ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN INGENIERÍA: SOLUCIONES UTILIZANDO UN CAS

Agustín de la Villa, Alejandro Lois, Liliana Milevicich y Gerardo Rodríguez
Universidad Tecnológica Nacional Argentina
Universidad Pontificia Comillas España
Escuela Politécnica Superior de Zamora. Universidad de Salamanca
avilla@dmc.icai.upcomillas.es, alelois@hotmail.com, liliana_milevicich@yahoo.com.ar, gerardo@usal.es

Resumen. Este trabajo es el resumen del taller sobre el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en una carrera de Ingeniería mediante el uso de un Sistema Algebraico Computacional (Computer Algebra System (CAS) en terminología inglesa), que se impartió en la RELME 27.

El objetivo primordial es poner de manifiesto cómo el uso de un CAS permite abordar, de manera diferente a la tradicional, el estudio de la mayoría de los tópicos que son objeto de un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), especialmente los referidos a soluciones numéricas y gráficas.

Los recursos computacionales constituyen herramientas poderosas en la enseñanza y en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en diferentes aspectos: propician la interacción entre distintas representaciones del modelo matemático que describe el fenómeno de interés (contribuyendo con un aprendizaje significativo), permiten esbozar soluciones de ecuaciones diferenciales, en un contexto muy general, mediante técnicas cualitativas (gráficas y numéricas) y permiten inferir propiedades referidas al tipo de EDO en estudio.

Palabras clave: Nuevas tecnologías - Aprendizaje significativo - Ecuaciones diferenciales – Técnicas cualitativas

Abstract. This work is the resume of a Ordinary Differential Equations Workshop in an Engineering career by using Computer Algebra System (CAS), held in RELME 27.

The primary objective is to show how the use of a CAS will address, differently from the traditional, the study of most of the topics that are the subject of a course in Ordinary Differential Equations (ODE), especially those related to numerical and graphical solutions.

The computational resources are powerful tools in the teaching and learning of differential equations in different aspects: they enhance the interaction between differents representations of the mathematical model that describes the phenomenon of interest, (contributing a significant learning), allow to find, in a general context, solutions of differential equations, using qualitative techniques (mainly graphical and numerical) and they are able to infer properties relating to the type of ODE under study

Key words: New technologies - Meaningful learning - Differential Equations - Qualitative techniques

Antecedentes

Los centros de estudios superiores: Universidad Tecnológica Nacional (UTN) de Argentina y las universidades españolas Universidad Pontificia Comillas de Madrid, y Universidad de Salamanca, en el marco del Programa de investigación conjunta entre Argentina y España, y sustentado por sendos convenios firmados entre las mencionadas universidades, han venido desarrollando actividades conjuntas con el propósito de:

1. Evaluar la evolución sobre la incorporación de Tecnologías de Información y Comunicación (TICs) en la Educación Superior en América Latina y el Caribe, fundamentalmente en los últimos 10 años.

2. Favorecer la investigación en el uso de tecnologías educativas en la Educación Superior.
3. Contribuir a fomentar la investigación en el uso de tecnología educativa dentro y fuera del aula, divulgar sus resultados y aplicarlos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en el nivel superior.
4. Fomentar la interrelación entre las instituciones educativas, universidades, facultades, países y diferentes culturas para contribuir a una enseñanza en el nivel superior más acorde con los tiempos actuales

En respuesta a tales propósitos se han presentado propuestas en la modalidad de grupos de discusión, cursos y talleres en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa de los años 2009, 2010 y 2012. A saber:

- ❖ Un grupo de discusión en la RELME XXIII en Santo Domingo, República Dominicana, referido a la *Perspectiva de las TICs en la Educación Superior en América Latina*. (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2010)
- ❖ Un grupo de discusión en RELME XXIV en la Ciudad de Guatemala, Guatemala referido a la *Perspectiva de las TICs en la Educación Superior Iberoamérica*. (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2011)
- ❖ Un taller en la RELME XXVI en Belo Horizonte, Brasil referido a *Enseñar matemática: un reto en el nuevo paradigma tecnológico.* (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2013)
- ❖ Un curso corto, en el recién mencionado congreso, referido a *La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas. El nuevo paradigma. ¿Es una oportunidad de cambio o un simple engaño?* (Lois, Milevicich, Rodríguez, de la Villa, 2013)

