GENERACIÓN EN MATHEMATICA DE ALGUNAS FAMILIAS DE CONJUNTOS CON PROPIEDADES DADAS

Alvaro Salas
Departamento de Matemáticas
Universidad de Caldas.

Gonzalo Escobar
Universidad de la Salle.
Universidad Autónoma.

Resumen.

Se muestra la forma de generar familias de conjuntos con propiedades dadas. Se anexa un programa escrito en MATHEMATICA, el cual proporciona la familia que posee una propiedad específica dada y que es generada por una familia de subconjuntos de un conjunto finito. Este programa es de utilidad para calcular algunos cardinales de las diferentes clases de familias (álgebras, topologías, anillos, etc.). Al final se muestra en una tabla la relación entre las diversas clases.

1 Preliminares.

Se llama familia de conjuntos a toda colección de conjuntos de la forma $\mathfrak{F} = \{A_i | i \in I\}$, en donde I es un conjunto (el conjunto de índices). El conjunto I puede ser finito o infinito. Si $I = \emptyset$, entonces $\mathfrak{F}$ es la familia vacía : $\mathfrak{F} = \emptyset$. En una familia $\mathfrak{F} = \{A_i | i \in I\}$ cada uno de los A_i se denomina *miembro* de la misma. Para la familia $\mathfrak{F}$ se define su unión por

$$\bigcup \mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}$$

y su intersección por

$$\bigcap \mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x | x \in A_i \forall i \in I\}$$

Dado un conjunto X, la colección $P(X)$ de todos sus subconjuntos es una familia de conjuntos.

2 Algunas familias de conjuntos.

Una familia no vacía de subconjuntos de un conjunto dado se puede definir por medio de cierta propiedad. Aquí estudiaremos las propiedades Fu, Fi, Fui, $Ftop$, Fc, $Falg$, Fd, Fcd y Fid, las cuales caracterizan las clases de familias de conjuntos. Estas propiedades se definen a continuación. Sea $\mathfrak{F}$ una familia de conjuntos de un conjunto X.

1. Fu : es cerrada para la unión, si ella contiene la unión de dos cualesquiera de sus miembros, es decir, $A \cup B$ para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{F}$ es cerrada para la unión (brevemente, cerrada para $\cup$), entonces $\langle \mathfrak{F}, \cup \rangle$ es un semigrupo (ya que la operación $\cup$ es asociativa). En particular, si $\mathfrak{F}$ es cerrada para $\cup$, entonces ella es cerrada para uniones finitas de sus miembros.

2. Fi: es cerrada para la intersección, si ella contiene la intersección de dos cualesquiera de sus miembros, es decir, $A \cap B \in \mathfrak{F}$ para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{F}$ es cerrada para la intersección (brevemente, cerrada para $\cap$), entonces $\langle \mathfrak{F}, \cap \rangle$ es un semigrupo (ya que la operación $\cap$ es asociativa). En particular, si $\mathfrak{F}$ es cerrada para $\cap$, entonces ella es cerrada para intersecciones finitas de sus miembros.

3. Fui: es cerrada para unión y la intersección si ella es cerrada para $\cup$ y para $\cap$. En este caso, $\langle \mathfrak{F}, \cup, \cap \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado (poset) por la relación de inclusión $\subseteq$, tal que $\sup(A, B) = A \cup B$ y $\inf(A, B) = A \cap B$, es decir, es un retículo. Además, este retículo es distributivo, ya que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\ \forall A, B, C \in \mathfrak{F}$

4. $Ftop$: $\mathfrak{F}$ es una topología en X si $\mathfrak{F}$ es cerrada para uniones arbitrarias y cerrada para intersecciones finitas de sus miembros. En particular, $\emptyset \in \mathfrak{F}$ y $X \in \mathfrak{F}$. En efecto,
$$\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} A_i \quad \text{y} \quad X = \bigcap_{i \in \emptyset} A_i$$

5. Fc: es cerrada para el complemento, si junto con cualquier miembro, ella contiene su complemento, es decir, $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow A^c \stackrel{\text{def}}{=} X - A \in \mathfrak{F}$.

