

## EL APRENDIZAJE DE ESPACIOS VECTORIALES EN AMBIENTES COMPUTACIONALES

María Guadalupe Vera Soria, Eduardo Miranda Montoya  
Universidad de Guadalajara.  
ITESO.  
guadalupe.vera@red.cucei.udg.mx, emiranda@iteso.mx

México  
México

**Resumen.** Se presenta el avance de una tesis doctoral en la que se investiga cómo son los procesos en la comprensión de los conceptos de la teoría de espacios vectoriales en estudiantes universitarios del área de ciencias e ingenierías. Se trata de un estudio cualitativo e interpretativo que busca analizar y describir la cadena de inferencias que los participantes realizan, a partir de los lenguajes geométrico, simbólico y estructural. El marco teórico para fundamentar la investigación es el modelo de la comprensión en matemáticas de Anna Sierpiska (Sierpiska, 1994) y el modelo de la distinción epistemológica teórico-práctico de Sierpiska y colaboradores (Sierpiska, Nnadozie y Oktaç, 2002).

**Palabras clave:** Álgebra Lineal, Pensamiento Teórico, Interpretativo.

**Abstract.** This paper presents a doctorate research project advance, which aims to investigate the processes of understanding of vector spaces theory concepts in undergraduate science and engineering students. This is a qualitative and interpretive study that seeks to analyze and describe the chain of inferences that participants made, from the geometric, symbolic and structural languages. The theoretical framework for the research is Sierpiska's model of understanding in mathematics (Sierpiska, 1994) and Sierpiska and colleagues epistemological model of the theoretical and practical distinction (Sierpiska, Nnadozie and Oktaç, 2002).

**Key words:** linear algebra, theoretical thinking, interpretative.

### Introducción

La comprensión de las nociones como las que se abordan en los cursos de álgebra lineal, a diferencia de otras ramas como cálculo o estadística, no puede ser alcanzada a partir de problemas de aplicación o mediante el manejo operacional basado en ejercicios modelo (Harel, 2002; Sierpiska, Nnadozie y Oktaç, 2002; Oktaç y Trigueros, 2010). El motivo por el que se estudia sobre la comprensión de los conceptos de la teoría de espacios vectoriales responde a la necesidad de realizar investigaciones en relación con estos conceptos, de los cuales se han documentado varias dificultades atribuidas tanto a factores debido a la naturaleza del álgebra lineal y al tipo de pensamiento y lenguajes requeridos para su comprensión (Harel, 1997; Dorier y Sierpiska, 2001; Soto, 2003; Maracci, 2008).

Los conceptos del álgebra lineal resultan de la reflexión sobre las propiedades comunes de objetos matemáticos y los procedimientos algorítmicos, son sólo un elemento de análisis en la argumentación de las ideas. Por ejemplo, para entender el concepto de base de un espacio vectorial es necesario identificar una serie de relaciones entre vectores (combinación lineal) y entre otros conceptos (independencia lineal y conjunto generador), y en ese proceso varias experiencias marcan pasos significativos hacia la comprensión del sistema que los interrelaciona.

La comprensión de los conceptos matemáticos del álgebra lineal, supone para ellos que deban abstraerse en proceso que implica la realización un gran número inferencias sobre otros objetos de los cuales depende, y como señala Pozo (1994) “mientras los referentes de un concepto pueden determinarse por vía asociativa, por procesos de abstracción que conducen a un [...] concepto potencial, la adquisición de su significado o sentido sólo es posible por procesos de reestructuración o reorganización del sistema de conceptos” (p. 204).

Si bien los estudios asociados a la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal en la universidad se han venido documentando desde hace dos décadas, generalmente a través de investigaciones que relacionan el uso de determinadas estrategias de intervención con los resultados de aprendizaje de los conceptos (Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M., 1999; Harel, 1999 y Stewart y Thomas, 2010), o que analizan las fuentes de dificultad en el uso de los lenguajes y registros de representación (Hillel, 2002; Alves Dias y Pavlopoulou citadas por Artigue, Chartier y Dorier, 2002; Sierpinska, 2002 y Dogan-Dunlap, 2010), se detecta en gran medida que la comprensión de los conceptos siendo tema de preocupación educativa: “el aprendizaje del álgebra lineal requiere de un gran esfuerzo” (Oktaç y Trigueros, 2010, p. 383) y es necesario “realizar investigaciones de fondo en relación con los conceptos [...], puesto que, [...] varias dificultades de los estudiantes están relacionadas con la comprensión de estos conceptos” (Kú, Trigueros, y Oktaç, 2008, p. 87).

