de cuales, suelen convertirse en obstáculos para el cumplimiento de este objetivo.

En la práctica escolar los profesores de matemáticas utilizan gráficas cartesianas o representaciones figurales para la enseñanza de las funciones y el análisis de su comportamiento. Pero hay evidencias de que existen muchas concepciones, denominadas alternativas por algunos autores (Confrey, 1990; Mevarech y Kramarsky, 1997) que se generan en los estudiantes, y también en algunos profesores, que no son congruentes con las aceptables en la matemática. Las concepciones alternativas podrían permanecer en estudiantes y profesores indefinidamente si no se encuentran en situaciones en las que se haga explícita su contradicción con las teorías aceptadas, pero sobre todo, si no existe interiorización de tales contradicciones y el reacomodo cognitivo que las hagan convivir coherentemente con las aceptables.

Estas concepciones han sido identificadas a partir del planteamiento de actividades de construcción o de lectura y análisis de gráficas. La construcción de gráficas a partir de un enunciado verbal o de una situación real, implica acciones derivadas del cambio de registro; a partir de esas producciones es que los investigadores identifican tales concepciones. Algunas de las investigaciones que involucran construcción de gráficas se pueden dividir en las que usan tecnología (Yerushalmy y Shternberg, 1998) en donde los estudiantes se ven precisados a pasar del contexto real al registro gráfico, y aquellas en donde los estudiantes construyen gráficas sin el uso de tecnología (Mevarech y Kramarsky, 1997; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002) en que los estudiantes transitaron del registro verbal al gráfico, o como la de Even (1998) en donde algunas de las actividades suponen el paso de la representación simbólica a la representación gráfica. Algunas otras investigaciones están más enfocadas al análisis de gráficas previamente construidas por el investigador (Janvier, 1998); las interpretaciones en este caso están más influidas por lo que los estudiantes o profesores *observan* o *interpretan* sobre una

gráfica dada. A esta categoría pertenece el trabajo de Hitt (1996) en el cual los profesores examinados requirieron transitar del registro gráfico a la representación pictórica.

En México, el grupo del Dr. Crisólogo Dolores, ha realizado investigación cuyo objetivo ha sido el desarrollo de pensamiento y lenguaje variacional en situación escolar. Uno de los temas que hoy día ha ocupado parte importante de su atención se refiere precisamente al análisis y construcción de gráficas de funciones. En estos trabajos, han sido reiteradamente encontradas una serie de concepciones alternativas respecto del análisis de funciones a través de sus gráficas. En (Dolores y Valero, 2004) se reporta que, en un estudio longitudinal realizado con estudiantes universitarios se identificaron una amplia variedad de concepciones alternativas, entre las que se identificaron dos patrones principales al plantear los cuestionamientos utilizando los registros verbal y gráfico:

- Patrón 1. Cuando los estudiantes manifiestan este patrón de concepciones alternativas, establecen una consistente asociación entre abscisas y ordenadas para determinar el signo de las segundas, de acuerdo al signo de las primeras. Además, la identificación del comportamiento de la función se hace a partir de la consistente relación que los estudiantes establecen entre su ubicación y su comportamiento, es decir, si las ordenadas son positivas, la función es creciente; si las ordenadas son negativas, la función es decreciente. Presumimos que detrás de este patrón de concepciones alternativas se encuentra el hecho de que el individuo no pone en juego la relación de covariación existente entre las variables presentadas en forma de gráfica, manifestando con ello deficiencias en el funcionamiento de su razonamiento covariacional en el sentido de Carlson *et al* (2002).
- Patrón 2. Cuando los estudiantes analizan las gráficas de funciones de acuerdo a este patrón, la ubicación de la función la determinan en términos de dónde comienza su mano a trazar la gráfica. Si su mano comienza el trazo arriba del eje horizontal, para ellos, la función es positiva; si ubican su mano al inicio del trazo debajo del eje horizontal, para ellos, la función es negativa. A su vez, el comportamiento de la función se analiza asignando a los términos creciente y decreciente, significados acordes al sentido que estas palabras tienen en el lenguaje coloquial. Es decir, creciente es todo lo que sube y decreciente es todo lo que baja. Para los estudiantes que manifiestan este patrón de concepciones alternativas, la lectura que hacen de las gráficas en el plano cartesiano responde solo el movimiento de la mano; atienden la trayectoria del trazo de la curva y desatienden la relación de covariación entre  $x$  e  $y$ .