6. $Falg$: es una álgebra de subconjuntos de X si ella es cerrada para el complemento y la unión. Una álgebra de subconjuntos de X es cerrada

para la intersección, ya que si $A, B \in \mathfrak{F}$, entonces $A \cap B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathfrak{F}$. Además, $X \in \mathfrak{F}$, ya que al ser $\mathfrak{F}$ no vacía, existe algún $A \in \mathfrak{F}$, luego $A^c \in \mathfrak{F}$, de modo que $X = A \cup A^c \in \mathfrak{F}$.

7. Fd: es cerrada para la diferencia simétrica, si ella contiene la diferencia simétrica de dos cualesquiera de sus miembros, es decir,

$$A \Delta B \overset{\text{def}}{=} (A \cup B) - (A \cap B) \in \mathfrak{F} \;\; \forall A, B \in \mathfrak{F}.$$

   En particular, $\emptyset \in \mathfrak{F}$, ya que al ser $\mathfrak{F}$ no vacía, existe algún $A \in \mathfrak{F}$, luego $\emptyset = A \Delta A \in \mathfrak{F}$.
   Si es $\mathfrak{F}$ cerrada para la diferencia simétrica (brevemente, cerrada para Δ), entonces $\langle \mathfrak{F}, \Delta, \emptyset \rangle$ es un grupo abeliano, ya que:

   (a) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ y $A \Delta B = B \Delta A$ (la operación Δ es asociativa y conmutativa).
   (b) $A \Delta \emptyset = A$, es decir, $\emptyset$ es el elemento neutro para la operación Δ.
   (c) Para cada $A, B \in \mathfrak{F}$, la ecuación conjuntista $A \Delta X = B$ admite solución única dada por $X = A \Delta B$. Por lo tanto, el inverso aditivo de A es A (la única solución de la ecuación $A \Delta X = \emptyset$ es $X = A$, de modo que cada elemento del grupo es inverso de sí mismo).

8. Fcd: $\mathfrak{F}$ goza de esta propiedad, si ella es cerrada para el complemento y la diferencia simétrica.

9. Fid: $\mathfrak{F}$ goza de esta propiedad, si ella es cerrada para la intersección y la diferencia simétrica. En este caso, $\langle \mathfrak{F}, \cap \rangle$ es un anillo conmutatitvo y asociativo sin unidad (a menos que exista en $\mathfrak{F}$ un elemento que contenga a todos los elementos de $\mathfrak{F}$), en donde la "suma" es Δ y el "producto" es $\cap$. El elemento neutro para la operación Δ es $\emptyset$.

Identificaremos una propiedad específica con la clase de familias que dicha propiedad caracteriza. Así, por ejemplo, $Falg(X)$ denotará la colección de todas las álgebras de subconjuntos de un conjunto dado. En este caso, la propiedad común a todas las familias de esta clase, es "ser cerrada para la unión y el complemento". Si del contexto es claro qué es X, entonces simplemente denotamos esta clase por $Falg$.

3 Generación de familias.

En lo sucesivo, X denotará un conjunto finito.

Definición 1. *Dada una familia $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de X y una propiedad Π en el conjunto*

$$\{Fu, Fi, Fui, Ftop, Fc, Falg, Fd, Fcd, Fid\},$$

la familia más pequeña de subconjuntos de X que contiene a $\mathfrak{F}$ y que satisface la propiedad Π, se llama Π-familia generada por $\mathfrak{F}$. Esta familia se denota por $\langle\mathfrak{F}\rangle_\Pi$, o simplemente $\langle\mathfrak{F}\rangle$ si del contexto es claro qué es Π.

Así, por ejemplo, $\langle\mathfrak{F}\rangle_{Ftop}$ es la topología en X generada por $\mathfrak{F}$ y es la topología más pequeña que contiene a $\mathfrak{F}$. Se tiene el siguiente

Teorema 1. *Sea $\mathfrak{F}$ una familia de subconjuntos de X y*

$$\Pi \in \{Fu, Fi, Fui, Fc, Ftop, Falg, Fd, Fcd, Fid\},$$

entonces

$$\langle\mathfrak{F}\rangle_\Pi = \bigcap_{\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{R} \text{ } y \text{ } \mathfrak{R} \text{ } satisface \text{ } \Pi} \mathfrak{R} \tag{1}$$

es decir, $\langle\mathfrak{F}\rangle_\Pi$ es la intersección de todas las familias $\mathfrak{R}$ de subconjuntos de X que contienen a $\mathfrak{F}$ y que satisfacen la propiedad Π.