No obstante, estos trabajos aportan indicios sobre los actos de comprensión que forman parte del fenómeno integral de los procesos en la comprensión de los conceptos, es a partir de las características epistemológicas otorgadas a los conceptos del álgebra lineal que se elige llevar a cabo un estudio cualitativo desde la perspectiva teórica de Anna Sierpinska (Sierpinska, 1994 y Sierpinska et al., 2002), quien considera que la comprensión de los conceptos se deriva de preconcepciones que pueden actuar como obstáculos a ser superados al analizar dichas creencias desde un punto de vista alternativo.

Dicho análisis requiere que el estudiante identifique y discrimine los objetos asociados a los conceptos, generalice el sistema conceptual y que sintetice la relación entre las propiedades los conceptos en el sistema para organizarlos en un todo consistente.

La pregunta que guía la investigación es ¿cómo son los procesos en la comprensión del concepto de base de un espacio vectorial en estudiantes universitarios, a partir de los lenguajes de representación geométrico, simbólico y estructural?, y para responderla se pretende examinar la cadena de inferencias a propósito de los conceptos que estudiantes universitarios manifiestan mientras realizan actividades de aprendizaje a partir de los lenguajes geométrico, simbólico y

estructural, y con el análisis de la evidencia empírica, se pretende explicar las transformaciones en el transcurso progresivo a la comprensión de las relaciones entre los conceptos que ellos efectúan.

La principal contribución de la investigación en curso reside específicamente en esa forma de abordar la comprensión de los conceptos desde la dimensión sobre las componentes en la comprensión y la dimensión sobre las categorías teórico-práctico en la comprensión, por lo que también se puede señalar que en esta investigación se indaga sobre los procesos en la comprensión de los conceptos del álgebra lineal que los alumnos desarrollan con base en las representaciones producidas en ambientes computacionales o mejor dicho, las condiciones en la identificación, discriminación, generalización y síntesis que a propósito de los conceptos y con base en las representaciones en ambientes computacionales se haga.

### Marco Teórico

Sierpinska (1994) postula que los procesos de comprensión en matemáticas, pueden considerarse como un “entramado de actos de comprensión ligados por razonamientos” (p. 72). De esta forma, al hablar de un acto de comprensión será preciso determinar a qué nos referimos para evitar ambigüedad y en el caso de los conceptos matemáticos, existen dos diferentes tipos de conceptos. Primero, si el concepto es considerado como un cierto objeto ya hecho, definido y descrito en cierta manera y que puede ser interpretado de distintas formas, entonces un acto de comprensión consistiría en analizar su definición y descripción para reconocer o encontrar qué hay detrás de dicho concepto. Pero, por otro lado, comprender un “concepto X” (p. 4) puede implicar conocer en base a qué, X será entendido. En este caso el concepto podrá formarse en el acto o el proceso de comprender una situación y esta segunda forma de comprensión consecuentemente, es la referida para los propósitos de este trabajo.

Para precisar lo que un acto de comprensión implica, la autora refiere la definición propuesta por Ajdukiewicz (citado por Sierpinska, 1994), para quien la comprensión es un acto mental por el que un *objeto de comprensión* se relaciona con otro objeto que funge como *base de la comprensión* del primero. Así por ejemplo, en un caso ordinario “se puede decir que una persona ha comprendido una expresión cuando al escucharla dirige su pensamiento a un objeto distinto del mencionado originalmente” (Sierpinska, 1994, p. 28). También añade, que más allá de abordar la comprensión de expresiones con base en una determinada representación mental, generalmente los objetos de comprensión en matemáticas no pueden ser comunicados de manera ostensiva y por lo tanto, su comprensión en principio podría no ser clara: “los objetos matemáticos...introducidos en un sistema de necesidades y consecuencias lógicas por sus relaciones con otros objetos matemáticos, podrían tener propiedades que resultan difíciles de descubrir o de probar o desacreditar”

(Sierpinska, 1994, p. 30).

Y continuando con su discusión, Sierpinska (1994) destaca el papel de cada una de las componentes que conforman un acto de comprensión:

...el 'sujeto de comprensión' (P) – la persona que comprende,[...] lo que P intenta comprender –'el objeto de comprensión' (X)[...] y a lo que el pensamiento de P se dirige (o se intenta dirigir) en el acto de comprensión: 'la base de la comprensión' (Y). Y [además], la operación mental que conecta el objeto de comprensión con su base (Sierpinska, 1994, p. 29).

