El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas[1]

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona. España
gascon@mat.uab.es

Resumen

Este trabajo se estructura en torno a la evolución (no histórica) del *problema* de la *Educación Matemática*. Una vez constatado el fracaso de la *respuesta pedagógica* a dicho problema, surge la *Didáctica de las Matemáticas* que lo aborda tomando en consideración, de manera integrada, "lo matemático" y "lo pedagógico", lo que provoca una doble ruptura: con la *Pedagogía* y con los *modelos epistemológicos ingenuos, transparentes e incuestionables* del conocimiento matemático. En la segunda parte del trabajo se esquematizan muy brevemente las respuestas que proporcionan a dicho problema los dos principales Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas: el Programa *Cognitivo* y el Programa *Epistemológico*.

1. El problema de la Educación Matemática

Cualquiera que sea la forma de delimitar el objeto de estudio y la problemática de la Didáctica de las Matemáticas, existe un acuerdo básico respecto a la *problemática inicial* común a todos los enfoques en Didáctica de las Matemáticas. Llamaré *"problema de la Educación Matemática"*[2] al problema que genera el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas y que puede describirse inicialmente como sigue:

Si la actividad matemática es una actividad humana, como el lenguaje, ¿por qué la inmensa mayoría de los estudiantes son *ajenos* a dicha actividad? ¿Por qué es tan difícil que los estudiantes *entren* en la disciplina matemática[3] a lo largo de toda la Enseñanza Obligatoria (y más allá)? ¿Por qué los estudiantes no *piensan por sí mismos* los problemas matemáticos? ¿Por qué no *plantean preguntas* que vayan más allá de lo que se va a pedir en los exámenes? ¿Por qué no utilizan las matemáticas para *resolver problemas que ellos mismos plantean*? ¿Cómo puede explicarse, en definitiva, el fenómeno relativamente universal de la *alienación matemática*?

A pesar de la complejidad del problema de la Educación Matemático, postulo que para responder al mismo se requerirá un enfoque unitario, esto es, unos principios básicos que permitan reformular y abordar todos los aspectos del problema.

---

[1] Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT. Algunas de las ideas que aquí se proponen fueron presentadas esquemáticamente por el autor en la comunicación "*Matemáticas y Educación Matemática. ¿Hacia una futura convergencia*?" en el ámbito del Congreso de la Real Sociedad Española de Matemáticas que se celebró en Puerto de la Cruz (Tenerife) entre el 27 de Enero y el 1 de Febrero de 2002.

[2] Se trata, en cierto sentido, del problema inverso al *"problema de Bertrand Russell"* que éste formulaba como sigue en una de sus últimas obras: "¿Cómo ocurre que los seres humanos, cuyos contactos con el mundo son breves, personales y limitados, son capaces, sin embargo, de llegar a saber tanto como saben" (Russell, 1948, p. 5). "

[3] *Acceder* a una obra significa "entrar" en ella. En la escuela esta entrada se realiza a través del estudio. "Estudiar una obra" supone *reconocer la disciplina propia de la obra y someterse a ella.* [...] la escuela impone cierto tipo de exigencias totalmente externas a las matemáticas, recubriéndolas de elementos que les son ajenos y que pueden *obstaculizar el descubrimiento de la verdadera disciplina matemática.* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 118).

2. La respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática

Según el punto de vista pedagógico, todavía muy influyente en nuestra cultura escolar, el problema de la Educación Matemática permanece esencialmente inalterado al sustituir "Matemáticas" por cualquier otra disciplina como, por ejemplo, "educación física", "latín vulgar", "música barroca", "filosofía analítica", "literatura francesa", "química orgánica" o "sociología". La Pedagogía pretende dar una respuesta esencialmente común al problema de la Educación de cualquiera de dichas disciplinas.

De hecho, la Pedagogía se ha construido sobre una ficción histórica fundada en la *disociación* entre lo *"matemático"* (considerado clásicamente como el contenido de la enseñanza de las matemáticas, transparente, incuestionable e independiente de la forma de enseñar) y lo *"pedagógico"* (considerado como la *forma* de enseñar, independiente del contenido que se enseña). Se trata de un *mito cultural*[4] fuertemente arraigado en nuestra cultura y del que todavía no nos hemos librado. Este mito es el que legitima culturalmente la existencia de un ámbito propio de "lo pedagógico" y, por tanto, a la Pedagogía como disciplina. En coherencia con este prejuicio básico, la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática:

(a) Empieza por eliminar la disciplina matemática[5] considerada como la causante de la *alienación matemática de los alumnos.*

(b) Postula, implícitamente, que "lo matemático" (como "lo lingüístico" o "lo musical") no es problemático y que, por tanto, puede ponerse entre paréntesis.

(c) Se centra en modificar las estrategias de enseñanza que se suponen esencialmente independientes de las cuestiones a estudiar. Dichas estrategias deben responder a las preguntas siguientes: "¿Qué enseñar[6]?", "¿Cuándo enseñar?", "¿Cómo enseñar?" y "¿Qué, cómo y cuando evaluar?", según criterios preestablecidos e independientes de la disciplina a estudiar.

Hoy en día podemos afirmar sin paliativos ni reservas de ningún tipo que *la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática ha fracasado absolutamente*: por una parte, la eliminación la disciplina matemática no ha hecho más que agravar el problema de la *alienación matemática* de los alumnos y, en lo que se refiere a los aspectos más específicos del problema como, por ejemplo: la problemática del paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad; la iniciación al álgebra escolar en la ESO; o el papel que pueden jugar las calculadoras simbólicas en el estudio de las matemáticas; la Pedagogía, simplemente, no tiene nada que decir.