Desde el punto de vista algorítmico, la ecuación (1) no es la más apropiada para hallar $\langle\mathfrak{F}\rangle_\Pi$, ya que deberíamos calcular todas las familias de conjuntos que satisfacen la propiedad Π, lo cual no es claro.

Sea $\mathfrak{R}$ una familia de subconjuntos de X. Se definen las siguientes familias:

$$\mathfrak{R}_\cup = \{A \cup B | A, B \in \mathfrak{R}\}, \quad \mathfrak{R}_\cap = \{A \cap B | A, B \in \mathfrak{R}\},$$

$$\mathfrak{R}_c = \{A^c | A \in \mathfrak{R}\}, \quad \mathfrak{R}_\Delta = \{A \Delta B | A, B \in \mathfrak{R}\}.$$

Ejemplo 1. *(Generación teórica de $\langle\mathfrak{F}\rangle_{Falg}$)*

Sea $\mathfrak{F}$ una familia de subconjuntos de X.Si la propiedad es $\Pi = Falg$, entonces Π involucra las familias $\mathfrak{F}_{cup}$ y $\mathfrak{F}_c$, de modo que una familia no vacía $\mathfrak{R}$ de subconjuntos de X es una álgebra de conjuntos que contiene a $\mathfrak{F}$ si, y sólo si, $\mathfrak{F}_\cup \cup \mathfrak{F}_c \subseteq \mathfrak{R}$.

Para generar $\langle\mathfrak{F}\rangle_{Falg}$ se define un operador $\Psi : P(P(X)) \to P(P(X))$ de la siguiente manera: $\Psi(\emptyset) = \emptyset$ y si $\mathfrak{R}$ es un elemento de $P(P(X)) - \{\emptyset\}$, entonces

$$\Psi(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}_c \cup \mathfrak{R}_\cup.$$

Puede suceder que algunos elementos en $\Psi(\mathfrak{R})$ se repitan, en cuyo caso eliminamos dichas repeticiones, de modo que en $\Psi(\mathfrak{R})$ sus miembros sean mutuamente distintos.

Obsérvese que $\mathfrak{R} \subseteq \Psi(\mathfrak{R})$ y que $\mathfrak{R} = \Psi(\mathfrak{R})$ si, y sólo si, $\mathfrak{R}$ es una álgebra de subconjuntos de X, es decir, si, y sólo si, la familia $\mathfrak{R}$ es un punto fijo del operador Ψ. Con la ayuda de este operador, procedemos a definir una sucesión de familias de subconjuntos de X que contienen a $\mathfrak{F}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{F}_1 = \Psi(\mathfrak{F})\\
&\mathfrak{F}_2 = \Psi(\mathfrak{F}_1) = \Psi(\Psi(\mathfrak{F}))\\
&\mathfrak{F}_3 = \Psi(\mathfrak{F}_2) = \Psi(\Psi(\Psi(\mathfrak{F}))\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathfrak{F}_n = \Psi(\mathfrak{F}_{n-1}) = \underbrace{\Psi(\Psi(\cdots\Psi}_{n \text{ veces}}(\mathfrak{F}))\cdots)) \quad (n = 2, 3, \cdots).
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \subseteq \cdots \mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq P(X) \tag{2}$$

para cualquier entero positivo n (esto en virtud de que, como se anotó anteriormente, $\mathfrak{R} \subseteq \Psi(\mathfrak{R})\ \ \forall \mathfrak{R} \in P(P(X))$. A partir de (2) podemos pensar que el número de miembros de $\mathfrak{F}_n$ puede crecer arbitrariamente junto con n. Sin embargo, esto no es cierto, ya que $\mathfrak{F}_n \subseteq P(X)$ y el número de miembros de $P(X)$ es finito, ya que estamos suponiendo que X es un conjunto finito (más precisamente, si X posee s elementos, entonces en $P(X)$ hay 2^s elementos, así que en $\mathfrak{F}_n$ no puede haber más de 2^s miembros, cualquiera que sea n). De otro lado, existe un entero positivo m tal que

$$\mathfrak{F}_m = \mathfrak{F}_{m+1} = \mathfrak{F}_{m+2} = \cdots = \mathfrak{F}_{m+k} = \cdots \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