En un acto de comprensión, los objetos matemáticos encuentran sentido en varias otras cosas, a éstas se les considera como *base de la comprensión* del objeto y podrían ser una explicación, o una representación, una habilidad procedimental, una opinión, una justificación, etc. “En un acto de comprensión basado en la representación de un objeto, el sujeto no toma ninguna posición hacia el objeto, es decir, no lo juzga o lo evalúa, [sino que] el objeto de comprensión se corresponde con una imagen mental o descripción” (Sierpinska, 1994, p.49), por este motivo es muy importante tomar en cuenta los avances en las investigaciones sobre el uso de las representaciones en la comprensión de los conceptos (Hillel, 2002; Pavlopoulou y Alves Dias citadas por Artigue et al., 2002), al igual que los aportes sobre los mecanismos y construcciones mentales en el aprendizaje conceptual en álgebra lineal (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Parraguez, 2009; Kú, Oktaç y Trigueros, 2009; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; Oktaç y Trigueros, 2010).

Además en cuanto a las operaciones mentales, se puede decir que para que un concepto matemático sea entendido, éste supone ser identificado, discriminado, generalizado y sintetizado. Además, Sierpinska (1994) aclara que la abstracción es una operación involucrada en todas y cada una de las cuatro operaciones antes mencionadas, debido a que por medio de ella se destacan las características de los objetos matemáticos.

Identificar un objeto de comprensión implica un sentimiento de descubrimiento o reconocimiento, “involucra primero que algo es revelado, es decir, que se ha aislado y escogido del 'fondo del campo de la conciencia' donde estaba [...] escondido y segundo, que se ha reconocido como algo que se intenta entender” (Sierpinska, 1994, p. 56). Habiendo sido aislado y reconocido el objeto de conocimiento, podría o no ser nombrado de alguna manera.

Al ser identificado, ese objeto matemático se clasifica y se posiciona junto a otros objetos aun y cuando no se sabe nada de él excepto que se intenta estudiar. Esta clasificación no significa que sea haya realizado una categorización, es decir, el objeto se incluye como un elemento más en una

clase de objetos y no como un caso particular de esa clase.

Sierpiska (1994), afirma que un proceso de comprensión está determinado por la relación cercana de los objetos en los actos por los cuales se compone, como en los conceptos de la teoría de espacios vectoriales, y sigue:

En un proceso de comprensión, los actos de comprensión siempre están ligados por un razonamiento de forma tal que los actos de comprensión y los razonamientos construyen “una densa red” (Sierpiska, 1994, p. 73), y en esta red puede haber diferentes bases de la comprensión. “Uno puede incluso decir que el proceso de comprender algo consiste en una serie de transformaciones de algunas bases iniciales de comprensión” (p.73) y es por esto que se ha afirmado que en esta investigación se indaga sobre la comprensión de los alumnos que se desarrolla con base en las representaciones.

Los razonamientos mencionados en la definición de procesos de comprensión “es toda inferencia o deducción así como ‘los procesos de solución mental llevados a cabo con el uso de inferencias y/o deducciones’” (Sierpiska, 1994, p. 73) y en estos razonamientos, la inferencia y la deducción son diferentes: al realizar inferencias se parte de premisas que llevan a probables conclusiones y en cambio, al realizar deducciones se orienta a partir de razones válidas a consecuencias implicadas por esas razones y en este sentido, la deducción es un razonamiento más formal que la inferencia.

En esta investigación se conjetura que el tipo de razonamientos que los participantes realicen a partir de las transformaciones generadas con base en las representaciones convencionales del álgebra lineal en ambientes computacionales así como las condiciones en la comprensión que se cumplan, serán decisivos en cuanto a las operaciones mentales que se desarrollen y los actos de comprensión de los conceptos que se logren. Asimismo, las actividades a utilizar durante las sesiones experimentales, deben sustentarse en los constructos teóricos que nos permitan dilucidar bajo qué condiciones se propicia la comprensión de los conceptos.

Por otra parte, Sierpiska, Nnadozie y Oktaç (2002) a partir de la interpretación de la obra de Vygotsky sobre los conceptos científicos y cotidianos, elaboran un modelo en el que se argumenta sobre la existencia de dos planos diferentes de construcción del conocimiento matemático: el pensamiento práctico y el pensamiento teórico.