Introducción

Ausubel (2001) propone que una de las primera tareas nuestras como profesores, es promover la predisposición del alumno para aprender. Para ello, es importante que el profesor trabaje, de acuerdo con los intereses, expectativas y necesidades de los alumnos. En este sentido, usando recursos computacionales, es posible presentar nuevas propuestas de actividades que tengan en cuenta las dificultades y la habitual desmotivación de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, de modo que les ayude a superarlas y propiciar condiciones favorables para el aprendizaje significativo.

Los estudios indican que la metodología dominante en el contexto de enseñanza de ecuaciones diferenciales, fuertemente orientada hacia la solución analítica, generan un aprendizaje mecánico, sin que el alumno perciba su potencial y su importancia como una herramienta matemática para resolver problemas prácticos. Los recursos computacionales disponibles en la actualidad permiten ir más allá de la mera aplicación de técnicas para resolución de las ecuaciones, eso puede ayudar a los alumnos a centrarse más en la interpretación de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones en relación a los fenómenos que pretenden representar.

Este trabajo surge del dictado del taller sobre el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en una carrera de Ingeniería mediante el uso de un Sistema Algebraico Computacional (CAS), concretamente *Mathematica*.

El propósito del taller fue:

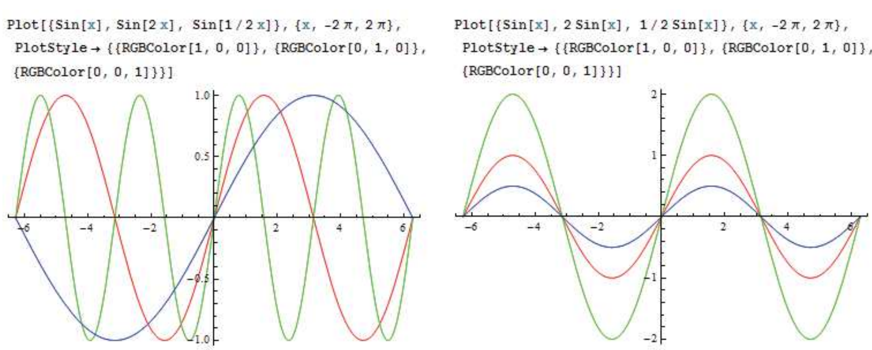
1. En lo general, *proporcionar condiciones favorables para un aprendizaje significativo sobre las ecuaciones diferenciales.*
2. En lo particular, *poner de manifiesto cómo el uso de un CAS, permite abordar, de manera diferente a la tradicional, el estudio de la mayoría de los tópicos que son objeto de un curso de EDO, especialmente los referidos a soluciones numéricas y gráficas*

A la vista de la heterogeneidad de los participantes, en cuanto a su conocimiento sobre el CAS, se acordó dedicar la primera sesión a la introducción del paquete *Mathematica* y la segunda, al estudio de los principales conceptos de las EDO.

Desarrollo

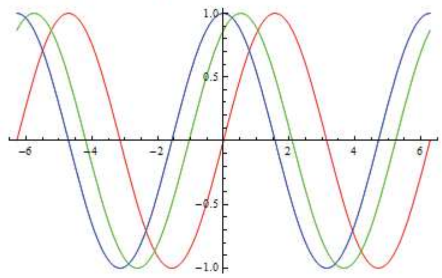
A modo de introducción sobre el uso de *Mathematica*, se presentó la forma de escribir los comandos más comunes, diferentes formas de definir y trabajar con funciones y la implementación de procedimientos.