En efecto, si esto no es cierto, entonces para todo entero positivo m sería posible encontrar otro entero positivo k tal que $\mathfrak{F}_m \subsetneqq \mathfrak{F}_{m+k}$. De este modo, para $m = 1$ existe $k(1)$ tal que $\mathfrak{F}_1 \subsetneqq \mathfrak{F}_{1+k(1)}$, lo cual nos permite escoger un $X_1 \in \mathfrak{F}_{1+k(1)} - \mathfrak{F}_1$. Para $m = k(1) + 1$ existe $K(2)$ tal que $\mathfrak{F}_{k(1)+1} \subsetneqq \mathfrak{F}_{k(2)}$, luego existe $X_2 \in \mathfrak{F}_{k(2)} - \mathfrak{F}_{1+k(1)}$. Es claro que $X_2 = X_1$, ya que $X_2 \notin \mathfrak{F}_{1+k(1)}$ y $X_1 \notin \mathfrak{F}_{1+k(1)}$.

Continuando de esta manera, sería posible construir una sucesión de $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $P(X)$ tal que $X_i = X_j$ para $i = j$, lo cual implicaría que $P(X)$ es infinito, lo cual es absurdo, por cuanto, ya que estamos suponiendo que X es un conjunto finito. Por consiguiente, de (3)) se sigue que existe un m entero positivo tal que $\mathfrak{F}_m = \Psi(\mathfrak{F}_m)$, es decir, que $\mathfrak{F}_m$ es una álgebra de conjuntos que contiene a $\mathfrak{F}$.

Veamos enseguida que $\mathfrak{F}_m$ es el álgebra más pequeña de subconjuntos de X que contiene a $\mathfrak{F}$ en el sentido de que si $\tilde{\mathfrak{F}}$ es otra álgebra de subconjuntos de X que contiene a $\mathfrak{F}$, entonces $\mathfrak{F}_m \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$. En efecto, si $A \in \mathfrak{F}_m$ entonces A se puede representar como una unión finita de conjuntos de la forma

$$B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_s \cap C_1^c \cap C_2^c \cap \cdots \cap C_t^c \tag{4}$$

en donde $B_i, C_j \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2, \cdots, t)$. Puesto que $\mathfrak{F} \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$ y $\tilde{\mathfrak{F}}$ es una álgebra, entonces $B_i, C_j \in \tilde{\mathfrak{F}}$ y, por consiguiente, $A \in \tilde{\mathfrak{F}}$ (ya que $\tilde{\mathfrak{F}}$ es cerrada con respecto a las uniones finitas de sus miembros). Esto prueba la inclusión $\mathfrak{F}_m \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}$, lo cual equivale a afirmar que $\mathfrak{F}_m = \langle \mathfrak{F} \rangle_{Falg}$.

En general, la misma idea de usar un operador es aplicable para generar $\langle \mathfrak{F} \rangle_{\Pi}$ para una propiedad dada. En términos computacionales, *Mathematica* dispone del comando "FixedPoint" para hallar el punto fijo del operador. El análisis matemático realizado nos permite programar en *Mathematica* un algoritmo para hallar $\langle \mathfrak{F} \rangle_{\Pi}$.

4 Programa generador de familias en Mathematica.

El problema computacional a resolver consiste en escribir un programa en el lenguaje de MATHEMATICA, el cual, dados un conjunto finito no vacío, una familia no vacía $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de X y una propiedad Π en el conjunto

$$\{Fu, Fi, Fui, Fc, Ftop, Falg, Fd, Fcd, Fid\},$$

nos calcule la familia $\langle \mathfrak{F} \rangle_{\Pi}$. De esta manera, el programa debe tener tres parámetros: $X, \mathfrak{F}$ y Π. Su código se presenta a continuación:

```
In[1]:= FamGen[Fami_,XX_,Pro_]:=Module[{kk,DifSim,Soedi},
{DifSim[AA_,BB_]:=
Union[Complement[AA,BB],Complement[BB,AA]],
Fc[FF_]:=Union[Join[FF,Map[Complement[XX,#]&,FF]]],
Fu[FF_]:=Union[Join[FF,Apply[Union,Table[
Union[Array[Union[FF[[iii]],FF[[iii+#]]]&,
Length[FF]-iii]],{iii, Length[FF]-1}]]]]],
Fi[FF_]:=Union[
Join[Apply[Union,Table[Union[
Array[Intersection[FF[[iii]],FF[[iii+#]]]&,
Length[FF]-iii]], {iii,Length[FF]-1}]],FF]],
Fd[FF_]:=Append[Union[Join[FF,Apply[Union,
Table[Union[Array[DifSim[FF[[iii]],FF[[iii+#]]]&,
Length[FF]-iii]], {iii,Length[FF]-1}]]]]],{}],
Fui[FF_]:=Union[Fu[FF],Fi[FF]],
Ftop[FF_]:=Union[{{},XX},Fui[FF]],
Falg[FF_]:=Union[Fu[FF],Fc[FF]],
Fcd[FF_]:=Union[Fc[FF],Fd[FF]],
Fid[FF_]:=Union[Fi[FF],Fd[FF]],
Soedi[FF_]:=Union[Apply[Union,Map[#[FF] &,Flatten[{Pro}]]]]};
FixedPoint[Soedi[#]&,Fami]]
```

