

TIPOS DE EJERCICIOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LÍNEA: EL CASO DE ACTIVIDADES REFERIDAS A 'REDONDEO'

Cristina Ochoviet y Katharina Skutella

Instituto de Profesores Artigas

Bettermarks.

cristinaochoviet@gmail.com, katharina.skutella@bettermarks.de

Uruguay

Alemania

Resumen. bettermarks es una plataforma para el aprendizaje en línea de la matemática. Presentamos algunos resultados de un estudio de mayor escala en el que analizamos la variedad de los tipos de ejercicios que están presentes en el actual diseño a los efectos de redireccionar futuros desarrollados y/o reformular el diseño de las actividades matemáticas. En este trabajo nos centramos en algunos avances referidos al análisis de ejercicios que involucran redondeo.

Palabras clave: TIC – bettermarks – tipos de ejercicios – redondeo – Bruder

Abstract. bettermarks is a platform for online learning of mathematics. In the present work we present some preliminary results of a major study in which we analyze the variety in the types of exercises in the current design so as to redirect further development and/or reformulation of mathematical activities. In this document we will address the analysis of the exercises dealing with rounding.

Key words: ICT– bettermarks – types of exercises – rounding – Bruder

Introducción

bettermarks es una plataforma que provee más de 100 000 ejercicios y 300 libros de textos para aprender matemática en línea. En este trabajo presentamos algunos resultados preliminares de un estudio de mayor escala en el que nos proponemos utilizar el conjunto de actividades existentes como punto de partida para analizar el actual diseño desde la perspectiva de Bruder (2008), a los efectos de redireccionar futuros desarrollos así como para reformular las actividades matemáticas. Elegimos la perspectiva de esta autora porque, como veremos, sitúa su atención en la estructura de un ejercicio con la consiguiente sistematización a la que esto da lugar, sugiere una variación en el tipo de ejercicios a ofrecer a los estudiantes, de acuerdo a tres componentes que considera como elementos de análisis (situación inicial, método, situación final) y porque ha documentado el impacto que tiene en el aprendizaje tal variación de ejercicios (Bruder, 2008; Bruder, 2010; Büchter & Leuders, 2005). De acuerdo a los diferentes tipos de ejercicios que esta autora propone, prestaremos particular atención a la variedad presente en el diseño actual. En este documento nos focalizamos en el análisis de los ejercicios relativos a *redondeo* y nuestras reflexiones sobre ello.

Marco teórico

Bruder (2008) propone ocho tipos de ejercicios considerando tres componentes que, según su punto de vista, están presentes en todo ejercicio: la situación inicial (información que es dada,

condiciones, etc.), la situación final (conclusiones, resultados, lo que se pide hallar, etc.), y las transformaciones (métodos de resolución, modelos matemáticos, cadenas deductivas, etc.). La autora deduce ocho tipos diferentes de ejercicios dependiendo de que la información correspondiente a cada componente esté presente o no en la propuesta de un ejercicio. Cada tipo de ejercicio tiene funciones específicas en el proceso de aprendizaje y cuando todos los tipos son considerados en la planificación de una lección para enseñar un tópico en particular, estas funciones se complementan y promueven aprendizajes más duraderos.

Usando una tabla como la siguiente, Bruder (2008) organiza los diferentes componentes que pueden estar presentes en la formulación de una actividad y que dan lugar a los ocho tipos distintos de ejercicios:

| Tipo de ejercicio | Ejercicio utilizado como ejemplo | Tarea básica | Ejercicio de justificación | Ejercicio problema | Situación abierta | Ejercicio invertido | Problema invertido | Búsqueda de una aplicación |
|---|----------------------------------|--------------|----------------------------|--------------------|-------------------|---------------------|--------------------|----------------------------|
| Situación inicial, información dada | X | X | X | X | - | - | - | - |
| Camino a seguir, método, procedimiento | X | X | - | - | - | X | - | X |
| Situación final, meta, resultado, solución | X | - | X | - | - | X | X | - |

Una (X) significa que el componente correspondiente está presente en la formulación del ejercicio y un (-) significa que no está presente. Bruder (2008) señala que una gran variedad de ejercicios ofrece a los estudiantes la posibilidad de lograr una comprensión más profunda de lo que se está enseñando.