También se presentaron otras cuestiones referidas a las reglas de asignación y substitución, la simplificación, la aproximación numérica de resultados, la evaluación de instrucciones y el análisis de los mensajes de error.



(a) (b)

```
Plot[{Sin[x], Sin[x + π / 3], Sin[x + π / 2]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0]}, {RGBColor[0, 1, 0]},
 {RGBColor[0, 0, 1]}}]
```



(c)

Gráfico 1. Comando de Mathematica y gráfica de sinusoides con diferentes (a) frecuencias, (b) amplitudes y (c) fases iniciales

Un aspecto importante es el uso del CAS como graficador, con el propósito de obtener la gráfica de una función y analizar diferentes aspectos, tales como imagen, asíntotas, intervalos de crecimiento, puntos críticos e intervalos de concavidad (Stewart, 2008).

A modo de ejemplo, presentamos el análisis de la sinusoide . En cada uno de los gráficos se reproducen diferentes imágenes referidas a la exploración variando los parámetros y las propiedades que se pueden inferir. En el gráfico 1(a) se exhibe el comando de Mathematica y la gráfica de sinusoides con diferentes valores para la velocidad angular, lo cual permite analizar el período y la frecuencia. Por su parte, en el gráfico 1(b) también se exhibe el comando de Mathematica y la gráfica de sinusoides con diferentes amplitudes. Finalmente, el gráfico 1(c) está relacionado con diferentes desfases iniciales.

$$\text{ParametricPlot3D}\left[\left\{x,\ y,\ \frac{1}{x\text{^}2+y\text{^}2}\right\},\ \{x,-3,3\},\ \{y,-3,3\},\ \text{PlotRange}\to\{\{-3,3\},\{-3,3\},\{0,3\}\}\right]$$

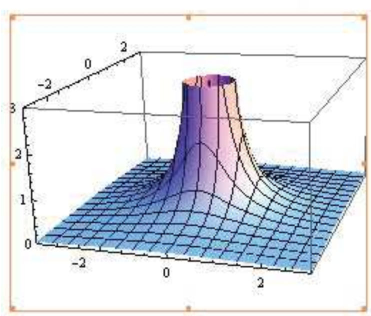


Gráfico 2. Comando de Mathematica y gráfica de una superficie discontinua en el origen.

Una ventaja muy valiosa que proporcionan los CAS, es la obtención de las gráficas de superficies. Cabe observar que la pantalla está acotada y, a menudo, puede dar una imagen incompleta o engañosa; de modo que es importante elegir el rectángulo de visualización más adecuado en cada caso. En el ejemplo correspondiente a la función , si se selecciona una ventana que no incluye el origen, no se advierte la discontinuidad en el punto (0,0) (ver gráfico 2).

Presentación de las ecuaciones diferenciales

En el ámbito de las Ciencias Naturales, muchos fenómenos pueden ser descritos a través del uso de relaciones matemáticas, que involucran tasas, según las cuales las cantidades estudiadas varían en el tiempo o en el espacio. Comúnmente estas relaciones son expresadas por ecuaciones diferenciales (ED) que contienen funciones de las variables involucradas, y tasas de variación relacionadas. Las ED son de gran importancia en varias áreas de conocimiento, como Física, Química, Economía, Ingeniería, Medicina; por la posibilidad de representar fenómenos mediante modelos matemáticos, a saber: crecimiento de poblaciones, decaimiento radiactivo, problemas de mezcla, régimen transitorio en circuitos eléctricos, análisis de mecanismos masa-resorte, estabilidad de sistemas en contextos muy generales, el estudio del equilibrio gravitacional de una estrella, entre otros.

Luego de una breve introducción sobre la clasificación y orden de las ED, el taller se centró en las EDO de primer y segundo orden.