Cuando las preguntas fueron formuladas utilizando los registros analítico y gráfico, identificaron un tercer patrón:

- Patrón 3. El análisis de las funciones lo hacen atendiendo a la relación que establecen entre los signos de relación presentes en el enunciado de la instrucción y la variable  $x$ .

Las cosas no son muy diferentes en profesores de física y estudiantes de secundaria. Al plantearles actividades de análisis de gráficas de funciones de coordenadas tiempo–distancia que representaban fenómenos físicos, Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) encontraron, concepciones alternativas como las siguientes:

- Asociación entre la mayor velocidad media con la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o con el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura;

- Asociación entre la gráfica cartesiana que se asemeja a la trayectoria para el caso de la caída libre de los cuerpos, con la trayectoria misma;
- La no aceptación de que una gráfica de coordenadas tiempo–distancia y otra de coordenadas velocidad–tiempo puedan representar al mismo movimiento.

Se pudiera pensar que con gráficas sencillas como las rectas, los estudiantes no encontrarían mayores problemas, pero esto no es así. Dolores y Catalán (2000) encontraron, en situación escolar que, cuando los estudiantes de bachillerato utilizaban gráficas para determinar los cambios, sólo la mitad de ellos lo lograron hacer. Solo una cuarta parte de los estudiantes dieron muestras de interpretar consistentemente la ecuación de la recta, dada su pendiente y la ordenada al origen y representarla gráficamente, aunque no utilizaron la relación de proporcionalidad implícita en el coeficiente  $m$  que da la pendiente. En general, encontraron escasa capacidad para visualizar y analizar gráficas y mayor proclividad a realizar operaciones.

### Referentes Teóricos

Desde un punto de vista general este curso se fundamenta en las ideas que acerca del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV) se han generado en el grupo de investigadores organizados en torno del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). En nuestro país varios investigadores (Cantoral y Farfán, 2000; Dolores 2000) realizan sus trabajos ocupándose de esta línea de investigación la cual estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos, atendiendo a una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende pues el conocimiento superficial no resulta suficiente para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de análisis.

Por otra parte, acorde con la Teoría Antropológica de la Didáctica de las Matemáticas de Chevallard (Bosch, 2000) consideramos como objeto primario de investigación a la actividad matemática, tal como se realiza en una institución determinada. Esta teoría describe a la actividad matemática y el saber que de ella emerge en términos de organizaciones matemáticas. Una organización matemática es una entidad compuesta por tipos o tareas problemáticas, tipos de técnicas que permiten resolver los tipos de problemas, tecnologías o discursos que describen y explican las técnicas y una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. En general, los elementos tecnológicos y teóricos de una organización matemática remiten a elaboraciones descriptivas y justificativas que son el fruto del trabajo matemático de varias generaciones. Pero, cuando se consideran organizaciones matemáticas en proceso de construcción o reconstrucción, ya sea en manos de investigadores o de alumnos y profesores, entonces también podemos hablar de *tecnologías* y *teorías* para referirnos a discursos mucho más informales y espontáneos producidos por los sujetos en situación de resolución de problemas para comentar, explicar y justificar su actividad. Una de las organizaciones matemáticas utilizadas en este curso, se refiere a algunas tareas problemáticas relativas al análisis de funciones. Estas tareas nos permiten estudiar la actividad matemática relativa al análisis de funciones por medio de representaciones gráficas, verbales y analíticas.