Ejemplo 2.
Consideremos la familia $F = \{\{1,2,3\},\{3,4\},\{5\}\}$ de subconjuntos del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$. Hallemos la topología generada por esta familia.

In[2]:=FamGen[{{1,2,3},{3,4},{5}},{1,2,3,4,5},Ftop]

Out[2]={{}, {3}, {5}, {3, 4}, {3, 5}, {1, 2, 3}, {3, 4, 5},

{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 3, 4, 5}}

El álgebra generada por es

In[3]:=FamGen[{{1,2},{3,4},{5}},{1,2,3,4,5},Falg]

Out[3]={{}, {3}, {4}, {5}, {1, 2}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5},

{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {3, 4, 5},

{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 4, 5},

{1, 2, 3, 4, 5}}.

Ejemplo 3.
Consideremos la familia $F = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ de subconjuntos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$. Obtengamos las familias generadas por F, las cuales tienen las propiedades Fu, Fi, Fui, $Ftop$, Fc, $Falg$, Fd, Fcd y Fid, respectivamente:

In[4]:= Familia={{1,2},{2,3}};Conjunto={1,2,3,4,5,6};

Map[SequenceForm[#,"− >",FamGen[Familia,Conjunto,#]]&,

{Fu,Fi,Fui,Ftop,Fc,Falg,Fd,Fcd,Fid}]

Out[4]= {

Fu− >{{1, 2}, {2, 3}, {1, 2, 3}},

Fi− >{{2}, {1, 2}, {2, 3}},

Fui− >{{2}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 2, 3}},

Ftop− >{{}, {2}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 2, 3},

{1, 2, 3, 4, 5, 6}},

Fc− >{{1, 2}, {2, 3}, {1, 4, 5, 6}, {3, 4, 5, 6}},

Falg− >{{}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {1, 4, 5, 6}, {2, 4, 5, 6},

{3, 4, 5, 6}, {1, 2, 4, 5, 6}, {1, 3, 4, 5, 6},

{2, 3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}},

Fd− >{{}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}},

Fcd− >{{}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 4, 5, 6},

{2, 4, 5, 6}, {3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}},

Fid− >{{}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3},

{1, 2, 3}}}

En este ejemplo, todas las familias obtenidas son mutuamente distintas. En otras situaciones, algunas familias pueden coincidir.

Ejemplo 4.
El programa "FamGen" nos permite obtener el número de familias que tienen las propiedades mencionadas en el Ejemplo 3.4 para los conjuntos $\{1, 2\}$ y $\{1, 2, 3\}$. Hallemos, a manera de ejemplo, cuántas topologías hay en $\{1, 2, 3\}$:

```
In[5]:= ¡¡DiscreteMath‘Combinatorica‘

In[6]:= Length[Union[

Map[FamGen[#,{1,2,3},Ftop]&,Subsets[Subsets[{1,2,3}]]]]]

Out[7]= 29
```

De acuerdo a este resultado, tenemos 29 topologías en el conjunto $\{1, 2, 3\}$. Estas topologías se pueden obtener por medio de la instrucción

```
Union[Map[FamGen[#,{1,2,3},Ftop]&, Subsets[Subsets[{1,2,3}]]]].
```

En la Tabla 1 se muestran los cardinales de las clases de familias de subconjuntos
correspondientes a conjuntos de 1, 2, 3 y 4 elementos, respectivamente :

X	Fu	$F1$	Fui	$Ftop$	Fc	$Falg$	Fd	Fc	Fid
$\{1\}$	3	3	3	1	1	1	2	1	1
$\{1,2\}$	13	13	12	4	3	2	5	2	5
$\{1,2,3\}$	121	121	73	29	15	5	16	5	15
$\{1,2,3,4\}$	4959	4959	732	355	255	15	67	16	52

Tabla 1. Cardinales de algunas familias.