Hay que reconocer, sin embargo, que el enfoque pedagógico conserva todavía una parte importante de su crédito y paraliza el progreso hacia enfoques más eficaces. En mi opinión

[4] Se trata de un mito interesado: "[...] nier le plus possible la dépendance réciproque de l'organisation scolaire et des questions à étudier afin d'étendre le plus possible le champ de l'intervention légitime des pouvoirs –d'Église ou d'État selon les époques– en matière scolaire [...]" (Chevallard, 2000, p. 106).

[5] La noción de "disciplina matemática" se analiza en Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 129-133). Más adelante describiré las principales "dimensiones" o aspectos de la misma.

[6] Esta pregunta, al igual que las restantes, no presupone, en el enfoque pedagógico, ningún tipo de cuestionamiento de los conocimientos matemáticos. Así, las respuestas posibles en dicho enfoque como, por ejemplo: "Se debe enseñar geometría sintética en la E.S.O.", no comportan ningún tipo de análisis de las posibles organizaciones matemáticas escolares en torno a la geometría sintética ni, mucho menos, de las diferentes relaciones que podrían establecerse entre éstas y el resto de las organizaciones matemáticas.

la causa principal de esta situación es la *separación radical* entre la *actividad matemática y la enseñanza de las matemáticas* que se manifiesta incluso dentro de la propia Universidad. Esta separación, que se refleja en una *comunidad matemática escindida* (Gascón, 1993), es el resultado de un complejo conjunto de factores relacionados entre sí, de entre los cuales destacaré los tres siguientes:

A. La influencia académica y política de los Departamentos y Facultades de Pedagogía que hace que éstos continúen teniendo un gran peso en el diseño de los currículos de Primaria y Secundaria (tanto de matemáticas como de las demás disciplinas) y en la formación del profesorado de dichos niveles educativos.

B. La *separación radical* (legal e institucional) entre la comunidad productora del saber matemático, recluida actualmente en la universidad[7] y el ámbito tradicional de la Pedagogía que no es otro que la enseñanza "no universitaria"[8]. Basta recordar la poca incidencia que ha tenido la comunidad matemática nuclear –formada por los investigadores en matemáticas– en el diseño del currículum de matemáticas de la última reforma de la Enseñanza Secundaria, así como su escasa participación en la formación del profesorado de matemáticas de todos los niveles educativos.

C. La preponderancia del *"modelo popular"* de las matemáticas[9] en las instituciones docentes. Veremos que este modelo, al reducir la "actividad matemática" a series del tipo *"definición-especulación-teorema-prueba"*, expulsa la "enseñanza de las matemáticas" fuera de las actividades genuinamente "matemáticas".

Los efectos combinados de estos factores convergen en una absurda separación entre "hacer" y "enseñar" matemáticas que empobrece ambas actividades (que pueden llegar a ser consideradas como fines absolutos en si mismas) e impide tomar en consideración una *"solución didáctico-matemática"* al problema de la Educación Matemática y renunciar, definitivamente, a la fracasada *"solución pedagógica"*.

3. El modelo popular de las matemáticas

El modelo epistemológico de las matemáticas, que suele sustentarse implícitamente como incuestionable, es el "modelo popular" de las matemáticas. William P. Thurston (1994) describe y caricaturiza dicho modelo en los siguientes términos:

- Los matemáticos parten de algunas estructuras matemáticas fundamentales y de una colección de axiomas "dados" que caracterizan dichas estructuras;
- Respecto de dichas estructuras existen cuestiones importantes y variadas que pueden expresarse en forma de proposiciones matemáticas formales;
- La tarea de los matemáticos es la de buscar una serie de deducciones que enlacen los axiomas con dichas proposiciones o con la negación de éstas.

---

[7] Dieudonné (1987) indica que antes de 1940 el número de puestos de trabajo en la enseñanza universitaria de las matemáticas era muy reducido (menos de 100 en Francia) y, en consecuencia, hasta 1920 algunos matemáticos de la categoría de Weierstrass, Grassmann, Killing y Montel fueron, durante toda o parte de sus carreras, profesores de Enseñanza Secundaria. Pero, en la actualidad, los productores del conocimiento matemático han desaparecido prácticamente de la Enseñanza Secundaria.

[8] La escisión legal entre enseñanza universitaria y no universitaria aumentó dicha separación en España.

[9] Descrito y criticado severamente por el matemático norteamericano William P. Thurston, (1994). En la próxima sección describiré brevemente este modelo epistemológico de las matemáticas así como las consecuencias que acarrea, en las instituciones en las que todavía es predominante, sobre las posibles formas de abordar el problema de la Educación Matemática.

Para dar razón del origen de las cuestiones problemáticas se añade la *especulación* como un ingrediente importante y suplementario de dicho modelo. *Especular* consiste en emitir conjeturas, plantear preguntas, hacer suposiciones inteligentes y desarrollar argumentos heurísticos sobre lo que es verosímil. Se obtiene así el modelo *definición-especulación-teorema-prueba* (DSTP) (Thurston, 1994).

El "modelo popular" constituye, en definitiva, una forma ingenua y simplista de interpretar el conocimiento matemático y puede considerarse como una variedad del *"euclideanismo"* que pretende que los conocimientos matemáticos pueden deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas) que constan de términos perfectamente conocidos *(términos primitivos)*. La verdad de los axiomas fluye entonces desde los axiomas hasta los teoremas por los canales deductivos de transmisión de verdad *(pruebas)* (Lakatos, 1978a).