Asumimos al igual que Duval (1999) a estas representaciones semióticas como medios de exteriorización de las concepciones y que son útiles en la comunicación. Las concepciones de los estudiantes, exteriorizadas por medio de diversas formas de representaciones lingüísticas, han sido estudiadas por los investigadores en diversos campos y han involucrado a conceptos tales como los obstáculos epistemológicos (Bachelard 1988, Sierpinska, 1992), los obstáculos ontogénicos y los obstáculos didácticos (Brousseau, 1997), las imágenes conceptuales (Tall y Vinner, 1981), las concepciones espontáneas (Pozo 1996, Farfán 1997) las concepciones precientíficas, las concepciones alternativas (Confrey, 1990; Mevarech y Kramarsky, 1997). Todas estas dan lugar a concepciones que cobran forma de creencias, se arraigan fuertemente en la mente de los estudiantes y son difíciles de cambiar mediante la enseñanza tradicional. A lo largo de sus vidas los seres humanos desarrollan ideas acerca de su mundo, desarrollan significados para palabras usadas en la ciencia y desarrollan estrategias para obtener explicaciones acerca de cómo y por qué las cosas se comportan como tales. Estas categorías de creencias, teorías, significados, y explicaciones, las consideramos como *concepciones de los estudiantes*. Cuando esas concepciones se forman antes de que el conocimiento haya sido sujeto oficial de aprendizaje, dan lugar a las concepciones espontáneas. Aún después de que son sujetos a procesos sistemáticos de enseñanza los estudiantes construyen *sus propios* conocimientos que difieren de los saberes que los profesores les desean transmitir.

Cuando esas concepciones de los estudiantes entran en conflicto con los significados aceptados, aparecen las *concepciones erróneas*, *errores sistemáticos*, las *concepciones alternativas* (Confrey, 1990). Estos términos reflejan diferentes perspectivas de los conocimientos de los estudiantes. En tanto los conceptos erróneos y los errores sistemáticos describen rasgos incorrectos de los conocimientos de los estudiantes que son repetibles y explícitos, las preconcepciones y las concepciones alternativas tienen una connotación más neutral, pues enfatizan el cambio que va, desde los errores de los estudiantes hasta las diferentes maneras en que ellos entienden las tareas dadas. El término *concepciones alternativas* es utilizado para describir al conocimiento que difiere de aquél que se propone para ser aprendido. Estos términos enfatizan lo que los estudiantes realmente saben y no lo que no saben, y nos inducen a ver los procesos de aprendizaje desde el punto de vista de los estudiantes.

En este orden de ideas, asumimos como cambio conceptual a la transformación de las concepciones alternativas en concepciones científicas. Coincidimos con Pozo (1996) en que el cambio conceptual podría posibilitarse bajo las consideraciones siguientes:

- El aprendizaje de conceptos científicos no consiste sólo en reemplazar unas ideas cualesquiera por otras científicamente aceptadas, sino que en el aprendizaje existe una cierta conexión genética con la teoría alternativa del individuo y la teoría científica que se le pretende transmitir.
- Para que el individuo pueda comprender la superioridad de la nueva teoría es preciso enfrentarle a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas. Es decir, el individuo ha de darse cuenta de que su teoría previa es errónea en ciertas situaciones, en las que conduce a predicciones que no se cumplen. Al mismo tiempo, hay que hacerle ver también que la nueva teoría hace predicciones mejores.
- Por último, a partir de lo anterior, puede deducirse que la toma de conciencia por parte del sujeto es un paso indispensable para el cambio conceptual. Los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos. Un primer paso para su modificación será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos.

## **Justificación**

Compartimos con el Dr. Dolores (2002) el planteamiento de que el poder analizar el comportamiento de las funciones es uno de los rasgos esenciales que caracteriza al pensamiento variacional. El pensamiento variacional es una forma de pensamiento científico que requiere de una formación rica en imágenes mentales gráficas. No obstante, en el proceso de desarrollo de saberes básicos como el análisis de funciones, surge una diversidad de concepciones alternativas que hace falta remover para progresar en el desarrollo del pensamiento variacional. Los esfuerzos que se realicen por contribuir al desarrollo de esta forma de pensamiento en los estudiantes y profesores redundarán en el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje del análisis de funciones.