5 Relación entre las clases de familias.

Sea un conjunto finito. Consideremos el conjunto

$$\Sigma = \{U, Fu, Fi, Fui, Ftop, Fc, Falg, Fd, Fcd, Fid\}.$$

Aquí, $U = P(P(X))$, que representa la colección de todas las familias de subconjuntos de X. En Σ están todas las clases de familias definidas en la Sección 3. Por ejemplo, $Ftop$ es la clase (colección) de todas las topologías en X. En Σ consideramos la operación $\cap$ (intersección de clases). Resulta que si $\Gamma, \Theta \in \Sigma$, entonces $\Gamma \cap \Theta \in \Sigma$ como se muestra en la Tabla 2. Apartir de esta tabla se concluye que $(\Sigma, \cap, U)$ es un monoide conmutativo con unidad U.

En la verificación de la Tabla 2. se debe tener en cuenta que

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \tag{5}$$

y que

$$A \cap B = (A \Delta B) \Delta (A \cup B) \tag{6}$$

Así, por ejemplo, si $\mathfrak{F} \in Fu \cap Fd$, y si $A, B \in \mathfrak{F}$, entonces $A \Delta B \in \mathfrak{F}$ y $A \cup B$, luego de (6) se sigue que $A \cap B \in \mathfrak{F}$, lo cual prueba que $\mathfrak{F}$ es cerrada para $\cap$ y Δ, es decir, $\mathfrak{F} \in Fid$. Por consiguiente, $Fu \cap Fd \subseteq Fid$. La inclusión $Fid \subseteq Fu \cap Fd$ se puede probar a partir de (5). De esta manera, $Fu \cap Fd = Fid$.

$\cap$	U	Fu	Fi	Fui	$Ftop$	Fc	$Falg$	Fd	Fcd	Fid
U	U	Fu	Fi	Fui	$Ftop$	Fc	$Falg$	Fd	Fcd	Fid
Fu	Fu	Fu	Fui	Fui	$Ftop$	$Falg$	$Falg$	Fid	$Falg$	Fid
Fi	Fi	Fui	Fi	Fui	$Ftop$	$Falg$	$Falg$	Fid	$Falg$	Fid
Fui	Fui	Fui	Fui	Fui	$Ftop$	$Falg$	$Falg$	Fid	$Falg$	Fid
$Ftop$	$Ftop$	$Ftop$	$Ftop$	$Ftop$	$Ftop$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$
Fc	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	Fc	$Falg$	Fcd	Fcd	$Falg$
$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$
Fd	Fd	Fid	Fid	Fid	$Falg$	Fcd	$Falg$	Fd	Fcd	Fid
Fcd	Fcd	$Falg$	$Falg$	$Falg$	$Falg$	Fcd	$Falg$	Fcd	Fcd	$Falg$
Fid	Fid	Fid	Fid	Fid	$Falg$	$Falg$	$Falg$	Fid	$Falg$	Fid

Tabla 2. El conjunto $\langle \Sigma, \cap, U \rangle$ como monoide conmutativo

6 Conclusiones.

El estudio en particular de algunas de las clases mencionadas de familias puede resultar de utilidad a la hora de tratar con estructuras algebraicas y topológicas a nivel finito. El cardinal de cada una de las familias estudiadas se logró para conjuntos de hasta cuatro elementos. Existe una fórmula recursiva para el número de topologías en un conjunto finito, aunque es bastante complicada. En cuanto al número de álgebras, se puede decir que su número viene dado por los números de Bell, ya que se es posible puede demostrar la existencia de una correspondencia biyectiva entre las álgebras y las particiones de un conjunto finito dado. Sin embargo, elgunas de estas álgebras son isomorfas en virtud del teorema de Stone.

Bibliografía

[1] Aigner Martin., Combinatorial Theory. Springer - Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1979.

[2] Andrews George E., The Theory of Partitions. Addison - Wesley Publishing Company, 1976.

[3] Cohn, P. M., Universal Algebra. Harper & Row, Publishers. New York, Evanston and London, 1965.

[4] Wolfram, Stephen. Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer, Second Edition , Addison - Wesley Publishing Company, 1993