Es fácil mostrar que el *modelo epistemológico de las matemáticas* predominante en una institución escolar (sea éste cual fuere y aunque esté implícito) influye poderosamente sobre las características del *modelo docente*, esto es, sobre la manera sistemática y compartida de organizar y gestionar el proceso de enseñanza de las matemáticas en dicha institución (Gascón, 2001). En este sentido, se puede afirmar que los *modelos docentes habituales* están sustentados por un *modelo epistemológico ingenuo* (Brousseau, 1987) que, como el modelo popular, aparece a los sujetos de la institución como *la manera incuestionable y transparente* de describir las matemáticas.

Otra de las consecuencias importantes de este modelo epistemológico abusivamente simplificador consiste en que, al ignorar el componente irreductiblemente matemático de los fenómenos de *difusión y comunicación* del conocimiento matemático, separa de una manera radical la *actividad matemática* de la *enseñanza de las matemáticas,* lo que refuerza la pervivencia del enfoque pedagógico.

Pero existen muchos argumentos para rechazar el modelo popular[10] . En efecto, como dice Guy Brousseau, el modelo popular no permite considerar como actividades matemáticas de pleno derecho:

- Las reorganizaciones de los saberes matemáticos, destinadas a posibilitar su difusión social y su estudio.
- Las reformulaciones que faciliten el acceso a nuevas conjeturas y nuevos problemas matemáticos (Brousseau, 1994).

En consecuencia, la asunción absoluta del modelo popular obligaría a la comunidad matemática a considerar que dichas actividades no son "verdaderas matemáticas"[11] , en flagrante contradicción con la convicción unánime de la propia comunidad.

4. La doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas

Una vez consumado el fracaso de la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática, emerge la *Didáctica de las Matemáticas* que se constituyó, desde el principio,

[10] El propio Thurston, en total desacuerdo con la naturaleza del trabajo matemático que se desprende del DSTP, propone la elaboración de un modelo alternativo que ponga el acento en que el trabajo del matemático consiste en hacer avanzar la comprensión humana de las matemáticas y en mejorar la comunicación de dicha comprensión.

[11] Incluso se pondría en tela de juicio que las reorganizaciones llevadas a cabo por Euclides e, incluso, por el grupo Bourbaki, fuesen "verdaderas matemáticas".

sobre el postulado de la *necesidad de hacerse cargo, de forma integrada, de lo "pedagógico" y lo "matemático"*. Éste es el rasgo que caracteriza inicialmente a la Didáctica de las Matemáticas en relación a las restantes disciplinas, como la Historia y la Epistemología de las Matemáticas, que pertenecen al mismo universo que la didáctica y comparten un mismo objeto de estudio. Con más precisión, propongo caracterizar la Didáctica de las Matemáticas, en el ámbito de la Antropología de las Matemáticas, como la *disciplina cuya manera específica de tomar en consideración "lo matemático" consiste en integrarlo con "lo pedagógico"*.

Ésta sería, por tanto, la primera ruptura que permite que emerja la Didáctica de las Matemáticas como una nueva disciplina: la *ruptura con la Pedagogía*. Se trata de una ruptura muy explícita y que difícilmente puede pasar desapercibida. Pero esta ruptura va indisolublemente unida a otra que es menos evidente pero que no es menos importante: se trata de la ruptura con el modelo epistemológico ingenuo del saber matemático y, en particular, con el *modelo popular* de las matemáticas que es predominante en las instituciones escolares. De hecho, veremos que es imposible integrar "lo matemático" y "lo pedagógico" sin cuestionar, a la vez, la naturaleza de "lo matemático". Una de las diferencias básicas entre los distintos enfoques en Didáctica de las Matemáticas consiste, precisamente, en la forma particular en que cada uno de ellos lleva a cabo esa doble ruptura mediante la *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático*. Mostraré que las diferentes formas de "didactificación" pueden comportar cambios importantes en la amplitud del objeto de estudio la Didáctica de las Matemáticas y hasta en la naturaleza de los fenómenos que deben tomarse en consideración.

Simplificando mucho las cosas, postulo que existen, esencialmente, dos maneras diferentes de llevar a cabo este proceso de integración o *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático* que se corresponden con los dos Programas de Investigación que aparecen en cierta reconstrucción racional del desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas[12]. En lo que sigue describiré brevemente las características específicas de ambos Programas o enfoques en Didáctica de las Matemáticas, enunciaré sus hipótesis básicas en relación al problema de la Educación Matemática y esquematizaré la respuesta que da cada uno de ellos a dicho problema.

4.1. Ruptura con la Pedagogía: La respuesta del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática

Históricamente el nacimiento del Programa Cognitivo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas estuvo determinado explícitamente por la insuficiencia manifiesta de la noción general de *"aprendizaje humano"* para abordar el Problema de la Educación Matemática y la necesidad de modelizar el "aprendizaje *matemático* del alumno". Precisamente, la forma particular de integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" –que constituye el rasgo común a todas las teorías didácticas después de la ruptura con la Pedagogía– se lleva a cabo en el

[12] Utilizaré la reconstrucción racional (Lakatos, 1971), de la evolución de la Didáctica de las Matemáticas que se describe en Gascón (1998) y que, en cierta forma, expresa mi propio punto de vista respecto a la naturaleza de nuestra disciplina. Partiendo de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, –como objeto de investigación básico de la Didáctica de las Matemáticas– postulo la existencia de dos ampliaciones sucesivas de dicha problemática que modifican progresivamente su objeto primario de investigación dando origen, respectivamente, a dos Programas de Investigación (Lakatos, 1978b) en Didáctica de las Matemáticas: el Programa Cognitivo y el Programa Epistemológico.