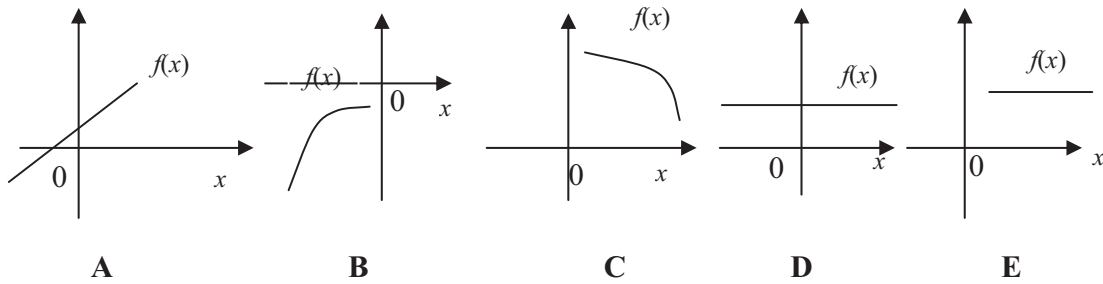
La enseñanza y el aprendizaje de la matemática persiguen como objetivo final lograr la transformación de ideas y formas científicas de pensamiento en los estudiantes. Esos cambios y transformaciones se orientan hacia la formación de una concepción científica del mundo; ésta implica la formación de ideas científicas y por tanto la superación de las concepciones espontáneas o alternativas. Por ello, es necesario estudiar sistemáticamente los cambios que obran desde las concepciones alternativas hacia las concepciones científicas aceptables en el trabajo con las gráficas de las funciones. Si se conocen a profundidad las concepciones alternativas de los estudiantes y profesores cuando analizan el comportamiento de las funciones, se pueden crear mejores condiciones para diseñar y ejecutar acciones tendientes a cambiarlas. Las formas tradicionales de enseñanza no atienden a estas concepciones, por eso muchos estudiantes y profesores encuentran en las clases ordinarias el terreno propicio para arraigarlas en su pensamiento o en el peor de los casos, ignorarlas o evadir su presencia. He ahí la importancia y la necesidad de atenderlas concienzudamente.

## **Metodología**

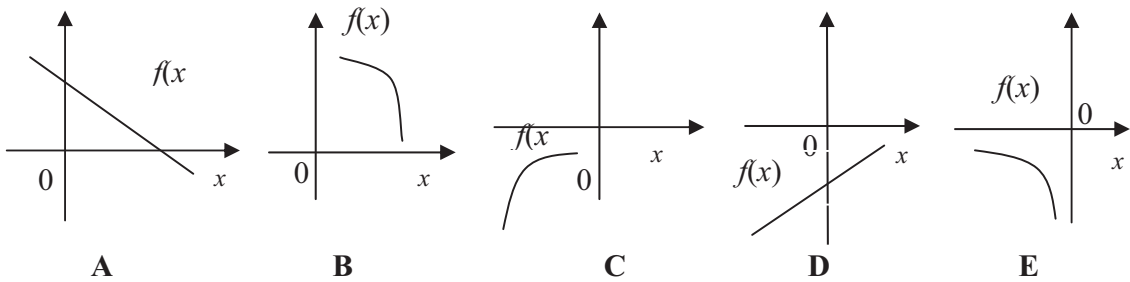
El curso fue planificado atendiendo a dos factores fundamentales: que favoreciera el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y que tal desarrollo fuera evaluado cualitativamente. El contenido matemático fue organizado y diseñado bajo la premisa básica de la actividad es decir, se concretó mediante una serie de ejercicios y problemas diseñados bajo la óptica de los sistemas semióticos de representación y de su movilidad entre ellos. La metodología de trabajo se pensó para estimular el trabajo cooperativo y el trabajo expositivo; se trató de que los profesores estuvieran en constante actividad discutiendo y resolviendo los ejercicios y problemas planteados.