Método

Como ya mencionamos, bettermarks es una plataforma que contiene más de 100 000 ejercicios matemáticos relacionados con temas que los estudiantes usualmente abordan entre el 4° año de la educación primaria y el 4° año de la educación media. Si bien los documentos curriculares varían en los distintos países, creemos que con la información anterior, referida a niveles educativos, es posible identificar un núcleo común de temas que pueden dar una idea de los tópicos a los cuales

refieren estos ejercicios.

En este estudio analizamos todos los ejercicios donde se presenta una tarea que involucra el redondeo (un tópico que los estudiantes abordan usualmente entre los 9 y 10 años de edad) a los efectos de clasificarlos de acuerdo a los ocho tipos de ejercicios presentados anteriormente.

Discusión

En este reporte mostraremos el análisis de uno o dos ejemplos de cada tipo de ejercicio en contextos de redondeo. De acuerdo con Bruder (2008), podemos dividir cada ejercicio en los tres componentes que ya mencionamos y la presencia o ausencia de estos componentes es crucial para identificar cada tipo.

Ejercicio 1a:

----- Ejemplo 1 -----

Redondear a la unidad de mil más próxima

Observa el número 326 458. Como puedes ver el dígito que ocupa el **lugar de las centenas** en 326 458 es 4.

Por lo tanto redondeas 'hacia abajo'.

$326\,458 \approx 326\,000$

| CM | DM | UM | C | D | U |
|----|----|----|---|---|---|
| 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 8 |

Figura 1. Ejercicio del tipo (XXX): "Ejemplo".

En este ejercicio la situación inicial es dada: el número 326 458. También el método "redondear a la unidad de mil más próxima". El resultado final, 326 000, también es dado. Este es un ejercicio utilizado como ejemplo, es el tipo (XXX). Un ejemplo se utiliza para ilustrar conceptos, para identificar elementos de una clase para facilitar el razonamiento inductivo, para mostrar una variación, para mostrar la aplicación de una técnica, etc. (Watson & Mason, 2002). De acuerdo con Skemp (1999) los estudiantes aprenderán por abstracción a partir de ejemplos y por lo tanto la elección de estos para una lección en particular juega un rol clave. El primer principio para el aprendizaje de la matemática planteado por este autor hace clara referencia al rol de los conceptos: "Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados por una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos" (Pág. 36). Por estas razones, los ejemplos tienen un rol muy importante en el diseño de los libros de texto.

Según Bruder (2008), se pueden generar variaciones de este tipo de ejercicio agregando preguntas a la tarea resuelta; por ejemplo: *¿Es esto verdadero?* O en el caso de un resultado incorrecto: *¿Dónde está el error?* Esta variación se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 1b:

¿Cuáles de los siguientes números han sido **redondeados** correctamente?

Selecciona todas las respuestas correctas:

484 416 \approx 480 000

484 416 \approx 484 500

484 416 \approx 485 000

484 416 \approx 484 420

Figura 2. Variación de un ejercicio del tipo (XXX).

Ejercicio 2:

Redondea el número 738 124 a la **decena de mil** más próxima.

738 124 \approx

Figura 3. Ejercicio del tipo (XX-): “Tarea básica”

La situación inicial es el número 738 124. El método solicitado es redondear a la decena de mil más próxima. El resultado es el número redondeado, esto es, 740 000.

Bruder (2008) se refiere a este tipo de ejercicios como “tareas básicas” (XX-), ya que la situación inicial y el método son explícitamente dados. La meta consiste en hallar el número redondeado.