Programa Cognitivo tomando como objeto primario de estudio el citado *aprendizaje (y el conocimiento) matemático del alumno y, más recientemente, las prácticas docentes del profesor de matemáticas.*

Dicha estrategia de modelización-integración empieza por considerar los fenómenos didácticos como fenómenos esencialmente *"cognitivos"* en el sentido de la psicología cognitiva. Esta identificación se refleja en el interés por modelizar la estructura de las *concepciones del alumno* (Lesh y Landau, 1983) y, más recientemente, *las concepciones del profesor* (Thompson, 1992). A continuación se intentan relacionar las concepciones del profesor con las *prácticas docentes* que éste realiza efectivamente en el aula y, por último, reaparece la necesidad de considerar la especificidad del aprendizaje *matemático* del alumno lo que proporciona una nueva dimensión matemática a dichos fenómenos.

Tenemos, en resumen, que en el Programa Cognitivo la integración de lo pedagógico y lo matemático se produce cuestionando la presunta transparencia así como la presunta suficiencia de "lo pedagógico" (entendido en el sentido clásico) y modelizándolo de tal manera que comporta, de hecho, una *ampliación* de lo "pedagógico-cognitivo" para incluir componentes "matemáticos"[13].

Con estos presupuestos, la respuesta del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática se fundamenta en una hipótesis básica:

Hipótesis del Programa Cognitivo: El problema de la Educación Matemática puede ser abordado y resuelto a partir del análisis de ciertas características individuales de los sujetos (actitudinales, cognitivas, metacognitivas, motivacionales, lingüísticas, etc.) relativas a su relación con los objetos matemáticos. Por tanto, para tratar dicho problema, la Didáctica de las Matemáticas debe construir y contrastar empíricamente modelos: (a) De la estructura cognitiva asociada a un concepto; (b) Del desarrollo del pensamiento matemático del sujeto[14].

Partiendo de esta hipótesis, que suele estar implícita puesto que no se discute, las respuestas iniciales del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática son múltiples y están dispersas en la bibliografía[15] . Podemos encontrar, sin embargo, al menos en las respuestas de los últimos desarrollos de dicho Programa, un elemento común que gira en torno a la noción de *"pensamiento matemático flexible".*

Esta noción puede construirse a partir de otras más primitivas que Tall toma de diferentes fuentes[16]. Dichas nociones son las de *"procesos"* mentales *(o sistemas de acciones*

[13] En la línea de ampliación del conocimiento pedagógico incluyendo componentes matemáticos, Schoenfeld (2000, p. 247) destaca como origen de un nuevo programa de investigación los trabajos de Lee Shulman (1986 y 1987) alrededor de la noción de "conocimiento pedagógico del contenido" ("pedagogical content knowledge").

[14] Así, por ejemplo, Ed Dubinsky elabora su Teoría APOS (Asiala et alt, 1996) a partir de la reformulación del mecanismo de la abstracción reflexiva de Piaget, para aplicarla a las matemáticas "avanzadas" y considera que: "La teoría APOS trata de describir el desarrollo, en la mente del alumno, de la comprensión de un concepto matemático". (Dubinsky, 2000, p. 61) Por su parte, Alan H. Schoenfeld considera, análogamente, que elaborar una "teoría de la mente" es uno de los objetivos principales de la Investigación en Educación Matemática (Schoenfeld, 2001).

[15] Puede rastrearse, por ejemplo, en Schwarzenberger y Tall (1978); Tall y Vinner (1981); Tall (1991 y 1994); Vinner (1983 y 1991) y Dubinsky (1991a y 1991b).

[16] Inicialmente de Piaget (1972) y, posteriormente, de trabajos que interpretan la obra de éste, como son los de Dubinsky (1991a y 1991b), Sfard (1989 y 1991) y Harel y Kaput (1991).

interiorizados) y *"conceptos"* producidos por la *"encapsulación"* de procesos. Los *conceptos* así obtenidos son *objetos* sobre los que puede aplicarse, a su vez, un *sistema de acciones* que puede ser de nuevo interiorizado y dar lugar a un *proceso mental* de nivel superior susceptible de ser, de nuevo, *encapsulado* en un *concepto* de orden superior y así sucesivamente. Gray y Tall (1994) denominan *"procept"* a la combinación de *proceso y concepto* (producido por la encapsulación del proceso), y subrayan que los dos aspectos de un "procept" son representados conjuntamente por un mismo símbolo matemático, poniendo así de manifiesto la *naturaleza dual* de los objetos matemáticos y el papel que juega el *simbolismo matemático* en la encapsulación (de procesos en objetos) (Tall, 1996).