La valoración de las producciones de los profesores se pensó para ser analizada bajo la perspectiva cualitativa, pues se pretendía indagar en los aspectos cualitativos del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. El diseño del cuestionario diagnóstico se realizó con la finalidad de explorar el estado de la habilidad de análisis de funciones elementales en los profesores participantes. Su validación se hizo con algunos profesores de cálculo que no participaron en la experiencia didáctica y se consideraron factores como: que no fuera muy extenso, que las preguntas fuesen claras y unívocas, que permitieran medir el análisis creciente, decreciente, signo, a partir de una gráfica, un enunciado verbal y que consideraran el papel de la derivada en el análisis de funciones

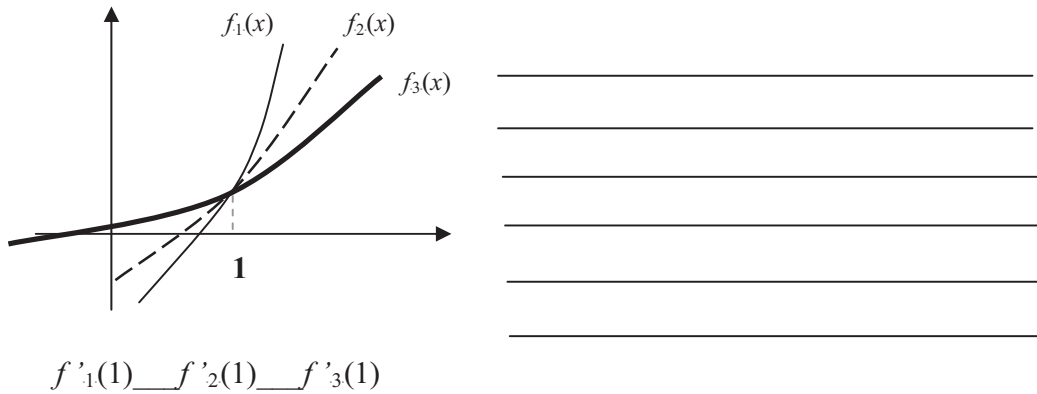
1. ¿Para cuál o cuáles  $f(x)$  se cumple que  $f'(x) > 0$  para toda  $x$ ? Subraye el (los) inciso(s) correspondiente(s)



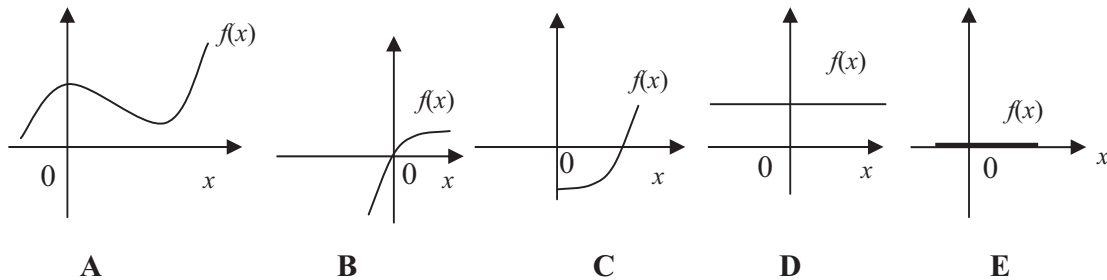
2. ¿Para cuál o cuáles  $f(x)$  se cumple que  $f'(x) < 0$ , para toda  $x$ ? Subraye el (los) inciso(s) correspondiente(s)



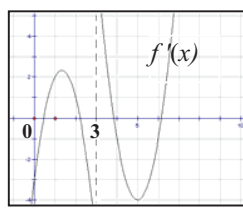
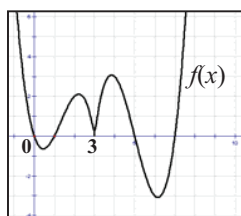
3. A continuación se muestran las gráficas de tres funciones; todas se interceptan en  $x = 1$ . Compare  $f'_1(1), f'_2(1)$  y  $f'_3(1)$ . Explique su respuesta