La comprensión de las teorías matemáticas requiere de ambos, el pensamiento práctico y el pensamiento teórico. El pensamiento práctico es la base en contra de la cual el pensamiento teórico adquiere razón de ser y sin la cual pierde su significado epistemológico y, en este sentido, el pensamiento práctico es un *obstáculo epistemológico*. Esto es, un fenómeno cognitivo y cultural que en cierta forma impide el desarrollo

matemático pero que al mismo tiempo, es componente indispensable en la construcción del conocimiento matemático (Sierpinska, 1990, 1992 y 1994, citada por Sierpinska et al., 2002, p. 14).

Otte (citado por Sierpinska, 2005) señala que la distinción de las categorías de pensamiento teórico y práctico, es de naturaleza epistemológica y no ontológica, ya que ellas representan una forma simplificada de conocimiento de la actividad cognitiva humana en matemáticas y no son en sí tipos de actividad cognitiva humana, es decir, las categorías teórico-práctico pueden ser consideradas separadamente solo en teoría, pues el pensamiento se desarrolla simultáneamente en diferentes planos de acción.

Para explicar la relación de complementariedad de las categorías concomitantes de pensamiento teórico-práctico en la actividad cognitiva en matemáticas, Sierpinska (2005) apunta que estas categorías pueden ser vistas como pares de obstáculos epistemológicos, es decir que el pensamiento no es ni teórico ni práctico, pero que surge de la tensión entre ambos.

Vygostky (1995) afirma que “la fortaleza de los conceptos científicos radica en su carácter consciente y deliberado” (p. 184), por lo que se asume que el pensamiento teórico es caracterizado por “la reflexión consciente sobre los significados de las representaciones semióticas del conocimiento, así como de sistemas de conceptos y no solo de acumulación de ideas” (Sierpinska, 2002, pp. 211). También señala la importancia, para el desarrollo del pensamiento teórico, de la participación independiente y crítica del aprendiz en la construcción del conocimiento.

Para dar más detalle al respecto de la inclinación a pensar teóricamente, Sierpinska y colaboradores (Sierpinska et al., 2002) explican que el pensamiento teórico es contrario al pensamiento práctico en sus objetivos, en su objeto y en sus principales intereses y resultados.

El objetivo en el pensamiento práctico es realizar acciones para hacer que algo pase, pero en el pensamiento teórico el objetivo es entender una experiencia y reflexionar sus posibles consecuencias. Además, en tanto que el objeto del pensamiento práctico son fenómenos aislados, en el pensamiento teórico son sistemas de conceptos y, aunque el pensamiento práctico se interesa por dar significado a las acciones, el interés principal del pensamiento teórico es el significado de los conceptos, sus referencias, connotaciones y las posibles consecuencias de ese significado para el significado de otros conceptos relacionados (Sierpinska et al., 2002).

De manera más específica, Sierpinska et al. (2002) describen al pensamiento teórico mediante tres categorías principales: el pensamiento teórico es reflexivo, sistémico y analítico:

El pensamiento reflexivo se refiere al razonamiento realizado de forma voluntaria con el propósito de adquirir una mejor comprensión de las ideas. Mientras que el pensamiento sistémico consiste en pensar acerca de sistemas de conceptos donde el significado de un concepto está basado en sus relaciones con otros conceptos (Sierpiska et al., 2002).

En cuanto al pensamiento analítico, se refiere a la actividad cognitiva realizada de forma consciente para advertir el carácter arbitrario y convencional de los signos y su relación con los objetos que representan (Sierpiska et al., 2002). En este sentido, la distinción teórico-práctico propuesta en el modelo de Sierpiska (2005), no se refiere precisamente al pensamiento como tal, sino a la relación entre el pensamiento y el objeto por asimilar, que en el caso del pensamiento teórico es mediado por sistemas de signos.

El pensamiento práctico opera siempre a nivel de acción, externo al pensamiento en sí mismo, mientras que el pensamiento teórico piensa sobre los conceptos y sobre su razón de ser: se preocupa por las notaciones simbólicas y formas de representación, pero también sobre las reglas y principios que les dan razón y validan su uso (Sierpiska et al., 2002).