En la misma dirección, Dubinsky pretende elaborar una teoría general del conocimiento matemático y su adquisición para aplicarla, muy especialmente, a la educación matemática universitaria (Dubinsky, 1996). Uno de los objetivos de esta teoría es el de aislar pequeñas porciones coherentes (esquemas) de la compleja estructura de *objetos y procesos* que constituye el *conocimiento matemático de cada individuo* y proporcionar así descripciones *explícitas de los esquemas* y de las posibles relaciones entre ellos. Cuando se hace esto para un *concepto* particular, se tiene una *descomposición genética del concepto* que representa sólo un *camino razonable* (no único ni obligatorio) que los estudiantes pueden utilizar para construir el concepto. Para elaborar una descomposición genética de un concepto matemático se tienen en cuenta las dificultades de los estudiantes para construir dicho concepto y, una vez elaborada dicha descomposición genética, se utiliza para *guiar el diseño de la instrucción.*

Así, por ejemplo[17], en el caso del concepto *"función"*, el estudiante puede tener una *concepción de la función como **acción*** (esto es, como una acción sobre objetos que se transforman en otros objetos). Se trata de un *esquema muy estático* que identifica una función con una "fórmula". Este esquema permite, por ejemplo, calcular la imagen de un número real concreto y escribir la función derivada de una función polinómica, pero esta concepción de la función como "acción" no permite entender el concepto general de "diferenciación" y su aplicación a funciones más complejas como, por ejemplo, las definidas a trozos. Para ello es necesario que el estudiante tenga una *concepción de la función como **proceso***, lo que requiere que haya *interiorizado el sistema de acciones* sobre objetos que se transforman en otros objetos. Se obtiene así un esquema *más potente y más dinámico* del concepto de función. Pero existen multitud de actividades matemáticas (especialmente, pero no únicamente, en matemática "avanzada") que requieren que el esquema de función sea construido todavía a un nivel superior en el cual la función *no sea sólo un proceso interiorizado*, sino el resultado de una *encapsulación* que permita tratarlo como un *objeto* singular al que se le pueden aplicar procesos para obtener nuevos objetos. En este punto Dubinsky indica que, para ayudar a los estudiantes a llevar a cabo la encapsulación de la función-proceso y construir la función-objeto, puede utilizarse la *representación gráfica de la función.*

Entre las actividades matemáticas que requieren que el estudiante haya construido una *concepción de la función como **objeto*** podemos citar la resolución de cualquier problema cuya solución pueda ser una función como, por ejemplo, resolver una integral indefinida o, en general, cualquier tarea que requiera aplicar un operador a una función para obtener otra función.

[17] Este ejemplo está presentado, con ligeras modificaciones, en Dubinsky (2000).

Concepción como Acción $\xrightarrow{\text{Interiorizar}}$ **Concepción como Proceso** $\xrightarrow{\text{Encapsular}}$ **Concepción como Objeto**

Pero, en general, el desarrollo del pensamiento matemático requiere que el *esquema* del concepto de "función" del estudiante, al igual que sus esquemas de los conceptos de "derivada", "integral" y "límite", entre otros, contemple simultáneamente ambas características (como *proceso* y como *objeto*).

> **Respuesta del Programa Cognitivo al problema de la Educación Matemática:** Las nociones matemáticas básicas son ejemplos de *"procepts"*. El desarrollo del pensamiento matemático requerirá, por tanto, desde el principio, la suficiente *flexibilidad* para manipular un mismo símbolo ya sea como representante de un proceso que actúa sobre determinados *objetos*, o de una entidad singular a la que se le pueden aplicar otros *procesos* para obtener nuevos *objetos*. La potencia del pensamiento matemático avanzado radica, precisamente, en la *utilización flexible de la estructura dual* de los objetos matemáticos que está posibilitada, en parte, por la *ambigüedad* de la notación que se utiliza. La *rigidez* de los procedimientos estandarizados que caracterizan el pensamiento matemático elemental (y, aún más, el pensamiento espontáneo, "prematemático") constituye, por tanto, el principal *obstáculo cognitivo* que dificulta a los estudiantes entrar en la disciplina matemática y explica muchos de los *errores conceptuales* que cometen.

En resumen, la dificultad de una tarea matemática dependerá, desde el punto de vista del Programa Cognitivo, de la *complejidad de las construcciones mentales* que dicha tarea requiere (*interiorización* de un sistema de acciones para construir un proceso mental, *coordinación* de procesos, *encapsulación* de un proceso para construir un objeto, *reversión* de un proceso, etc.) y, simultáneamente, del grado de *flexibilidad de los esquemas mentales* correspondientes.

4.2. Ruptura con el modelo popular de las matemáticas: La respuesta del Programa Epistemológico al problema de la Educación Matemática

El Programa Epistemológico de Investigación en Didácticas de las Matemáticas surgió de la convicción de que el origen del problema de la Educación Matemática está en las propias matemáticas. El nacimiento del Programa Epistemológico[18] constituye una respuesta a la insuficiencia manifiesta de los modelos epistemológicos de las matemáticas, incluyendo los modelos elaborados por los epistemólogos de las matemáticas, para abordar el Problema de la Educación Matemática.

[18] Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la "epistemología experimental", constituyen el germen del Programa Epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

El cuestionamiento de la transparencia de lo "matemático" y la asunción inequívoca de que *el misterio está en las propias matemáticas*, comporta que se tome la *actividad matemática* como objeto primario de estudio, como nueva "puerta de entrada" del análisis didáctico. Por tanto, la forma particular de integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" –que constituye el rasgo común a todas las teorías didácticas después de la ruptura con la Pedagogía– se lleva a cabo en el Programa Epistemológico mediante el *cuestionamiento* y la *ampliación* de lo que consideraba *"matemático"* en el modelo popular de las matemáticas.