Tal como Bruder sugiere, la variación de este tipo de ejercicio clásico favorece una comprensión más profunda, un cambio de perspectiva y una mayor posibilidad de establecer conexiones entre conocimientos.

Ejercicio 3:

Leyendo su enciclopedia, Martina averigua que el ecuador tiene una longitud de 40 075 km. Redondea este número a 40 100 km.

¿Cómo **redondeó** Martina este número?

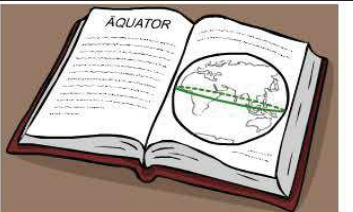


Figura 4. Ejercicio del tipo (X-X): “Ejercicio de justificación”.

La situación inicial es la longitud del ecuador de 40 075 km. El resultado es el número redondeado, esto es 40 100.

El objetivo del ejercicio consiste en encontrar el método correcto, en este caso, redondear a la centena más próxima.

Bruder (2008) se refiere a este tipo de ejercicio como “Ejercicio de justificación” (X-X), ya que la situación inicial y el resultado son dados en forma explícita, mientras que la meta del ejercicio

consiste en encontrar el método.

Ejercicio 4:



Figura 5. Ejercicio del tipo (-XX): “Ejercicio invertido”.

El método es “redondear a la unidad de mil más próxima”, el resultado es el número redondeado, esto es 33 000.

El objetivo del ejercicio consiste en determinar posibles situaciones iniciales, esto es, cualquier número que al ser redondeado a la unidad de mil más próxima, sea 33 000.

Bruder (2008) se refiere a este tipo de ejercicio como (-XX), ya que el método y el resultado están explícitamente dados mientras que la meta del ejercicio consiste en encontrar la situación inicial. Como Büchter & Leuders (2005) enfatizan, la técnica de invertir permite abrir el ejercicio y de esta manera facilitar una comprensión más profunda de los conceptos.

Ejercicio 5:



Figura 6. Ejercicio del tipo (--X): “Problema invertido”

En este ejercicio la situación final (número de gallinas redondeado en 350) es dada. Aunque el enunciado de la actividad dice que este número es redondeado, la estrategia de redondeo aplicada en forma directa no es suficiente para resolver el problema. Más que esto, el estudiante necesita determinar el mayor y el menor número que pueden ser redondeados a 350 y luego calcular la diferencia entre estos dos números para poder dar la respuesta. Como ni la estrategia ni la situación inicial (el número exacto de gallinas que tienen el Sr. Meier y la Sra. Hoffmann) son

dadas, consideramos que este ejercicio es del tipo $(-X)$, esto es, un problema invertido.

Ejercicio 6a:

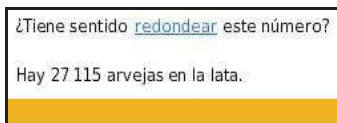


Figura 7. Ejercicio del tipo $(-X)$: “Búsqueda de aplicación”.

Consideramos este ejercicio como “Búsqueda de aplicación”, esto es, tipo $(-X)$ ya que el estudiante debe evaluar si la estrategia de redondeo es aplicable en la situación dada. Aunque una situación inicial es dada, el número conocido de arvejas no es la clave para resolver el problema. La respuesta reside en el contexto en que está propuesta la situación. Estrictamente hablando, el ejemplo anterior solo puede ser visto como una aproximación al tipo de ejercicio denominado “Búsqueda de aplicación” introducido por Bruder (2008), que por ejemplo podría decir:

Presenta un ejemplo en donde tenga sentido aplicar el redondeo.

o

Escribe una historia que incluya una aplicación útil del redondeo.