En los cursos tradicionales se estudian los métodos para la determinación de una solución general, si ésta existe, mediante técnicas analíticas. Sin embargo, en la mayoría de los problemas del mundo real es muy difícil, cuando no imposible, encontrar una fórmula que represente la solución explícita. Es por ello que resulta necesario enfatizar el uso de nuevas técnicas que permitan conocer la solución en un punto, en determinados intervalos donde la solución sea creciente o en puntos donde la solución alcance un valor máximo o mínimo.

En ese sentido, los métodos cualitativos, gráficos y numéricos, permiten aproximar una solución particular de la EDO en un intervalo determinado.

Una técnica útil para graficar algunas soluciones particulares de una EDO de primer orden, consiste en bosquejar, mediante un CAS, el campo de direcciones de la ecuación.

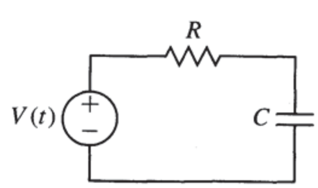


Figura 1. Diagrama de un circuito RC

La Figura 1 muestra el diagrama de un circuito eléctrico con capacitor *C*, resistencia *R* y fuente de tensión *V(t)*, al que habitualmente se denomina circuito RC (Stewart, 2008). El comportamiento del resistor es especificado por un parámetro positivo *R* (la resistencia), y el del capacitor es especificado por un parámetro positivo *C* (la capacitancia). La tensión de entrada, provista por la fuente de tensión, es denotada por *V(t)*. Esta fuente de tensión podría ser una fuente constante como una batería de corriente continua, o bien, una fuente variable con el tiempo de corriente alterna. En cualquier caso consideramos a *V(t)* como una función especificada por el diseñador del circuito.

De la teoría de circuitos eléctricos se sabe que la caída de tensión en el capacitor $v_c(t)$ satisface la ecuación diferencial .

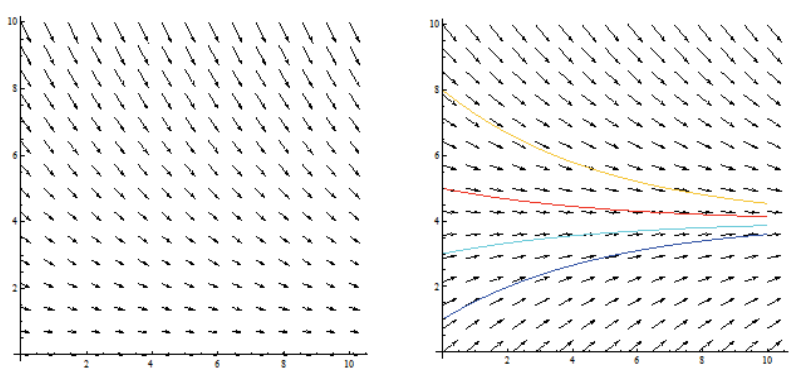
Si la rescribimos de manera estándar , resulta

Los campos de direcciones nos permiten visualizar soluciones para distintos tipos de fuentes de tensión *V(t)*.

El caso más sencillo de analizar es el que corresponde a entrada nula, es decir *V(t)* = 0, para todo *t*.

En este caso la ecuación toma la forma

En el gráfico 3(a) se muestra un campo de direcciones para una selección particular de *R* y *C*, lo cual permite inferir el comportamiento de las soluciones de la ecuación. Se puede observar que las soluciones decaen hacia v_c = 0 a medida que *t* aumenta, esto es: si no hay fuente de tensión, la tensión en el capacitor $v_c\,(t)$ decae a 0.



(a) (b)

Gráfico 3. Campo de direcciones para *R*=0,5 Ω y *C*=10μF, (a) *V(t)*=0, y (b) *V(t)*=*V*=4

Una particularidad de esta ecuación diferencial tiene que ver con el segundo miembro, el cual solo depende de v_c. Este tipo de ecuaciones diferenciales se denominan autónomas y su importancia reside en que las pendientes no dependen del valor de la variable independiente.