La primera de las ampliaciones de "lo matemático" estuvo protagonizada por la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) que incluyó como parte integrante de los conocimientos matemáticos las condiciones de su utilización en situación escolar. Pero a medida que se iba desarrollando el Programa se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución productora del saber matemático. Aparecieron así los fenómenos de *transposición didáctica* (Chevallard, 1985) y, como una consecuencia natural, la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD). En ésta se toma como objeto primario de investigación la *actividad matemática*[19].

Tenemos, en resumen, que la integración o didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático se produce en el Programa Epistemológico cuestionando y ampliando radicalmente lo "matemático"[18].

Hipótesis del Programa Epistemológico: El problema de la Educación Matemática puede ser abordado a partir del análisis de las *prácticas matemáticas* que se llevan a cabo en las diferentes instituciones (no sólo docentes). Por tanto, para tratar dicho problema, la Didáctica de las Matemáticas debe construir y contrastar empíricamente: (a) Un modelo *epistemológico general* de las matemáticas y modelos locales de sus diferentes ámbitos; (b) Modelos de la *génesis y el desarrollo* de las organizaciones matemáticas en cada una de las instituciones.

Esta hipótesis provoca una *matematización*[20] *del problema de la Educación Matemática (y lo despersonaliza situándolo a un nivel institucional*, relativamente independiente de la voluntad, *la formación, la motivación*[21] y las restantes características individuales de los sujetos de las instituciones.

---

[18] Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la "epistemología experimental", constituyen el germen del Programa Epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

[19] En los últimos desarrollos de la TAD dicho modelo se articula alrededor de la noción de organización (o praxeología) matemática y didáctica y constituye el núcleo firme de dicha teoría en su versión actual. Las primeras formulaciones y ejemplificaciones de dichos modelos se encuentran en Chevallard (1999); Chevallard, Bosch y Gascón (1997); Gascón (1998) y Bosch y Chevallard (1999).

[20] Puesto que el análisis científico de las prácticas matemáticas requiere elaborar modelos epistemológicos nuevos de los diferentes ámbitos de las matemáticas (así como un modelo epistemológico general). Esto no puede hacerse sin llevar a cabo reorganizaciones de los saberes matemáticos para que puedan ser reconstruidos en las diferentes instituciones y difundidos entre ellas. Dichas reorganizaciones deben ser consideradas como una actividad matemática genuina..

[21] Así, por ejemplo, cuando se pretende resolver el "problema de la Educación Matemática" apelando básicamente a la "formación de los profesores" y a la "motivación de los alumnos" se vuelve a caer en el mito pedagógico que, resurgiendo de sus cenizas, vuele a proponer una "solución" repetidamente fracasada.

El Programa Epistemológico, por el contrario, propone abordar el problema partiendo de la necesidad de explicar las restricciones que sufren las organizaciones matemático-didácticas en las diferentes instituciones[22] y en el tránsito entre ellas. Sólo así será posible proponer, de manera fundada, modificaciones de los *sistemas de enseñanza de las matemáticas* que incidirán de manera profunda sobre la "formación de los profesores", la "motivación de los alumnos" y sobre otros muchos aspectos del sistema. Es claro que una propuesta de este tipo requiere, entre otras cosas, un desarrollo suficiente de la *investigación didáctica*[23].

Por lo tanto, la respuesta del Programa Epistemológico al problema de la Educación Matemática deberá iniciarse analizando las características de las organizaciones matemáticas y didácticas que existen en las diferentes instituciones y, en particular, en las instituciones escolares. Describiré a continuación, muy sucintamente, algunos resultados obtenidos por la TAD en esa dirección y que pueden considerarse como la respuesta provisional de esta teoría al problema de la Educación Matemática.

A. La ***organización matemática escolar*** *esconde la verdadera disciplina matemática* y, por lo tanto, dificulta el que los estudiantes "entren" en dicha disciplina (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 129-134). Citaré cuatro aspectos o dimensiones de la disciplina matemática que están bastante ausentes en la *matemática escolar*.

(1) Se olvidan las *cuestiones problemáticas* a las que la organización matemática responde y que, por tanto, constituyen las "razones de ser" de dicha organización. Así, la actividad de resolución de problemas, por ejemplo, no se presenta como un medio para responder a cuestiones relativas a cierta problemática que se pretende estudiar, sino como un fin en sí misma.

(2) Se ignora el papel del *razonamiento matemático plausible o conjetural*, los "patrones" que rigen dicho razonamiento (Polya, 1954) y, por tanto, su función complementaria del *razonamiento deductivo*. Por esta razón las fases exploratorias de la actividad matemática (formulación de hipótesis, búsqueda de contraejemplos, elaboración de estrategias, tanteo de técnicas, etc.) quedan muy debilitadas puesto que se dejan a la responsabilidad casi exclusiva del alumno, sin ningún tipo de institucionalización.

(3) No se respetan suficientemente las *leyes que rigen el desarrollo interno de las técnicas matemáticas*. Esto provoca una clasificación "temática" de los problemas, muy pormenorizada e independiente del desarrollo de las técnicas y de sus interconexiones, lo que provoca la aparición escolar de microuniversos matemáticos aparentemente aislados (Bosch y Gascón, 1994).