Esto se debe a que, en este momento, la evaluación de un ejercicio formulado en forma abierta es muy difícil de traducir a un ejercicio de aprendizaje en línea. El siguiente ejercicio también puede ser considerado una aproximación al tipo $(-X)$

Ejercicio 6b:

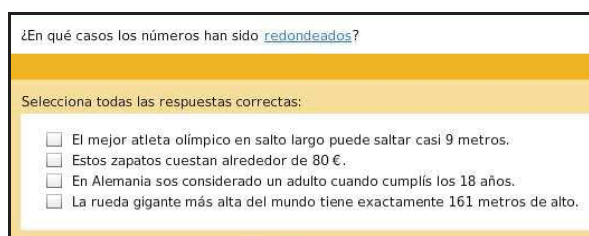


Figura 8. Variación de un ejercicio del tipo $(-X)$: “Búsqueda de aplicación”.

Bruder (2008) recomienda incluir los ocho tipos de ejercicios para ofrecer a los estudiantes posibilidades de comprensión de los conceptos que vayan más allá de la reproducción y la mera aplicación. Analizando la variación del tipo de ejercicios que están presentes en la plataforma bettermarks en referencia al tópico de redondeo, fueron detectados seis de los ocho tipos. Las cifras son las siguientes: (XXX) Ejercicio utilizado como ejemplo: 4; $(XX-)$ Tarea básica de redondeo: 17 (incluyendo aplicaciones y casos especiales); $(X-X)$ Ejercicio de justificación: 6; $(X--)$ Ejercicio problema: 0; $(---)$ Situación abierta: 0; $(-XX)$ Ejercicio invertido: 16 (incluye 8 ejercicios

abiertos y 8 cerrados); (--X) Problema invertido: 1; (-X-) Búsqueda de aplicación: 4. Solamente están ausentes los tipos “Ejercicio problema” y “Situación abierta”, que en este momento no son realizables ya que el grado de libertad que demanda este tipo de ejercicio es difícil de traducir a un sistema automatizado como lo es bettermarks. También, en este momento, solo el “Problema invertido” puede ofrecerse como ejercicio abierto. Todos los otros tipos de ejercicios se ofrecen en la variante cerrada.

Conclusiones

El método de la variación de ejercicios introducido por Bruder (2008) resultó una herramienta útil para analizar el diseño de las actividades de aprendizaje de bettermarks. Esto nos permite, por un lado, introducir una herramienta teórica para el análisis didáctico del diseño actual y, por otro, nos ofrece retroalimentación para futuros desarrollos, en tanto pudimos vislumbrar un panorama claro acerca del tipo de ejercicios con los cuales contamos y también de los que nos faltaría introducir para que el diseño de actividades se adhiriera a la perspectiva de la variación propuesta por Bruder y los beneficios para el aprendizaje de la matemática que esto conlleva.

Concluimos que una variación de ejercicios ya está presente en el diseño actual, pero con el fin de enriquecerlo, deberíamos incluir más ejercicios abiertos, principalmente ejercicios de justificación, búsqueda de aplicación, ejercicios problema, problemas invertidos y situaciones abiertas. El diseño de ejercicios de los tipos “Ejercicio problema” y “Situación abierta” es una meta a alcanzar, pero debemos determinar en qué condiciones este tipo de ejercicio puede ser desarrollado en un sistema automatizado de esta naturaleza.

Referencias bibliográficas

- Bruder, R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten – Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. In R. Bruder, T. Leuders & A. Büchter (eds) *Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*, 18-52. Cornelsen Verlag Scriptor: Berlin.
- Bruder, R. (2010). *The Relationship Between Task Design and Sustained Competencies*. Recuperado el 29 de abril de 2014 en http://www.math-learning.com/files/10_PME_bruder.pdf
- Bruder, R. (2012). *Eight target structure types of tasks as background for learning Surroundings*. Recuperado el 29 de abril de 2014 en http://www.math-learning.com/files/120711_ICME12_TSG31_bruder.pdf
- Büchter, A. & Leuders, T. (2005) Aufgabenmerkmale. In A. Büchter & T. Leuders (eds)

Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen, 73-113. Cornelsen Verlag Scriptor: Berlin.

Skemp. R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Morata.

Watson, A. & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2(2), 237-249.*