La observación del campo de direcciones resulta muy útil dado que permite inferir una importante propiedad: *Las pendientes son idénticas a lo largo de rectas horizontales.*

A partir de esta propiedad, el campo de direcciones puede escribirse sobre la información de una única línea de pendientes. Esto significa que si se conoce una solución para una ecuación diferencial autónoma, se pueden obtener otras desplazando sólo la gráfica de la ecuación conocida a la derecha o a la izquierda.

Un segundo análisis es el corresponde a una entrada constante. Si *V(t)* es una constante $V \neq 0$, la ecuación para la tensión en el capacitor es entonces .

Si observamos el segundo miembro de la ecuación anterior, vemos que esta ecuación también es autónoma. Tal como se observa en el gráfico 3(b), el campo de direcciones permite identificar la solución de equilibrio en $v_c(t) = V$ (se advierte que las soluciones particulares tienden a *V* a medida que transcurre el tiempo).

Retomando nuestro análisis inicial, centramos el estudio en la obtención de soluciones mediante la técnica de métodos numéricos. Éstos ofrecen información cuantitativa sobre las soluciones de una ecuación diferencial; son herramientas poderosas para esbozar soluciones de ecuaciones que presentan modelos poco sencillos o difíciles de resolver analíticamente. Por otra parte, se cuenta con la ventaja de que la mayor parte del trabajo de cálculo puede ser realizado por un CAS.

Algunos ejemplos pueden ser la ley de enfriamiento de Newton y ley de radiación de Stefan. En ambos casos resulta útil una aproximación numérica a la solución para un problema con valor inicial (Nagle, Saff y Snider, 2005). Los desarrollos, en los cuales se aplicó el Método de Euler, no se reproducen por razones de espacio.

La parte final del taller estuvo destinado a las EDO de segundo orden con coeficientes constantes, a partir del modelo que gobierna el movimiento de un oscilador masa-resorte amortiguado y tomando en cuenta las fuerzas que actúan sobre él debido a la elasticidad del resorte, la fricción o amortiguamiento y las posibles influencias externas (García, García, López, Rodríguez & de la Villa, 2006). En el caso de los sistemas forzados, la utilización de un CAS permite conjeturar acerca de la solución estable. Particularmente nos focalizamos en la frecuencia de los forzamientos senoidales con el propósito de explicar el fenómeno de resonancia (Nagle, Saff y Snider, 2005).

Conclusiones

Los recursos computacionales constituyen herramientas poderosas en la enseñanza y en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales en diferentes aspectos:

1. Su uso propicia la interacción con una representación del modelo matemático que describe el fenómeno de interés y contribuye en un aprendizaje significativo. A través de esta interacción, el alumno dispone de la oportunidad de observar, explorar y conjeturar acerca de cómo se comportan las ecuaciones diferenciales involucradas en los modelos matemáticos en estudio.
2. Permiten esbozar soluciones de ecuaciones que presentan modelos poco sencillos y difíciles. En ese sentido las técnicas cualitativas (gráficas y numéricas) permiten obtener una solución aproximada a un problema de valor inicial.
3. Permiten inferir propiedades referidas al tipo de ecuación diferencial en estudio.

Referencias bibliográficas

Ausubel, David (2001). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

García, A., García, F., López, A., Rodríguez, G., de la Villa, A. (2006) *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Madrid: CLAGSA.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2010). Perspectiva de las TIC'S en la Educación Superior en América Latina. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, pp. 1331-1340. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2011). Perspectiva de las TIC'S en la educación superior en Iberoamérica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, pp. 1170-1178.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2013). La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas: el nuevo paradigma ¿es una oportunidad de cambio o un simple engaño? En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, pp. 1867-1876.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. & de la Villa, A. (2013). Enseñar Matemática: un reto en el nuevo paradigma tecnológico. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, pp. 1859-1866.* México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Nagle, K. Saff, E. y Snider, A. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valore en la frontera.* 4ta edición. México: Pearson Addison Wesley

Stewart, J (2008). *Trascendentes tempranas.* 6ª edición. Mexico: CENGAGE Learning.