### Planteamiento Metodológico

En la presente investigación se busca analizar y describir los procesos en la comprensión de un concepto matemático en estudiantes universitarios, por lo que se plantea necesario estudiar dicho fenómeno desde su contexto para entender cómo es que los participantes dan sentido a su experiencia.

De acuerdo con Merriam (2002), un estudio hermenéutico/interpretativo procura precisamente comprender el significado que las personas han construido acerca de su mundo. Este significado, es mediado por el investigador como principal instrumento en el proceso inductivo por el cual se recolectan y analizan los datos para obtener los hallazgos que se presentan en forma ampliamente descriptiva.

El término “hermenéutica” proviene del verbo griego *hermeneuein* que quiere decir interpretar (Martínez, 2006), y en realidad en toda investigación, la elección del enfoque y la metodología, el tipo de preguntas que se formulan, la recolección y análisis de datos, implican esta actividad interpretativa, pero lo que distingue al método interpretativo es el *énfasis en la interpretación dialéctica del asunto en estudio*.

“La comprensión es participativa, conversacional y dialógica,[...] es algo producido en el diálogo y no algo meramente reproducido por un intérprete a través del análisis de eso que busca comprender” (Denzin y Lincoln, 2000, p. 195).

A diferencia del método denominado explícitamente como “interpretativo”, otros diseños en la investigación cualitativa persiguen además propósitos adicionales (Merriam, 2002), por ejemplo, la teoría fundamentada además de comprender pretende construir una teoría sustantiva sobre el fenómeno de interés, la etnografía busca entender la interacción entre individuos no solo con otros, sino con la cultura de la sociedad en la cual viven. Los estudios de caso, también interesados en describir un fenómeno a fondo, se distinguen por analizar un sistema definido (un caso), elegido porque es único, típico, altamente exitoso, etc.

Además, los estudios fenomenológicos buscan comprender realidades vivenciales de otras personas aunque a diferencia de éstos, el método hermenéutico/interpretativo trata de entender un fenómeno que no necesariamente es totalmente consciente para el participante en el momento en que se produce la expresión. Schleiermacher (citado por Martínez, 2006) afirma que el fin de la hermenéutica es comprender a un autor mejor de lo que él mismo se entiende.

Así, que es a través del diálogo exploratorio con los participantes y, sobre todo, de la observación de lo que sucede y el estudio sistemático posterior (grabaciones y notas de campo), que la información recolectada en el estudio interpretativo lleva al investigador a realizar una visión de conjunto (la interpretación) que integra los hallazgos en una estructura inteligible y coherente.

Se pretende llevar a cabo el estudio con seis estudiantes de segundo semestre (de entre 18 y 20 años) que cursan la materia de álgebra lineal en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. La materia de álgebra lineal forma parte del área de formación básica común a toda la oferta académica del CUCEI, motivo por el cual los alumnos pertenecen a diferentes carreras: ingenierías, licenciatura en matemáticas, en física o química.

### Referencias bibliográficas

- Artigue, M, Chartier, G y Dorier, J. L., (2002). Presentation of other Research Works. En M. James (Ed.), *Mathematics Education Library Series: Vol. 23. On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 247-264). doi: 10.1007/0-306-47224-4\_9
- Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgraber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: New ICMI Study Series, 7*, 255-273. doi: 10.1007/0-306-47231-7\_24
- Harel, G. (1997). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition. *Resources for Teaching Linear Algebra*. MAA notes (42), 107-126.

- Hillel, J. (2002). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra in Question*, 23, 191-207. doi: 10.1007/0-306-47224-4\_7
- Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing student's difficulties in vector spaces theory. *ZDM Mathematics Education* 40, 265-276. DOI: 10.1007/s11858-008-0078-z
- Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (13) 4-II, 373-385. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/relime/201021d.pdf>
- Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*. (Tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional. México. Recuperado de [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/parraguez\\_2009.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/parraguez_2009.pdf)
- Pozo, J. I. (1994). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Tercera edición. España: Morata.
- Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (1), 89-112.
- Kú, D., Trigueros, M., Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, (20) 2, 65-89.
- Sierpinska, A. (1994). Understanding and meaning. En *Understanding in Mathematics* (pp. 1-26). London: Falmer Press.
- Sierpinska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and other False Dichotomies in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*, (pp. 117-135). doi: 10.1007/0-387-24270-8\_11
- Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.
- Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Nueva edición a cargo de Alex Kozulin. Cognición y desarrollo humano. Barcelona, España: Paidós.