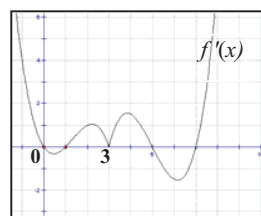
4. ¿Para cuál o cuáles  $f(x)$  se cumple que  $f'(x) = 0$  para algunos valores de  $x$ ? Subraye el (los) inciso(s) correspondiente(s)



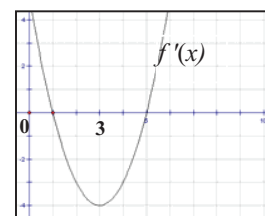
5. De entre las gráficas (a), (b), (c) y (d) ¿cuál considera que corresponde a  $f'(x)$  si la gráfica de  $f(x)$  es la primera de las que se muestran a continuación? Subraye el inciso correspondiente



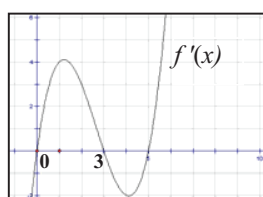
(a)



(b)



(c)



(d)

NINGUNA DE LAS ANTERIORES

(e)

### Actividades

Las actividades desarrolladas en el curso fueron tomadas de (Dolores, 2001) las cuales fueron diseñadas de tal manera que permitieran desarrollar las habilidades siguientes:

- Identificación de intervalos donde la gráfica es creciente o decreciente y los intervalos donde la función es positiva o negativa.
- Interpretación de las condiciones de crecimiento, decrecimiento y estabilización de las funciones, del plano analítico al gráfico y viceversa.
- Transferencia de información a partir de la gráfica de  $f'(x)$  para construir la gráfica de  $f(x)$  y recíprocamente.
- Transferencia de información variacional de las funciones del plano verbal al plano geométrico.

### Referencias Bibliográficas

- Bosch, M. (2000). *Un Punto de Vista Antropológico: La Evolución de los Instrumentos de Representación en la Actividad Matemática*. Ponencia invitada al Seminario de Investigación I, "Representación y comprensión" del IV Simposio SEIEM, Huelva, España.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands, pp. 79-116.
- Cantoral (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 12, tomo 1
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S., Hsu, E (2002). Applying Covariational Reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 33, No. 5, pp. 352–378

- Dolores, C. y Valero, S. (2004) Estabilidad y Cambio de Concepciones Alternativas Acerca del Análisis de Funciones en Situación Escolar; *Revista Thales*, Universidad de Cádiz, España (en prensa)
- Dolores, C. (2003). El análisis de funciones y las concepciones alternativas que de ese proceso se generan. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 16 (1)
- Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2003). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 16 (3), pp. 225 – 250.
- Dolores, C. (2001) El desarrollo del Pensamiento Variacional con Estudiantes Universitarios, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol.14, págs. 337 – 345 (Panamá)
- Dolores, C., Catalán, A. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal: Una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 13, pp.-36-41.
- Duval R. (1999). *Sémiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle / Instituto de Educación y Pedagogía / Grupo de Educación Matemática. Medellín, Colombia, pág. 34
- Even, R. (1998) Factors Involved in Linking Representations of Functions, *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17 Num.1, pp. 105 - 121
- Farfán, R. (1995). *Ingeniería Didáctica*, Serie: Antologías. No.1, Area Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN, pp. 63-79
- Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas, epistemológicos y didácticos; Ed. Fernando Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Ibero América.
- Mevarech Z., Kramarsky B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 32 Núm. 3. pp. 229-263
- Janvier, C. (1998). The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function, *Journal of Mathematical Behavior*, Vol.17
- Pozo, J. I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Ediciones Morata, S. L.;Madrid España, pp. 225 – 253
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function. *Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Harel & Dubinsky, Editores. MAA Notes, Vol. 25, pp. 23 – 58.
- Tall, D., Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. Citado por Dolores, C.,2002. Concepciones alternativas que afloran en los estudiantes cuando analizan el comportamiento de funciones a través de sus gráficas. En prensa
- Yerushalmy, M., Shternberg, B. (2001) Charting a Visual Course to the Concept of Function, *The Roles of Representation in School Mathematics*, pp. 251 – 268