(4) El discurso *"tecnológico-teórico"*, esto es, el discurso matemático que justifica e interpreta el trabajo técnico, *no se integra en la práctica matemática* para hacerla más comprensible y eficaz. Se echa en falta un *cuestionamiento de la práctica matemática que se realiza*: no se cuestiona la justificación de las técnicas matemáticas que se utilizan; ni la interpretación de los resultados que proporcionan; ni su alcance o ámbito

[22] En este punto no debe olvidarse que la comunidad matemática nuclear, esto es, la comunidad de investigadores en matemáticas, también debe considerarse como una institución.

[23] Para un análisis sistemático de las relaciones entre la "formación de los profesores" y la *"investigación didáctica"*, ver Chevallard (2000).

de aplicabilidad; ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada; ni su eficacia; ni su economía[24].

B. La ***organización didáctica escolar***, esto es, la forma de organizar el estudio de las matemáticas por parte de las instituciones docentes, *no permite desarrollar todas las dimensiones de la actividad matemática*. En particular, se echa en falta un dispositivo didáctico que permita vivir con normalidad al "*momento del trabajo de la técnica*" y su función integradora de los momentos "*exploratorio*" y "*tecnológico-teórico*" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 286-290).

Respuesta del Programa Epistemológico al problema de la Educación Matemática:
La *alienación matemática* de los alumnos (y, en general, de los ciudadanos) es el resultado de un complejo conjunto de fenómenos que transcienden a las instituciones docentes y se reflejan en algunas características de las *organizaciones matemáticas* y *didácticas* escolares. Dichas características, en la medida que dificultan que los estudiantes "entren" en la disciplina matemática y en la medida que impiden desarrollar funcionalmente todas las dimensiones de la actividad matemática, pueden ser consideradas como las "causas próximas" del fenómeno. La respuesta del Programa Epistemológico, en este nivel "próximo", consiste en proponer modificaciones de las organizaciones matemático-didácticas escolares fundadas en el análisis de las prácticas matemáticas institucionalizadas. Dichos análisis se sustentan en determinados modelos epistemológico-didácticos de referencia que la propia didáctica debe elaborar.

5. Una responsabilidad científica ineludible de la comunidad matemática

La evolución del problema de la Educación Matemática muestra que éste ha ido cambiando de naturaleza:

(a) Empezó siendo considerado como un problema *pedagógico*.

(b) Con la emergencia de la Didáctica de las Matemáticas se convirtió inicialmente en un problema *cognitivo-matemático*.

(c) Y ha acabado siendo un problema con un *componente irreductiblemente matemático*. Lo matemático[25] se ha hecho *denso en lo didáctico*.

[24] Ante la creciente "*alienación matemática*" de los alumnos, el sistema de enseñanza responde mediante la eliminación de las presuntas causas de dicha alienación. Dado que la cultura psicopedagógica dominante identifica dicha causas con "el rigor, la abstracción y la exigencia excesiva de la disciplina matemática", se suprimen los objetivos a largo plazo y todo trabajo sistemático que pueda aparecer como "rutinario", "repetitivo" y, por tanto, "aburrido". Se potencia el "aprendizaje instantáneo" y se atomiza el proceso de estudio convirtiéndolo en una sucesión de "anécdotas" presuntamente "interesantes" o "motivadoras". El resultado final, paradójico, es la *desconcertación* absoluta de los alumnos y un aumento constante de la "alienación matemática" que se pretendía evitar (Gascón, 1999a).

[25] Hay que recordar que en el modelo epistemológico de las matemáticas que propone el Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, amplía la noción de lo "matemático" en relación, por ejemplo, al modelo popular de las matemáticas y, también, en relación a los modelos epistemológicos del Euclideanismo (en el sentido de Lakatos). En Gascón (2001) se describen con cierto detalle las sucesivas ampliaciones del problema epistemológico (y de lo que se considera "matemático" en cada modelo epistemológico) y, en particular, la originada por la confluencia entre éste y el problema didáctico.

Es cierto que la pervivencia del enfoque pedagógico ha limitado históricamente la participación de los matemáticos en la resolución del problema de la Educación Matemática, pero la progresiva matematización del mismo ha devuelto a la comunidad matemática nuclear la posibilidad de *integrarlo entre sus objetos de estudio*. De hecho, la comunidad matemática es la única que, en última instancia, está legitimada para hacerse cargo del *control científico* de los fenómenos que emergen en la *difusión*, la *utilización* y la *transposición institucional* de las organizaciones matemáticas.

Aunque dichos fenómenos no pueden ser reconocidos como genuinamente "matemáticos" en aquellas instituciones en las que la primacía del *modelo popular* (DSTP) de las matemáticas todavía lo impide –porque se identifica la actividad matemática con la mera producción de *definiciones*, *conjeturas*, *teoremas* y *demostraciones*–, es evidente la necesidad de fundamentar matemáticamente su tratamiento, en lugar de juzgarlos únicamente mediante opiniones y argumentos extramatemáticos basados en el "sentido común". Así, por ejemplo, sería extraordinariamente valioso para el desarrollo del conocimiento matemático disponer de criterios matemáticamente fundados: para *analizar* las organizaciones matemáticas que viven en las diferentes instituciones, relacionando el proceso de construcción de las mismas (no necesariamente histórico) con la estructura en la que han cristalizado; para *reconstruirlas a partir de diferentes cuestiones problemáticas* y en función del tipo de práctica social que tenga que llevarse a cabo con ellas; para *reformularlas* de manera que faciliten el acceso a nuevas conjeturas y a nuevos problemas matemáticos; para *integrarlas en organizaciones matemáticas más amplias y complejas*; y para *estudiar los cambios* que se producen en las ellas cuando son transportadas desde una a otra institución, ya sea para ser estudiadas, para posibilitar su difusión o para ser utilizadas.

Esta *"matematización" de la problemática didáctica* responde, por tanto, a necesidades intramatemáticas y constituye una condición necesaria para que la comunidad matemática nuclear (de los investigadores en matemáticas) empiece a tomar en consideración los problemas "didácticos" como problemas científicos no triviales. Sólo asumiendo esta responsabilidad, la comunidad matemática podrá cumplir plenamente la *función científica y social* que se le ha encomendado.

Referencias bibliográficas

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.

BOSCH, M. y CHEVALLARD, Y. (1999): La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

BROUSSEAU, G. (1987): Représentation et didactique du sens de la division, in G. Vergnaud, G. Brousseau et M Hulin (ed.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque du Sèvres, pp. 47-64, La pensée sauvage: Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1994): Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, ICMI Study 94Ê: Washington.

BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Eds.). La pensée sauvage: Grenoble.

CANTORAL, R. (1996): Una visión de la matemática educativa, en *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica: México, pp. 131-147.
CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.
CHEVALLARD, Y. (1991): *Didactique, anthropologie, mathématiques*, Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Ed. La pensée sauvage: Grenoble.
CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.
CHEVALLARD, Y. (2000): La recherche en Didactique et la formation des professeurs: problematiques, concepts, problemes, *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome I, pp. 98-112, A.R.D.M.Ê: Caen. (Houlgate, 18-25 août 1999).
CHEVALLARD, Y. (2001): Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca. Recuperable en
CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.
DIEUDONNÉ, J. (1987): *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Hachete: Paris.
DREYFUS, T. (1991): Advanced Mathematical Thinking Processes, En David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht: Kluwer, pp. 25-41.
DUBINSKY, (1991a): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, pp. 95-126.
DUBINSKY, (1991b): The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics, en L.P.Steffe (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, Springer-Verlag: New York.
DUBINSKY, E. (1996): Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria, *Educación matemática*, Vol. 8, nº 3, 25-41.
DUBINSKY, E. (2000): De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), 3/1, 47-70.
ERNEST, P. (1998): A Postmodern Perspective on Research in Mathematics Education, in Sierpinska, A. y Kilpatrick, J. (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Dordrecht: Kluwer, pp. 71-85.
FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las organizaciones didácticas, XIV Jornadas del SIIDM, Cangas do Morrazo, abril del 2000. Recuperable en
FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2002): Ausencia de Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).
GASCÓN, J. (1993): Una comunitat matemàtica escindida, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 8, 111-117.
GASCÓN, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en secundaria a estudiar matemática en la universidad, *Suma*, 26, 11-21.
GASCÓN, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

GASCÓN, J. (1999a): La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación matemática*, 11/1, 77-88.
GASCÓN, J. (1999b): Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 129-150.
GASCÓN, J. (2001): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4/2, 129-159.
GRAY, E. M. y TALL, D. (1994): Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *Journal for Researh in Mathematics Education*, 26, 115-141.
HAREL, G. y KAPUT, J. (1991): The role of conceptual entities and their symbols in building Advanced Mathematical Concepts, en Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, *Dordrecht: Kluwer, 82-94.*
KILPATRICK, J. (1992): A history of research in Mathematics Education, en Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan Publishing C.: New York, pp. 3-38.
LAKATOS, I. (1971): History of Science and its Rational Reconstructions, en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.): *P.S.A.*, 1970, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, 8, pp. 91-135. Dordrecht: Reidel.
LAKATOS, I. (1976): *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery* (J. Worrall and E. Zahar, Eds.). Cambridge University Press.
LAKATOS, I. (1978a): *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, vol 2, Cambridge, University Press. [Trad. española: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza:Madrid, 1981].
LAKATOS, I. (1978b): *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press: Cambridge.
LESH R. y LANDAU M., eds., (1983): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press: New York.
PIAGET, J. (1972): *The Principles of Genetic Epistemology*, London: Routledge y Kegan Paul.
POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press: Princeton.
RUSSELL, B. (1948): *Human Knowledge: Its Scope and Limits*, Simon and Schuster: New York.
SCHOENFELD, A. H. (2000): Models of the Teaching Process, *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
SCHOENFELD, A. H. (2001): Objetivos y métodos de la investigación en Educación Matemática, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 4/1, 185-203. [Traducción castellana de Juan D. Godino del artículo publicado por Schoenfeld en el número de junio/julio de 2000 (vol. 47, nº 6) de *Notices of the American Mathematical Society*].
SCHWARZENBERGER, R. L. E. y TALL, D. (1978): Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.
SFARD, A. (1989): Transition from operational to structural conception: The notion de function revisited, *Proceedings of PME* 13, Paris, 3, 151-158.
SFARD, A. (1991): On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

SHULMAN, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
SHULMAN, L. S. (1987): Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform, *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
SIERPINSKA, A. y KILPATRICK, J. (edit.) (1998): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Dordrecht: Kluwer.
TALL, D. (1991): The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 3-21.
TALL, D. (1994): Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking, *Lecture at International Congress of Mathematicians*, Zurich.
TALL, D. (1996): Functions and Calculus, En A.J.Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer, 289-325.
TALL, D. y VINNER, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*. 12(2), 151-169.
THOMPSON, A. G. (1992): Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research, in D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127—146). Mac. Millan: New York.
THURSTON, W. P. (1994): On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30/2, 161-177.
VINNER, S. (1983): Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 239-305.
VINNER, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 65-81.